ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта тетрадь-тренажёр продолжает серию пособий, предназначенных помочь учащимся освоить школьную программу по алгебре на высоком уровне.

Изучение алгебры в 7–9 классах крайне важно: знания, полученные на уроках, являются инструментом для изучения других предметных областей, решение задач способствует развитию интеллекта, воспитывает в ребёнке точность, конкретность, последовательность, оперативность. Интерпретируя полученные результаты, он учится объективно оценивать ситуацию, анализировать варианты решения и выбирать из них рациональные.

Многолетняя практика работы в школе показывает, что большое количество учащихся, не обладающих выдающимися математическими способностями, считают алгебру трудным предметом, но учить её должен каждый, и потому очень важно, чтобы это обучение было максимально полезным и, по возможности, приятным.

А можно ли сделать процесс обучения математике эффективным? Могут ли родители помочь своему ребёнку, особенно если алгебра представляет для него определённые трудности? Работая много лет в общеобразовательных и профильных классах, опираясь на свой двадцатилетний опыт обучения детей с разными математическими способностями, решительно отвечаем «да»!

Содержание курса «Алгебра» (7–9 классы) не столько сложно, сколько специфично: все темы, изучаемые на протяжении обучения в школе, как ни в каком другом предмете очень плотно взаимосвязаны друг с другом, а это значит, что, в случае «потери» одной из них (пропустил урок, некачественно или несвоевременно выполнил домашнее задание и пр.), нарушаются многие логические связи, и возникают трудности для дальнейшего освоения, и, увы, учащемуся становится неинтересно.

Одна из основных целей предлагаемой вашему вниманию тетради-тренажёра – помочь учащимся средней школы освоить разделы программы по математике на более глубоком уровне. В тетради-тренажёре собраны задания из личной практики авторов, для выполнения которых требуется более высокая степень владения материалом, понимания и осмысленности действий, эти задания предполагают знакомство учащихся с методами и идеями, необходимыми для дальнейшего успешного углублённого изучения математики.

Собранные в тетради-тренажёре задания систематизированы в таблицы, перед каждой из которых сформулировано задание, которое предлагается выполнить учащемуся. Каждое из заданий пособия, на наш взгляд, целесообразно проработать отдельно, записывая пусть и неподробное решение в пособии. К заданиям приведены необходимые теоретические сведения, которые отмечены специальным знаком , и в конце пособия даны ответы.

Тетради-тренажёры помогут:

- ученикам получить прочные математические знания;
- родителями помочь своим детям стать успешными в данном предмете;
- учителям повысить свой методический уровень;
- репетиторам максимально эффективно устранить пробелы в знаниях учащихся.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

Важно знать:

- ✓ *Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на множестве X из области определения $D(f)$, если для любого $x_1 \in X$ и для любого $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции.*
- ✓ *Функция $y = f(x)$ называется убывающей на множестве X из области определения $D(f)$, если для любого $x_1 \in X$ и для любого $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.*
- ✓ *Функция $y = f(x)$, убывающая (возрастающая) на множестве X, называется монотонной на множестве X.*

- ✓ *СВОЙСТВА МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ:*
  - *Монотонная функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента. Из этого следует, что если $y = f(x)$ – монотонная функция, то уравнение $f(x) = a$, где $a \in R$, имеет не более одного корня.*
  - *Если функция $y = f(x)$ – возрастающая (убывающая), то функция $y = -f(x)$ – убывающая (возрастающая).*
  - *Если функция $y = f(x)$ – возрастающая (убывающая), то функция $y = f(x) + a$, где $a \in R$, – возрастающая (убывающая).*
  - *Если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – возрастающие (убывающие) функции, то функция $y = f(x) + g(x)$ – возрастающая (убывающая) функция. Следствие: если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют противоположный характер монотонности, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.*
  - *Если функция $y = f(x)$ – возрастающая (убывающая) на X и не обращается на этом множестве в нуль, то функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ – убывающая (возрастающая) на X.*
  - *Если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – возрастающие (убывающие) функции, то функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$ – возрастающие функции. Т. е., композиция функций одного и того же характера монотонности есть возрастающая функция.*
  - *Композиция функций разного характера монотонности есть убывающая функция.*
- ✓ *Функция $y = f(x)$ называется чётной, если выполняются два условия: 1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля, то есть для любого элемента этого множества противоположный ему элемент также принадлежит этому множеству; 2) для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$.*
- ✓ *Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если выполняются два условия: 1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля, то есть для любого элемента этого множества противоположный ему элемент также принадлежит этому множеству; 2) для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$.*
- ✓ *График чётной функции симметричен относительно оси ординат, график нечётной функции симметричен относительно начала координат.*

