

ВВЕДЕНИЕ

Обострение конкуренции на национальном и международном уровнях, внедрение на предприятиях и в организациях систем качества, соответствующих международным стандартам, заставило многих вновь обратиться к статистическим методам.

Статистические методы признаются важным условием рентабельного управления качеством, а также средством эффективности производственных процессов и качества продукции. В стандартах ИСО серии 9000, где рассматриваются системы качества, записано: «В случаях необходимости поставщик должен разрабатывать процедуры, обеспечивающие выбор статистических методов, необходимых для проверки возможности технологического процесса и приемлемости характеристик продукции».

Статистические методы активно используются для принятия обоснованных решений на всех этапах жизненного цикла продукции: при исследовании рынка, проектировании, материально техническом снабжении, подготовке производства и производстве и т. д. Наиболее широкое применение статистические методы находят на этапах производства и контроля готовой продукции.

Видный специалист в области качества К. Исикава разделяет статистические методы, используемые в системах качества, на три группы [24].

1. *Элементарные методы.* К ним относятся так называемые «семь простых инструментов качества»: контрольный листок, гистограмма качества, причинно-следственная диаграмма, диаграмма Парето, стратификация, диаграмма рассеивания, контрольная карта (по его мнению, эти методы позволяют решить до 95% всех проблем, стоящих перед предприятием).

2. *Промежуточные методы* — это методы приемочного контроля, теории распределений, статистические оценки и критерии.

3. *Передовые методы.* К ним относятся методы, основанные на использовании компьютерных технологий: планирование эксперимента, многомерный анализ, методы исследования операций.

Большое распространение в управлении качеством получили семь простых методов, применение которых не требует высокой квалификации персонала и позволяет охватить анализ причины большинства возникающих на производстве дефектов. Они описаны в соответствующих главах.

В данном учебнике значительное внимание уделяется не только теории, но и практическому применению математической статистики для решения конкретных производственных задач, особенно при анализе качества процессов.

Цель изучения дисциплины «Статистические методы в управлении качеством» — формирование у студентов знаний и практических навыков статистического анализа и математического моделирования математических методов оценки качества технологических процессов в производстве.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И СИСТЕМА КАЧЕСТВА

1.1. История развития статистических методов качества

Первое восприятие статистических методов качества в виде выборки имеет многовековую историю. Еще несколько столетий тому назад покупатели зерна и хлопка проверяли свойства товара, прокалывая мешки, чтобы взять пробу. Можно допустить, что в те времена не было научного расчета взятия проб, и следует предположить, что это было делом опыта как продавцов, так и покупателей товара.

До тех пор, пока ремесленник совмещал в себе функции и производителя, и контролера (до середины XIX в.), не было проблем с оценкой качества изготовленной продукции. Все изменилось с появлением разделения труда. Рабочие первых фабричных мануфактур, способные выполнять простые операции процесса, не могли отвечать за качество своего труда и тем более за качество готовой продукции. Введение должности контролера привело к необходимости нормирования функций контроля и со временем потребовало разработки научного подхода к оценке качества продукции. Стремление к производству высококачественной продукции привело к гипертрофированному раздуванию на промышленных предприятиях контрольного аппарата.

Статистические методы контроля качества труда стали использовать еще позже — в первой четверти XX в. Именно их внедрение позволило значительно сократить трудоемкость операций контроля и значительно снизить численность инспекторов (контролеров). Первое применение научных методов статистического контроля было зафиксировано в 1924 г., когда В. Шухарт использовал для определения доли брака продукции контрольные карты [23].

В. Шухарт переключил внимание с допускового подхода к управлению качеством на подход, направленный на обеспечение стабильности процессов и уменьшение их вариаций. Его идеи до настоящего времени сохраняют актуальность. Кроме того, он высказал идею непрерывного повышения качества, предложив цикл непрерывного улучшения процессов, носящий сегодня название «цикл Шухарта — Деминга». В последние годы этот цикл получил дальнейшее развитие под воздействием Деминга и стал использоваться как инструмент командной работы по улучшению качества.

Одновременно с В. Шухартом в середине 1920-х гг. инженером Г. Ф. Доджем была предложена теория приемочного контроля, получившая вскоре мировую известность. Основы этой теории были изложены в 1944 г. в его совместной с Х. Г. Роллингом работе «Sampling Inspection Tables — Single and Double Sampling».

Большой вклад в систему обеспечения качества контроля в середине XX в. внесли американские ученые Д. Нойман, Э. Пирсон, Е. Фишер. Среди их разработок наибольшую известность получила теория проверки статистических гипотез. Можно отметить, что сегодня без знания теории ошибок первого и

второго рода невозможна рациональная оценка выбранного метода статистического контроля.

Во время Второй мировой войны нехватка ресурсов заставила искать новые методы контроля с возможно малым числом проверяемых изделий, особенно при разрушающем контроле. В 40-х гг. XX в. А. Вальд (США) разработал теорию последовательного анализа и статистическую теорию принятия решений. Применение теории последовательного анализа было настолько эффективно (расходы на контроль при прежней вероятности ошибок снижаются до 60% по сравнению с традиционными методами), что в США она была объявлена секретным документом и опубликована только после окончания войны [23].

Большое влияние на становление статистических методов контроля как философии качества оказал Эдвард Деминг (США). В начале 1950-х гг. Э. Деминг проводил широкомасштабное обучение японских специалистов новым методам обеспечения качества, особое внимание при этом обращая на статистические методы управления им. Его деятельность была настолько успешной, что уже в 1960-х гг. американцам пришлось уступить японским фирмам значительную часть рынков сбыта, в том числе и в самих США.

Американское научное влияние на совершенствование систем обеспечения качества привело к созданию японской научной школы в области качества, среди представителей которой следует отметить К. Исикаву и Г. Тагути, внесших большой вклад в развитие статистических методов в управлении качеством. Так, К. Исикава впервые в мировой практике предложил оригинальный графический метод анализа причинно-следственных связей, получивший название «диаграмма Исикавы». Сегодня практически невозможно найти такую область деятельности по решению проблем качества, где бы не применялась диаграмма К. Исикавы.

Внесли свой научный вклад в развитие статистических методов и советские ученые: В. И. Романовский, Е. Е. Слуцкий, Н. В. Смирнов, Ю. В. Линник и др. Так, например, Н. В. Смирнов заложил основы теории непараметрических рядов, а Е. Е. Слуцкий опубликовал несколько важных работ по статистике связанных стационарных рядов. Особенно интенсивно в СССР разрабатывались статистические методы исследования и контроля качества в массовом производстве, методы планирования эксперимента (Ю. П. Адлер и др.).

В 50–70-х гг. XX в. на ряде предприятий оборонного комплекса СССР активно проводились (под влиянием японского опыта по повышению качества) работы по внедрению систем управления качеством (в Саратове — БИП, в Горьком — КАНАРСПИ, в Ярославле — НОРМ, во Львове — КСУКП и др.), в которых статистические методы в области приемочного контроля и регулирования технологических процессов занимали важное место в предупреждении дефектов продукции.

В последние годы можно отметить работы российского ученого в области качества В. А. Лapidуса. Им опубликован ряд трудов по теории и практике управления качеством с учетом вариаций и неопределенности, в которых изложен «принцип распределения приоритетов», позволяющий оптимально выстроить отношения поставщика и потребителя с позиции обеспечения качества. Ему

же принадлежит новый подход к управлению качеством, названный «гибким методом статистического управления», который математически опирается на теорию нечетких множеств.

И все же можно отметить определенную застой российской научной школы математической статистики, связанный, вероятно, с отсутствием спроса на научный заказ по применению новых статистических методов обеспечения качества продукции.

1.2. Статистические методы в управлении качеством

Прежде чем говорить о методах управления качеством, тем более статистических, определимся с понятием «качество».

Качеством называют «совокупность характерных свойств, формы, внешнего вида и условий применения, которыми должны быть наделены товары для соответствия своему назначению». Или качеством называют «совокупность характерных особенностей, формы, внешнего вида и условий эксплуатации, определяющих пригодность товаров». Современная трактовка понятия «качество» — совокупность свойств товаров и услуг, определяющих их способность удовлетворять реальные и потенциальные потребности потребителей.

Все эти элементы определяются требованиями к качеству изделий, которые конкретно воплощены на этапе проектирования в технической характеристике изделия, в конструкторской документации и в технических условиях, предусматривающих качество сырья, конструктивные размеры и т. д.