- ✓ *СВОЙСТВА ЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ:*
  - *Если функция $y = f(x)$ является чётной (нечётной), то функция $y = к\, f(x)$ также является чётной (нечётной).*
  - *Сумма двух чётных функции – чётная функция, а сумма двух нечётных – нечётная функция.*
  - *Если функция $y = f(x)$ чётная (нечётная) и не обращается в нуль, то функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ – чётная (нечётная).*

- *Произведение двух функций одинаковой чётности – чётная функция, а двух функций разной чётности – нечётная функция.*
- *Композиция чётной функции с чётной или с нечётной функцией – чётная функция.*
- *Композиция двух нечётных функций – нечётная функция.*
- *Композиция произвольной функции с чётной функцией – чётная функция.*

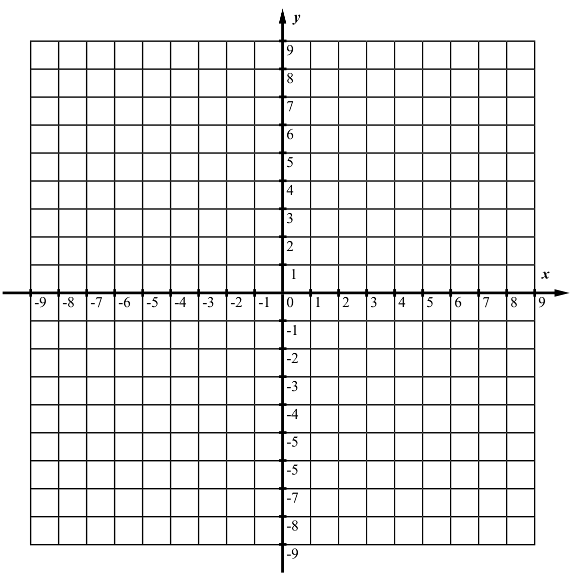
✓ *ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ*

- *График функции* $y = k \cdot f(x)$ *при* $k > 1$ *можно получить из графика функции* $y = f(x)$ *растяжением вдоль оси ординат исходного графика в k раз, а при* $0 < k < 1$ *– сжатием вдоль оси ординат графика функции* $y = f(x)$ *в* $\frac{1}{k}$ *раз.*
- *График функции* $y = -f(x)$ *можно получить из графика функции* $y = f(x)$ *с помощью симметрии относительно оси абсцисс.*
- *График функции* $y = f(x) + n$ *можно получить из графика функции* $y = f(x)$ *с помощью сдвига вдоль оси ординат на* $|n|$ *единиц вверх, если* $n > 0$*, или вниз, если* $n < 0$*.*
- *График функции* $y = f(x - m)$ *можно получить из графика функции* $y = f(x)$ *с помощью сдвига вдоль оси абсцисс на* $|m|$ *единиц вправо, если* $m > 0$*, или влево, если* $m < 0$*.*
- *График функции* $y = |f(x)|$ *можно получить из графика функции* $y = f(x)$ *следующим образом: часть графика* $y = f(x)$*, расположенную выше оси абсцисс, оставляют на месте, а часть графика, расположенную ниже оси абсцисс, симметрично отображают относительно оси абсцисс.*
- *График функции* $y = f(|x|)$ *можно получить из графика функции* $y = f(x)$ *следующим образом: часть графика* $y = f(x)$*, расположенную правее оси ординат, оставляют на месте, после чего отображают её симметрично относительно оси ординат, получая ту часть графика* $y = f(x)$*, которая соответствует отрицательной части области определения функции* $y = f(x)$*.*

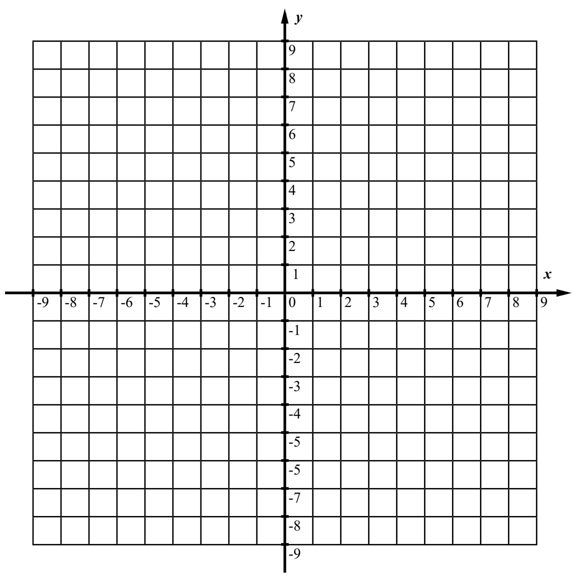
Задание 1

Постройте графики функций и найдите промежутки возрастания и/или убывания функции:

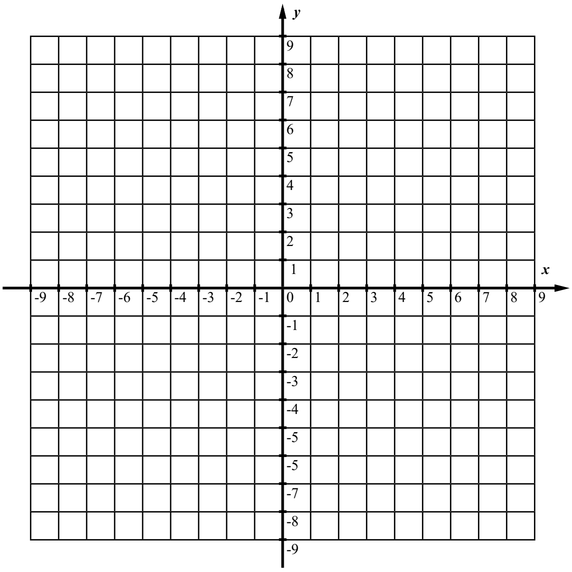
1) $y=|x+2|-4$;



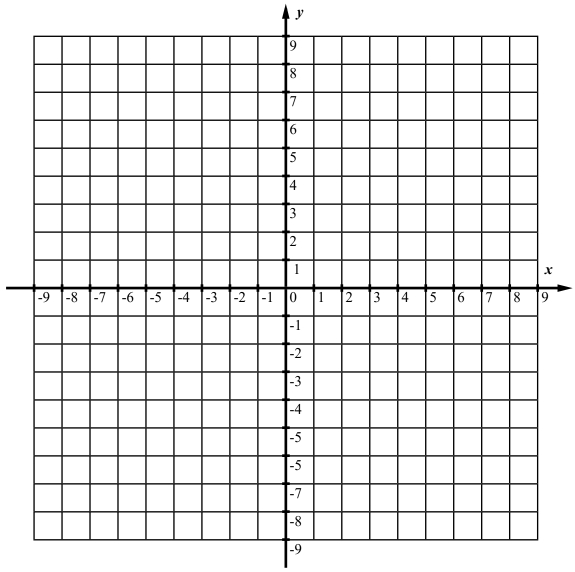
2) $y=x^2+3$;



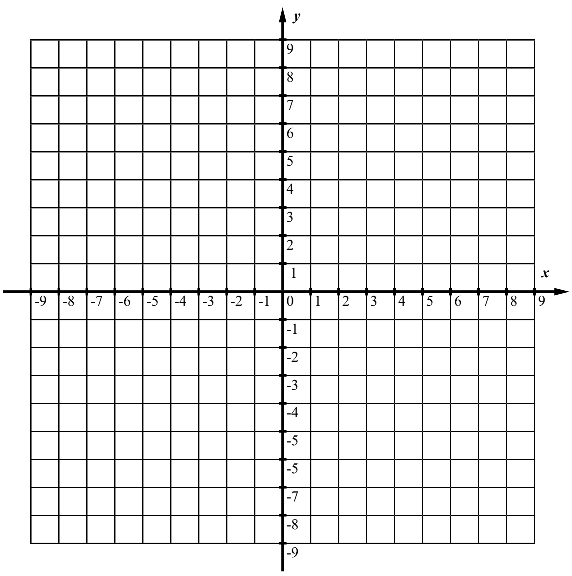
3) $y=-2|x|$;



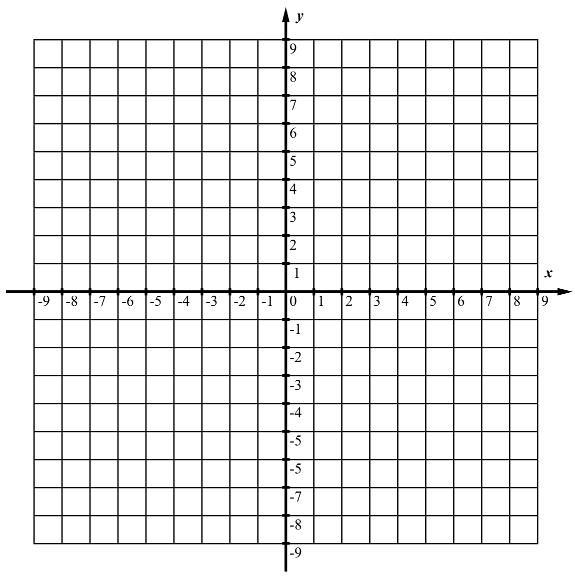
4) $y=10x-|5x+4|$;