Элементы, составляющие качество, называются показателями качества, а численное их выражение называется значением показателя качества.

Каким образом осуществляется управление качеством?

В ситуациях повседневной жизни мы бессознательно пользуемся круговым циклом управления: планирование — осуществление — контроль — управляющее воздействие.

Само собой разумеется, что в условиях предприятия мы намеренно используем такой круговой цикл управления независимо от масштабов работы и продолжительности циклов. Отсюда вытекает, что круговой цикл управления, представляя собой основную линию претворения в жизнь рабочих замыслов, составляет подлинную сущность управления.

Функции планирования, которые по сути дела подразумевают проектирование, заключаются в использовании стратегии и тактики руководства предприятием при анализе и учете результатов изучения рынков, рыночной информации, коэффициента эффективности капитальных затрат, технического уровня своего предприятия, эффективности контроля, ожидаемой реализации, предполагаемой себестоимости и т. д. и предусматривают определение уровня качества изделий и качества конструкции. Иными словами, определяя ожидаемое качество для товаров своей фирмы, функции планирования выполняют ответственную задачу.

Качество конструкции, конкретно воплощенное в цифровые значения установленных нормативов технических характеристик, способов эксплуата-

ции, гарантийного обслуживания и т. д., облекается в форму рабочих чертежей, технических условий и другой технической документации с тем, чтобы ими легко было воспользоваться на месте производства изделий.

Функция осуществления представляет собой воплощение запроектированного качества конструкции в готовую продукцию; она предусматривает проектирование технологических процессов, определение вида используемого оборудования, машин, рабочего инструмента, а также методов работы и методов контроля, в том числе методику контроля измерительных приборов и технологических процессов. Кроме того, функциями осуществления предусматривается обучение исполнителей работ. Все это в комплексе преследует цель — сохранить степень соответствия продукции техническим требованиям и выдержать установленные сроки, а также по возможности улучшить эти показатели.

Функция контроля — само собой разумеется, что она осуществляется на стадии изготовления продукции, а также состоит в выяснении истинных достоинств товара после его поступления на рынок. Другими словами, пригодность товара подтверждается посредством сбыта. И отнюдь не будет преувеличением следующее утверждение: в зависимости от возможности или невозможности реализовать товары в соответствии с планом сбыта можно составить мнение об их пригодности.

Функция управляющего воздействия подразумевает меры по реализации продукции и соблюдению способов продажи товара, предусмотренных планом, проведение мероприятий по техническому обслуживанию (сервису) в случае, когда реализованный товар не отвечает требованиям качества. Кроме того, к ней относятся сбор информации о качестве реализованного на рынке товара, выявление возможностей улучшения качества, изучение мнения потребителя о качестве товара для внесения необходимых изменений в процесс. Следовательно, любая информация о качестве реализованного товара будет иметь важное значение при последующем его проектировании.

Управление предприятием и организация сбыта имеют своей задачей не просто реализацию товара. Одной из важнейших функций является тщательный сбор рыночной информации и учет полученных данных при проектировании.

Для успешного и четкого управления перечисленными выше функциями планирования, осуществления, контроля и управляющего воздействия необходимо, чтобы все службы и отделы предприятия: проектный отдел, производственный отдел, службы материально-технического снабжения, контроля, сбыта и реализации, отдел управления предприятием и др., владея техникой управления и контроля, специальной технологией, а также статистическими методами и располагая представлениями о серьезном значении качества, с ответственностью за его уровень выполняли возложенные на них обязанности.

Одним из главных средств, повышающих соответствие изделий техническим требованиям и одновременно предусматривающих сдерживание роста затрат по управлению предприятием наряду с модернизацией оборудования, усовершенствованием технологии и т. п., является использование статистических методов.

Стандарт ИСО утверждает, что правильное применение статистических методов имеет важное значение для проведения управляющих воздействий при анализе рынка, проектировании продукции, прогнозировании долговечности и срока службы, изучении средств регулирования процессов, определении уровня качества в планах выборочного контроля, оценке эксплуатационных характеристик, улучшении качества процессов, оценке безопасности и анализе рисков.

Используя статистические методы, можно своевременно выявлять проблемы, связанные с качеством: обнаружить нарушение процесса до того, как произошел выпуск дефектных изделий. В значительной мере статистические методы позволяют установить и причины нарушений.

Причины вариаций любых процессов могут быть разделены на две группы. Первая — это *общие причины*, связанные с производственной системой (оборудование, здания, сырье, персонал); соответствующую вариабельность нельзя изменить без изменения системы. Любые действия рядовых сотрудников — исполнителей — в этой ситуации, скорее всего, только ухудшат положение. Вмешательство в систему почти всегда требует действий со стороны руководства — высшего менеджмента.

Вторая группа — *специальные причины*, связанные с ошибками оператора, сбоями настройки, нарушением режима. Ликвидацией этих причин занимается персонал, непосредственно участвующий в процессе. Это неслучайные причины — износ инструмента, ослабление креплений, изменение температуры охлаждающей жидкости, нарушение технологического режима. Такие причины должны быть изучены и могут быть устранены при настройке процесса, что и обеспечит его стабильность.

По правилу 85:15, предложенному Д. Джураном в развитие известного принципа Парето 80:20, примерно в 15% всех возникающих в процессе проблем необходимо именно вмешательство линейного персонала, гораздо чаще — в 85% требуются действия высшего менеджмента.

Итак, применение статистических методов в задачах управления качеством позволяет выявить проблемы и их причины, решение же этих проблем — задача специалистов в конкретной области.

1.3. Статистические методы в системах качества

Наиболее эффективным и экономичным путем осуществления мероприятий в области качества является разработка и реализация систем качества. Наиболее авторитетную методическую и нормативную базу для разработки, внедрения и поддержания систем качества обеспечивают международные стандарты ИСО серии 9000.

В основу этих стандартов положены восемь принципов менеджмента качества, сформулированных на основе обобщения практики применения концепции всеобщего менеджмента качества (TQM — Total Quality Management). Наиболее значимым элементом стратегии качества TQM, на котором базируются системы менеджмента качества в соответствии с международными стандар-

тами ИСО 9000, является положение, что решение принимается только на основе фактов, т. е. на достоверной и объективной информации, а не на догадках, предположениях и интуиции лиц, принимающих решения. Реализация этого принципа требует, прежде всего, проведения необходимых измерений, сбора и регистрации исходных данных по результатам различных видов деятельности и степени их изменчивости, а затем их обработки и анализа, что предполагает использование соответствующих статистических методов. Применение статистических методов помогает лучше понять природу, масштаб и причину возникновения изменчивости, способствуя решению и предупреждению появления проблемных ситуаций, которые могут быть следствием такой изменчивости, а также содействует постоянному улучшению соответствующей деятельности.

Постоянное совершенствование любого процесса наиболее эффективно можно проводить с помощью цикла *DAI*, состоящего из трех этапов: определение (*D — Define*), анализ (*A — Analyze*) и улучшение (*I — Improve*) процесса (рис. 1.1). Основой для совершенствования процесса является его определение (этап *D*). На этом этапе процесс должен быть полностью идентифицирован, т. е. должно быть установлено его назначение, выявлены особенности протекания процесса, причины его изменчивости и т. д. В зависимости от степени понимания процесса зависят стратегия его улучшения и используемые для этого инструменты. Необходимым условием определения процесса является выявление его внешних или внутренних потребителей, установление их желаний и нужд, а также владельцев (хозяев) этого процесса, уровень их ответственности и компетентности.

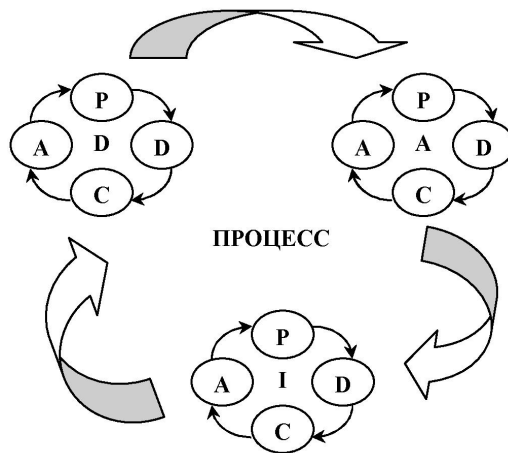


Рис. 1.1

Этапы цикла постоянного улучшения процесса *DAI* со встроенными в них циклами Шухарта — Деминга *PDCA*