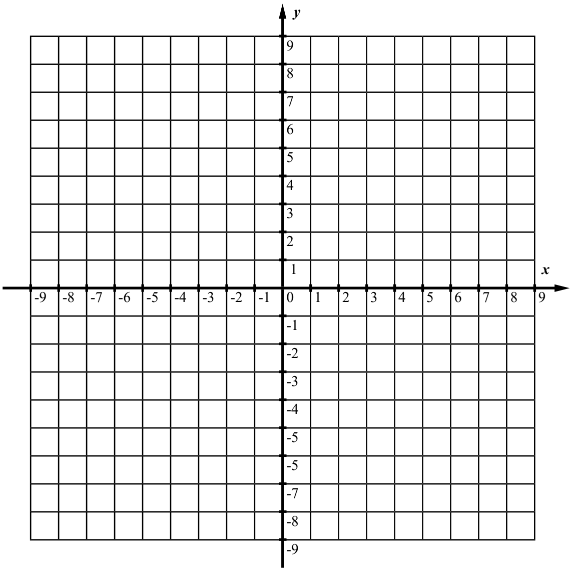
5) $y=3x+|6x-2|$;



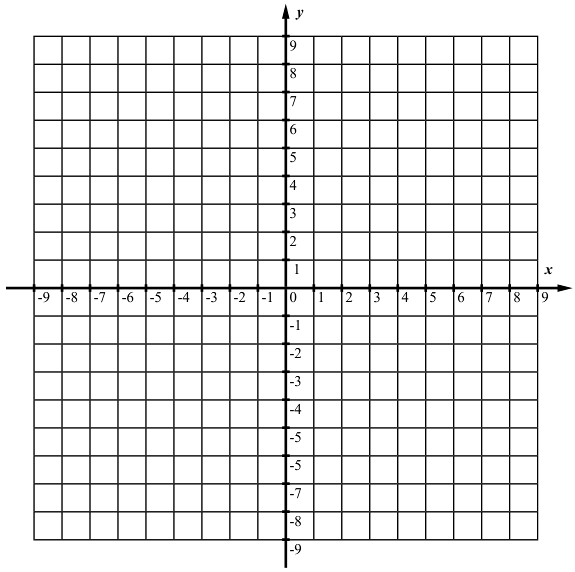
6) $y=7x+|3x+1|-|2x+7|$;



7) $y=8x-|5x+4|+|3x-2|$;



8) $y=|3x+5|+|3x-7|$.



Задание 2

При каких значениях параметра *a* функция:

1) $y=(3a-6)x+7a$ является возрастающей;

Ответ: ____________________

2) $y=(3-2|a|)x+|a^2-4|$ является убывающей;

Ответ: ____________________

3) $y=\dfrac{21|a|-7}{x}$ является возрастающей на [2; 7];

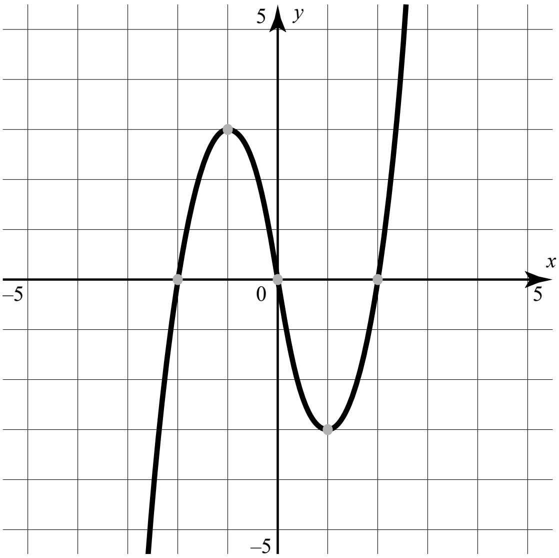
Ответ: ____________________

4) $y=\dfrac{7a^2}{x}$ является убывающей на [–7; –2]?