На втором этапе (этап *A*), когда понимание процесса достигнуто, процесс необходимо проанализировать и наметить пути его улучшения. В процессе анализа процесса выявляются особые и обычные причины изменчивости, на основе чего осуществляется их разделение. На базе выявленных особых причин из-

менчивости намечаются пути улучшения процесса и устанавливаются их приоритеты для выбора наиболее эффективного пути. На этом этапе цикла также необходимо поддерживать процесс на достигнутом уровне стабильности. При выходе процесса из стабильного состояния требуется предпринять меры по устранению возникающих особых причин для возвращения его в стабильное состояние. На этом этапе наиболее эффективным инструментом является статистическое управление процесса на основе контрольных карт, с помощью которого можно выявить особые причины и разработать меры по их устранению.

На последнем этапе (этап *I*), когда проведен анализ процесса, расставлены приоритеты и произведена стабилизация процесса, осуществляется улучшение процесса. На этом этапе улучшение следует рассматривать как неизменную цель процесса. Улучшение процесса может происходить в рамках существующего процесса с помощью серии малых повсеместных и постоянных улучшений или вне рамок данного процесса при замене его на новый, более современный процесс на основе кардинальной реорганизации существующего процесса. Как в первом, так и во втором случаях улучшение процесса необходимо рассматривать как постоянное действие — достижение некоторого уровня качества, стабилизация или закрепление этого уровня и далее опять восхождение на новый уровень качества.

Выполнение каждого этапа цикла *DAI* осуществляется в соответствии с циклом Шухарта — Деминга *PDCA*, состоящего из четырех шагов: планирование (*P — Plane*), выполнение (*D — Do*), проверка (*C — Check*) и действие (*A — Act*). На первой стадии (шаг *P*) выполнения каждого этапа цикла *DAI* разрабатываются конкретные цели и планы действий. На следующей стадии (шаг *D*) данного этапа реализуется то, что было запланировано. Далее, на третьей стадии (шаг *C*) реализуемого этапа оцениваются правильность и эффективность действий, осуществляется сопоставление полученных результатов с предполагаемыми. На последней, четвертой стадии (шаг *A*) рассматриваемого этапа цикла *DAI* предпринимаются действия для закрепления достигнутого результата.

Контрольные задания и вопросы:

1. Назовите фамилии ученых, которые внесли большой вклад в становление и развитие статистических методов контроля и управления качеством. В чем заключался их вклад?
2. Дайте определение понятию «качество».
3. Назовите группы причин вариации процессов. Охарактеризуйте эти группы.
4. Какая взаимосвязь существует между системой менеджмента качества и статистическими методами?
5. Что такое цикл Шухарта — Деминга? Дайте характеристику каждого этапа этого цикла.

2. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ КОНТРОЛЯ И УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ

2.1. Теория вероятностей и контроль качества

2.1.1. Случайные события

Статистические методы контроля и управления качеством базируются на основных положениях теории вероятностей и математической статистики. С помощью теории вероятностей и математической статистики в науке и технике исследуются случайные события и их закономерности [29].

Случайное событие — это событие, которое при соблюдении определенного комплекса условий может произойти или не произойти, т. е. которое невозможно с уверенностью предсказать, наступит оно или нет. Случайными событиями являются, например, взятие дефектной детали из партии изготовленной продукции или поломка автомобиля во время гарантийного периода. Степень возможности осуществления таких событий характеризуется *вероятностью* события.

Случайное событие можно рассматривать как результат некоторого *эксперимента* со случайными исходами, поставленного специально (взятие детали из партии) или в результате наблюдения за естественно происходящими событиями (поломка автомобиля в гарантийный период).

Предположим, что эксперимент можно повторять в одних и тех же условиях неоднократно. Рассмотрим некоторое событие $A = \{\text{Взятая из партии деталь оказалась дефектной}\}$. Если в серии из N опытов событие A произошло M раз, то отношение $W(A) = M/N$ можно назвать относительной частотой события A .

При небольших значениях N частота одного и того же события может колебаться в достаточно широких пределах. Однако при большом числе опытов эта величина стабилизируется, и ее колебания приближаются к некоторому пределу, который приближенно и характеризует вероятность осуществления рассматриваемого события:

$$P(A) = W(A) = M/N. \quad (2.1)$$

Такое определение вероятности называется статистическим. Математическим основанием этого служит закон больших чисел, сформулированный и доказанный Я. Бернули. Этот предельный закон гласит: вероятность того, что относительная частота некоторого события A отклоняется от вероятности $P(A)$ этого события более чем на произвольную заданную величину $\varepsilon (>0)$, становится сколь угодно малой, если число испытаний бесконечно возрастает.

В общем случае $0 \leq M \leq N$. При $M = 0$ имеем *невозможное* событие: событие, которое при определенных условиях никогда не произойдет. Вероятность такого события равна нулю.

В реальных ситуациях часто имеют место события, вероятность которых близка к нулю, такие события называют *практически* невозможными. Например, если вероятность изготовления дефектной детали составляет 0,0001, т. е. в

среднем будет одна дефектная деталь из десяти тысяч изготовленных, то изготовление дефектной детали — событие маловероятное, или практически невозможное.

При $M = N$ имеем *достоверное* событие, которое обязательно произойдет при заданных условиях. Вероятность такого события равна единице. Если же вероятность некоторого события близка к единице, такое событие называют *практически достоверным*.

Для любого события A вероятность $P(A)$ лежит в пределах от нуля до единицы:

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (2.2)$$

Событие \bar{A} , состоящее в том, что событие A не произойдет, называется *противоположным* событию A .

Суммой событий A и B называется событие $A + B$, состоящее в том, что произойдет или событие A , или событие B , или оба события вместе.

Произведение событий A и B — это событие AB , состоящее в том, что произойдут совместно и событие A , и событие B .

Пусть, например, $A = \{\text{Изделие имеет деформацию}\}$, $B = \{\text{Изделие имеет трещину}\}$, тогда противоположное событие $\bar{A} = \{\text{Изделие не имеет деформацию}\}$, произведение этих событий $AB = \{\text{Изделие имеет деформацию и трещину}\}$, а их сумма $A + B = \{\text{Изделие имеет или деформацию, или трещину}\}$.

События A и B называются *несовместными*, если их одновременное осуществление невозможно; произведение таких событий — пустое множество: $AB = \emptyset$.

Вероятность осуществления события A зависит от соблюдения определенного комплекса условий. Предположим, что произошло некоторое событие B . Это обстоятельство может изменить вероятность события A . Вероятность события A при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью* и обозначается $P(A/B)$.

События A и B называются *независимыми*, если вероятность осуществления одного из них не зависит от того, произошло ли другое событие. Для независимых событий A и B

$$P(A) = P(A/B) = P(A/\bar{B}). \quad (2.3)$$

Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) P(B). \quad (2.4)$$

В общем случае, когда события могут оказаться зависимыми, формула произведения вероятностей имеет вид

$$P(AB) = P(A) P(B/A). \quad (2.5)$$

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (2.6)$$

Для совместных событий формула сложения вероятностей имеет вид

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.7)$$

Из формулы (2.6), учитывая, что события A и \bar{A} являются несовместными, а их сумма ($A + \bar{A}$) — событие достоверное, следует формула для вероятности противоположного события:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (2.8)$$

Условная вероятность события A_i при условии B рассчитывается по формуле Байеса

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B/A_j)}. \quad (2.9)$$

Формулы (2.3)–(2.8) могут быть обобщены для любого числа событий. Например, для n попарно несовместных событий A_i ($i = 1, \dots, n$) формула (2.6) примет вид

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (2.10)$$

Пример 2.1. На токарном автомате изготавливаются валы привода, у каждого из которых контролируется наружный диаметр D , номинальная величина которого $50_{-0,005}^{+0,011}$ мм. Вал, диаметр которого выходит за верхнюю границу допуска, возвращается на доработку, в то время как вал с диаметром ниже нижней границы допуска является неисправимым браком. Пусть событием A является попадание диаметра вала D в пределы поля допуска. Это можно записать так: $A = \{49,995 \leq D \leq 50,011\}$. Пусть событие B состоит в том, что D не меньше номинального размера, т. е. $B = \{D \geq 50,000\}$. События A и B не исключают друг друга.