Ответ: ____________________

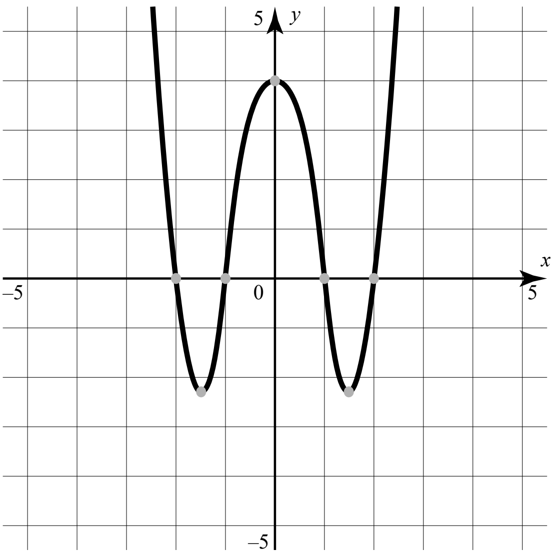
Задание 3

1) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Какие из следующих утверждений о данной функции неверны?



а) Функция возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$.
б) Наибольшее значение функции равно 3.
в) $f(-2) \neq -f(2)$.
г) Функция не является нечётной.
д) $f(-1{,}5) < f(1{,}5)$.
е) $f(x) < 0$ при $x < 2$.

2) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Какие из следующих утверждений о данной функции верны?



а) Функция возрастает на промежутке $(-1; 1)$.
б) Наименьшее значение функции равно –3.
в) $f(-2) = f(2)$.
г) Функция является чётной.
д) $f(-2{,}5) < f(2{,}5)$.
е) $f(x) > 0$ при $x > 2$.

Задание 4

Найдите промежутки монотонности функции:

1) $y=(x+1)^2+\sqrt{x}$; **Ответ:** ____________________	2) $y=\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x-5}$; **Ответ:** ____________________

3) $y=\sqrt{4-x}+\frac{1}{x}$; **Ответ:** ____________________	4) $y=\sqrt{4+x}-\frac{1}{x}$. **Ответ:** ____________________

Задание 5

Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+41}+\sqrt{x+9}+\sqrt{x-15}=21$; **Ответ:** ____________________	2) $x^2+\sqrt{x-3}-\frac{18}{x-6}=144$; **Ответ:** ____________________
3) $x^2+\lvert x\rvert+\sqrt{x}+2x-3=27$; **Ответ:** ____________________	4) $x^2+\lvert x+1\rvert+\sqrt{x}+3x-5=2$; **Ответ:** ____________________
5) $\left(x^2+4x+9\right)\sqrt{4x+1}=9$; **Ответ:** ____________________	6) $x^5+x^3+6x^2+12x=88$. **Ответ:** ____________________

Задание 6

Исследуйте на чётность функцию:

1) $y=\dfrac{x-3}{x^2-16}$; **Ответ:** ____________________	2) $y=x^2$, где $-3\le x\le 1$; **Ответ:** ____________________
3) $y=\dfrac{2x^2+3\lvert x-3\rvert+3\lvert x+3\rvert}{\lvert x\rvert-2}$; **Ответ:** ____________________	4) $y=\dfrac{2x^3+3x\lvert x\rvert}{x+2}$; **Ответ:** ____________________
5) $y=\dfrac{x-2}{x^2+5}$; **Ответ:** ____________________	6) $y=\sqrt{\left(\lvert x\rvert+1\right)^2}-4$; **Ответ:** ____________________
7) $y=\sqrt{\lvert x\rvert-4}$; **Ответ:** ____________________	8) $y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x+5}$; **Ответ:** ____________________

9) $y=\frac{5x+6}{x^2-x+1}+\frac{5x-6}{x^2+x+1}$; **Ответ:** ____________________	10) $y=\frac{x^3}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+3}}$. **Ответ:** ____________________

Задание 7

Известно, что $y=f(x)$ чётная функция и $f(1)+f(-2)=4$. Найдите:

1) $f(-1)+f(-2)$; **Ответ:** ____________________
2) $2f(1)+3f(-2)-f(2)$; **Ответ:** ____________________
3) $f(1)+f(2)$; **Ответ:** ____________________

4) $7f(1)+8f(-2)-2f(-1)-3f(2)$.

Ответ: ____________________

Задание 8

Известно, что $y=f(x)$ нечётная функция и $f(-5)+f(2)=11$. Найдите:

1) $f(5)+f(-2)$;

Ответ: ____________________

2) $f(5)+f(2)+f(-5)+f(-2)$;

Ответ: ____________________

3) $-f(5)-f(-2)+1$;

Ответ: ____________________