Объем контролируемой партии составляет 1000 валов, из них 920 валов имеют диаметр в пределах поля допуска. 520 из общего числа валов имеют диаметр, почти равный 50,000 мм, а у 470 валов диаметр располагается между 50,000 и 50,011 мм.

Согласно статистическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{920}{1000} = 0,92;$$

$$P(B) = \frac{520}{1000} = 0,52.$$

Вероятность наступления совместных событий A и $B = \{50,000 \leq D \leq 50,011\}$

$$P(AB) = \frac{470}{1000} = 0,47.$$

Сумма событий A и B в этом случае означает, что диаметр вала превышает нижнюю границу допуска, следовательно, вал является годным, или его по крайней мере можно сделать годным путем дополнительной обработки. Для расчета $P(A + B)$ используется формула 2.7:

$$P(A + B) = 0,92 + 0,52 - 0,47 = 0,97,$$

т. е. вероятность того, что вал соответствует заданному допуску или же имеет больший диаметр и может быть сделан годным, составляет 0,97.

Событие \overline{AB} соответствует получению бракованного изделия, по формуле 2.8 получим вероятность этого события:

$$P(\overline{AB}) = 1 - 0,97 = 0,03,$$

т. е. 3% всех валов представляют собой неисправимый брак.

Пример 2.2. Из партии валов привода путем сортировки удаляются все валы, диаметры которых не попали в заданное поле допуска [49,995; 50,011]. Среди этих последних имеются как валы диаметром более 50,011 мм, которые можно исправить путем дополнительной обработки, так и валы диаметром менее 49,995 мм, не пригодные к дальнейшему использованию. Требуется найти вероятность того, что выбранный из общего числа отсортированных изделий вал будет иметь размер больше верхнего предельного значения, т. е. подлежит доработке. Вероятность этого события нужно установить при дополнительном условии, что диаметр выбранного вала лежит за пределами допуска.

В соответствии с обозначениями, введенными в примере 2.1, $A = \{49,995 \leq D \leq 50,011\}$, тогда событие \overline{A} выражает попадание D за пределы поля допуска: $\overline{A} = \{D < 49,995 \text{ или } D > 50,011\}$. Пусть событие C есть появление вала, который может быть доработан: $C = \{D > 50,011\}$. Найдем вероятность того, что событие C наступит при условии, что произошло событие \overline{A} . Запишем $P(C/\overline{A})$ и назовем эту вероятность условной вероятностью события C .

По данным примера 2.1, среди 1000 валов имеется 80 таких, диаметры которых выходят за пределы поля допуска, из них 30 ($1000 \cdot 3\%$) размеров менее 49,995 мм и 50 размеров выше 50,011 мм, так что

$$P(C/\overline{A}) = \frac{50}{80} = 0,625.$$

Если мы рассмотрим не разбракованную, а совокупную партию, то получим вероятность события C

$$P(C) = \frac{50}{1000} = 0,05.$$

Отсюда следует, что условная вероятность $P(C/\overline{A})$ в нашем примере значительно превосходит безусловную вероятность $P(C)$, потому что в первом случае известно дополнительное условие, состоящее в том, что диаметр вала выходит за пределы поля допуска.

Пример 2.3. В отдел контроля качества поступило два контейнера штампованных деталей. Первый контейнер содержит 50 тыс. деталей, 2% которых являются браком. Второй контейнер содержит 30 тыс. деталей с 3% брака. Детали из обоих контейнеров были перемешаны, после чего контролер берет из общей партии одну штампованную деталь. Какова вероятность того, что взятая деталь будет бракованной?

Для расчета этой вероятности введем следующие обозначения: пусть событие B — выбор негодной детали, событие A_1 — выбор из общей партии дета-

ли, которая находилась в первом контейнере, A_2 — выбор детали, которая находилась во втором контейнере.

События A_1 и A_2 взаимно исключают друг друга.

Выше были указаны следующие вероятности:

$P(B/A_1) = 0,02$ (вероятность выбора негодного изделия из первого контейнера);

$P(B/A_2) = 0,03$ (вероятность выбора негодного изделия из второго контейнера).

На основе классического определения вероятности находим

$$P(A_1) = \frac{50000}{50000 + 30000} = \frac{5}{8};$$

$$P(A_2) = \frac{30000}{50000 + 30000} = \frac{3}{8}.$$

Событие B может появиться совместно либо с событием A_1 , либо с событием A_2 , так что выполняется соотношение

$$B = (A_1B) + (A_2B).$$

Так как события A_1B и A_2B взаимно исключают друг друга, следует

$$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2).$$

Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(B) = \frac{5}{8} \cdot 0,02 + \frac{3}{8} \cdot 0,03 = 0,024 \text{ или } 2,4\%.$$

Пример 2.4. Три станка выпускают одинаковые детали. Дневная выработка первого станка составляет 1000 изделий, второго — 7000 изделий, третьего — 2000 изделий. Детали проверяются с точки зрения одного определенного признака, причем первый станок выпускает 20% деталей надлежащего свойства, второй — 18% и третий — 25%. На складе продукция трех станков смешивается. Какова вероятность выбора из этой суммарной партии детали с определенным свойством?

Для расчета этой вероятности введем следующие обозначения: пусть событие B — выбор детали с исследуемым свойством, событие A_1 — выпуск детали 1-м станком, A_2 — выпуск детали 2-м станком, A_3 — выпуск детали 3-м станком.

События A_1 , A_2 и A_3 взаимно исключают друг друга.

$$P(B/A_1) = 0,20; P(B/A_2) = 0,18; P(B/A_3) = 0,25.$$

На основе классического определения вероятности находим:

$$P(A_1) = \frac{1000}{1000 + 7000 + 2000} = 0,1;$$

$$P(A_2) = \frac{7000}{1000 + 7000 + 2000} = 0,7;$$

$$P(A_3) = \frac{2000}{1000 + 7000 + 2000} = 0,2.$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3).$$

Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(B) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,18 + 0,2 \cdot 0,25 = 0,196 \text{ или } 19,6\%.$$

Пример 2.5. На предприятии имеется три станка одного типа. Один из них дает 40% общей продукции, второй — 20% и третий — 40%. При этом первый станок производит 7% брака, второй — 3%, третий — 5%. Найти вероятность того, что случайно отобранное негодное изделие выпущено первым станком.

Пусть событие A_i означает принадлежность изделия i -му станку ($i = 1, 2, 3$). Тогда

$$P(A_1) = \frac{40}{40 + 20 + 40} = 0,4;$$

$$P(A_2) = \frac{20}{40 + 20 + 40} = 0,2;$$

$$P(A_3) = \frac{40}{40 + 20 + 40} = 0,4.$$

События A_1 , A_2 и A_3 взаимно исключают друг друга.

$$P(B/A_1) = 0,07; P(B/A_2) = 0,03; P(B/A_3) = 0,05.$$

Требуется найти вероятность $P(A_1/B)$. Искомую вероятность найдем по формуле Байеса (2.9):

$$P(A_1/B) = \frac{0,4 \cdot 0,07}{0,4 \cdot 0,07 + 0,2 \cdot 0,03 + 0,4 \cdot 0,05} = 0,52 \text{ или } 52\%.$$

Аналогично вычисляется вероятность того, что негодное изделие изготовлено вторым или третьим станком:

$$P(A_2/B) = 0,11; P(A_3/B) = 0,37.$$

Проверка: $\sum_{i=1}^n P(A_i/B) = 1$, т. е. $0,52 + 0,11 + 0,37 = 1$.

2.1.2. Случайные величины

Под *случайной величиной* понимают числовой результат эксперимента со случайными исходами. Если эксперимент состоит в анализе партии изготовленных деталей, то случайной величиной может быть количество дефектных деталей, или диаметр наудачу взятой детали, или отклонение размера детали от номинального значения. При оценке надежности устройства случайная величина — это количество отказов за некоторый промежуток времени или время, проработанное устройством до первого отказа [29].

Из приведенных примеров видно, что в некоторых случаях множество значений случайной величины может быть конечным или счетным (количество дефектных деталей, количество отказов). Такая случайная величина называется *дискретной*. В других ситуациях случайная величина принимает любое значение из некоторого промежутка. Это *непрерывная* случайная величина.

Обозначим случайную величину заглавной буквой X , а конкретные значения, которые может принимать эта величина, — x . Случайная величина считается заданной, если известен *закон распределения* — соотношение, устанавли-

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru