ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является одним из разделов геометрии, в котором пространственные объекты, представляющие собой совокупность точек, линий и поверхностей, изучаются по их проекционным отображениям. Решение задач способами начертательной геометрии осуществляется графическим путем.

Одной из основных задач начертательной геометрии является создание метода отображения пространственных фигур на плоскость и разработка способов решения позиционных и метрических задач, связанных с этими объектами, по их плоскостным отображениям.

Позиционными называются задачи на определение взаимного расположения фигур. Метрическими называются задачи, направленные на определение метрических характеристик геометрических объектов, а также характеристик их взаимного расположения (расстояний и углов между ними).

Любая метрическая задача на комплексном чертеже может быть решена с помощью двух основных (элементарных) метрических задач:

1. *Первая основная метрическая задача* — на определение натуральной величины отрезка. Один из способов ее решения — метод прямоугольного треугольника.

2. *Вторая основная метрическая задача* — на перпендикулярность прямой и плоскости.

Большинство позиционных и метрических задач решаются на двухплоскостном чертеже (горизонтальная и фронтальная плоскости проекций). И решения задач на перпендикулярность геометрических элементов рассмотрены на двухплоскостном чертеже.

В пособии решение позиционных задач и определение метрических характеристик геометрических объектов сведено в отдельные главы.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА

Всякую линию можно рассматривать как геометрическое место точки, движущейся по некоторому направлению.

Прямую в пространстве можно задать двумя способами:

1) точкой и направлением;

2) двумя точками.

Проекция прямой на плоскость (в общем случае) есть прямая.

Прямые в пространстве могут занимать частное и общее положение.

Положение прямой в пространстве вполне определяется двумя ее проекциями на две взаимно перпендикулярные плоскости. Это правило имеет исключение, когда две проекции искомой прямой лежат на одном перпендикуляре к оси X (см. *задачу 1.3*). В этом случае для определения положения такой прямой в пространстве необходимы три ее проекции.

При решении позиционных и метрических задач вводятся следующие обозначения углов:

α — угол наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций (H);

β — угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций (V);

γ — угол наклона прямой к профильной плоскости проекций (W).

Чтобы показать на чертеже натуральную величину, будем использовать следующее изображение .

1.1. Прямые частного положения

Прямыми частного положения называются прямые, параллельные или перпендикулярные одной из плоскостей проекций.

1.1.1. Прямые уровня

Прямые, параллельные одной из плоскостей проекций, *называются прямыми уровня*. На эту плоскость прямые проецируются в натуральную величину.

Горизонталь — прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций.

Фронталь — прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций.

Профильная прямая — прямая, параллельная профильной плоскости проекций.

ЗАДАЧА 1.1. Определить натуральную величину отрезка *AB*, его углы наклона к плоскостям *H, V, W*. Построить точку *C*, принадлежащую заданному отрезку при условии, что длина отрезка *AC* равна *30* мм (*рис. 1*).

Решение:

Выясним, какое положение в пространстве занимает заданный объект.

Так как проекция $A''B''||OX$, делаем вывод, что отрезок *AB* является прямой уровня, а именно — горизонталью. Следовательно, положение проекции отрезка $A'B'$ даст нам возможность без дополнительных построений определить натуральную длину объекта и его углы β и γ, а угол α в данном случае равен нулю.

Далее на проекции $A'B'$, так как это натуральная величина отрезка, от точки A' откладываем расстояние 30 мм и определяем горизонтальную проекцию точки *C*, затем по линиям связи — фронтальную и профильную проекции точки.

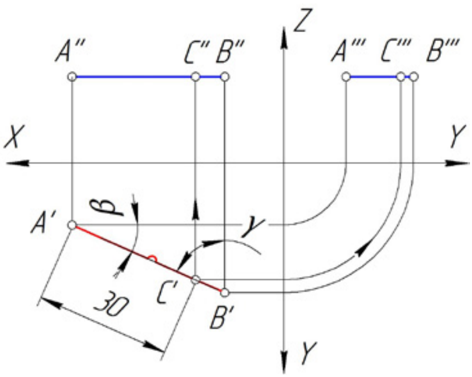


Рис. 1

ЗАДАЧА 1.2. Определить натуральную величину отрезка *EF*, его углы наклона к плоскостям *H, V, W*. Построить точку *D*, принадлежащую заданному отрезку при условии, что длина отрезка *ED* равна *25* мм (*рис. 2*).

Решение:

Выясним, какое положение в пространстве занимает заданный объект.

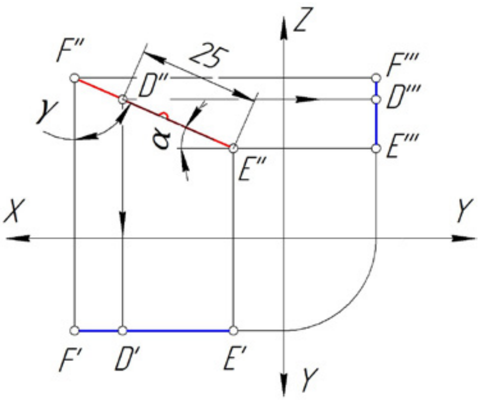


Рис. 2

Так как проекция $E'F'||OX$, делаем вывод, что отрезок EF является прямой уровня, а именно — фронталью. Следовательно, положение проекции отрезка $E''F''$ даст нам возможность без дополнительных построений определить натуральную длину объекта и его углы α и γ, а угол β в данном случае будет равен нулю.

Далее на проекции $E''F''$, так как это натуральная величина, от точки E'' откладываем расстояние *25 мм* и определяем фронтальную проекцию точки D, а затем по линии связи определяем горизонтальную и профильную проекции точки, принадлежащей отрезку EF.

ЗАДАЧА 1.3: Определить натуральную величину отрезка LM, его углы наклона к плоскостям H, V, W. Построить точку N, принадлежащую заданному отрезку при условии, что длина отрезка MN равна *25* мм (*рис. 3*).

Решение:

Выясним, какое положение в пространстве занимает заданный объект.

Так как проекция $L'M'||OY$, а $L''M''||OZ$ (т.е. координата x постоянна), делаем вывод, что отрезок LM является профильной прямой уровня. Следовательно, положение проекции отрезка $L'''M'''$ даст нам возможность определить натуральную длину объекта и его углы наклона к плоскостям α и β, а угол γ равен нулю.

Далее на проекции $L'''M'''$, так как это натуральная величина, от точки M''' откладываем расстояние *25мм* и определяем профильную проекцию точки N, а затем по линиям связи находим горизонтальную и фронтальную проекцию точки.

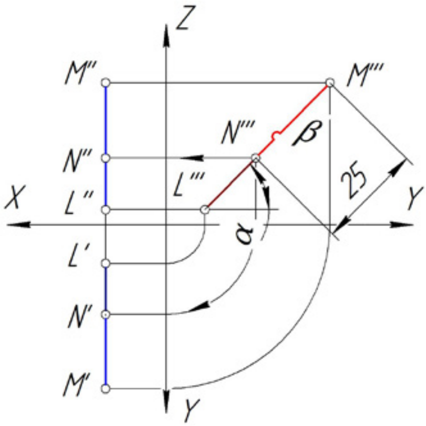


Рис. 3

1.1.2. Проецирующие прямые. Условие видимости на чертеже

Проецирующие прямые — это прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций, на которую они проецируются в точку (собирательное свойство). На две другие плоскости проекций такие прямые проецируются в натуральную величину.

Горизонтально-проецирующая прямая — прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций.

Фронтально-проецирующая прямая — прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций.

Профильно-проецирующая прямая — прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций.

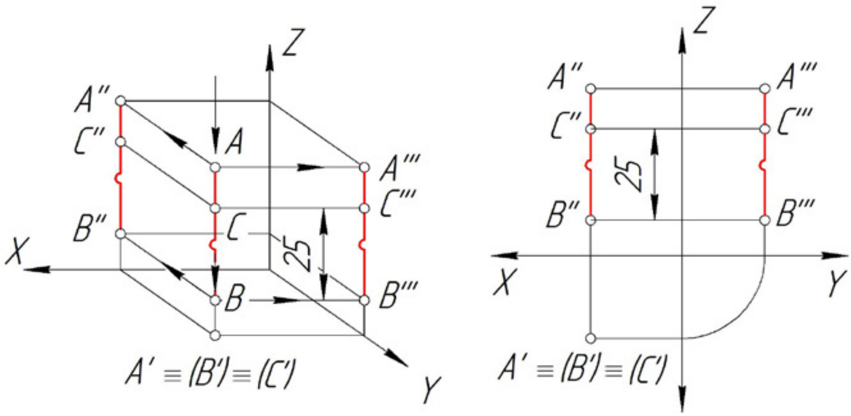
Конкурирующие точки — точки, лежащие на одной проецирующей прямой или одной линии связи. По этим точкам определяется видимость объектов.

Вопрос о видимости решают путем сравнения координат X, Y или Z точек, лежащих на одном проецирующем луче: из двух конкурирующих точек на горизонтальной плоскости проекций видна та точка, координата Z которой больше, на фронтальной плоскости проекций видна точка, координата Y которой больше, на профильной плоскости проекций видна точка, координата X которой больше.

Для большей наглядности невидимые части предмета вычерчивают штриховыми линиями (либо совсем не вычерчивают), невидимые точки заключают в скобки.

ЗАДАЧА 1.4. Определить натуральную величину отрезка AB, его углы наклона к плоскостям H, V, W. Построить точку C, принадлежащую заданному отрезку и расположенную на расстоянии 25 мм от нижнего конца отрезка (*рис. 4*, *а* и *б*).

Решение:



а *б*

Рис. 4

Выясним, какое положение в пространстве занимает заданный объект.

Так как на горизонтальную плоскость проекций отрезок проецируется в точку, значит, отрезок перпендикулярен этой плоскости. Поэтому делаем вывод, что отрезок AB является проецирующей прямой, а именно — горизонтально-проецирующей. И точки A и B являются конкурирующими. По чертежу определяем, что координата Z точки A больше чем координата Z точки B (точка В расположена ниже точки А). Следовательно, на горизонтальной плоскости проекция точки A будет видимой, а проекция точки B — невидимой (заключена в скобки).

Положение проекций $A''B''$ и $A'''B'''$ даст нам возможность без дополнительных построений определить натуральную длину объекта. Угол $\alpha=90^0$, а углы β и γ в данном случае равны нулю.

Далее на проекции $A''B''$ (или $A'''B'''$), так как это натуральная величина отрезка, от проекции нижнего конца отрезка — точки B'' откладываем расстояние *25 мм* и находим фронтальную (или профильную) проекцию точки *C*, затем по линиям связи — две другие проекции. Для горизонтальной проекции C' определяем видимость.

ЗАДАЧА 1.5. Определить натуральную величину отрезка *DE*, его углы наклона к плоскостям *H, V, W*. Построить точку *F*, принадлежащую заданному отрезку и расположенную на расстоянии *25 мм* от ближнего конца отрезка (*рис. 5*, *а, б*).

а

б

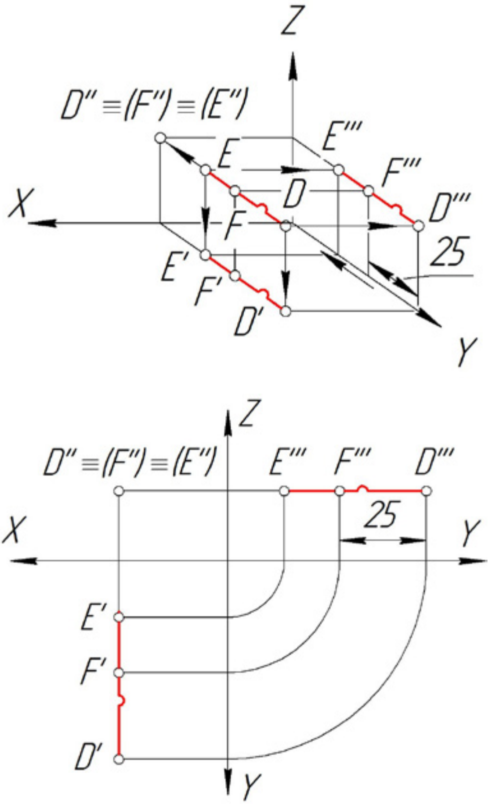


Рис. 5

Решение:

Выясним, какое положение в пространстве занимает заданный объект.

Так как на фронтальную плоскость проекций отрезок проецируется в точку, значит, отрезок перпендикулярен этой плоскости. Поэтому делаем вывод, что отрезок *DE* является проецирующей прямой, а именно — фронтально-проецирующей. Точки *D* и *E* являются конкурирующими. По чертежу определяем, что координата *Y* точки *D* больше чем координата *Y* точки *E* (точка *D* расположена к нам ближе). Следовательно, на фронтальной плоскости проекция точки *D* будет видимой, а точки *E* — невидимой (заключена в скобки).

Положение проекций *D'E'* и *D'''E'''* даст нам возможность без дополнительных построений определить натуральную длину объекта. Угол $\beta=90^0$, а углы α и γ в данном случае равны нулю.

Далее на проекции *D'E' (*или *D'''E'''),* так как это натуральная величина отрезка, от проекции ближнего конца отрезка — точки *D'''* откладываем расстояние 25 мм и находим горизонтальную (или профильную) проекцию точки *F,* затем по линиям связи — две другие проекции. Для фронтальной проекции *F''* определяем видимость.

ЗАДАЧА 1.6. Определить натуральную величину отрезка *LM*, его углы наклона к плоскостям *H, V, W*. Построить точку *N*, принадлежащую заданному отрезку и расположенную на расстоянии 25 мм от наиболее удаленного от плоскости *W* конца отрезка (*рис. 6*, *а, б*).

Решение:

Выясним, какое положение в пространстве занимает заданный объект.

Так как на профильную плоскость проекций отрезок проецируется в точку, значит, отрезок перпендикулярен этой плоскости. Поэтому делаем вывод, что отрезок *LM* является проецирующей прямой, а именно — профильно-проецирующей. Точки *L* и *M* являются конкурирующими. По чертежу определяем, что координата *X* точки *M* больше чем координата *X* точки *L* (точка *M* расположена дальше от плоскости *W*). Следовательно, на профильной плоскости проекция точки *M* будет видимой, а точки *L* — невидимой (заключена в скобки).

Положение проекций *L'M'* и *L''M''* даст нам возможность без дополнительных построений определить натуральную длину объекта. Угол $\gamma=90^0$, а углы α и β в данном случае равны нулю.

Далее на проекции *L'M'* (или *L''M''*), так как это натуральная величина отрезка, от проекции наиболее удаленного от плоскости *W* конца отрезка — точки *M'* откладываем расстояние *25 мм* и находим горизонтальную (или фронтальную) проекцию точки *N*, затем по линиям связи — две другие проекции. Для профильной проекции *N'''* определяем видимость.

а

б

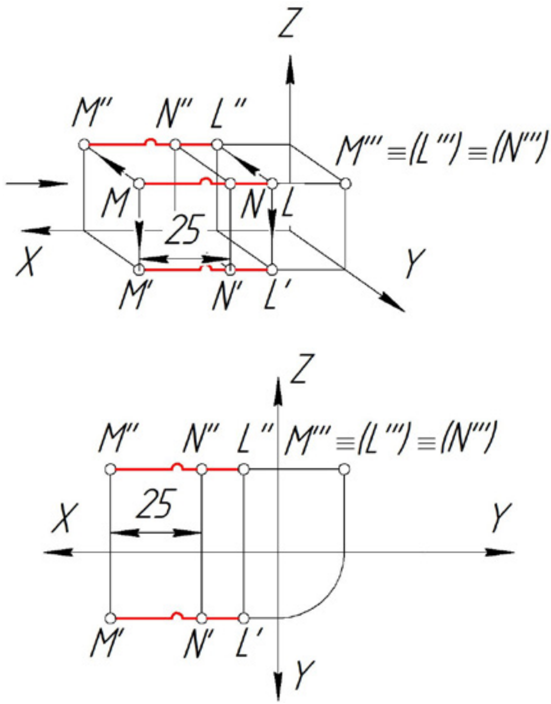


Рис. 6

1.2. Прямые общего положения

Прямыми общего положения называются прямые, не параллельные и не перпендикулярные ни одной из плоскостей проекций.

Отрезок прямой общего положения проецируется на плоскости проекций с искажением. Метрические характеристики отрезка без применения методов преобразования чертежа [2] можно определить по правилу прямоугольного треугольника.

Рассмотрим наглядно, как определить натуральную величину отрезка прямой и ее углы наклона к плоскостям проекций (*рис. 7*).

Здесь:

AB — отрезок прямой в пространстве;

τ — одна из основных плоскостей проекций: H, V, W;

$A_\tau B_\tau$ — проекция отрезка прямой на соответствующую плоскость проекций: $A'B'$, $A''B''$ или $A'''B'''$;

l — расстояние от точки в пространстве до соответствующей плоскости проекций: Z, Y или X;

φ — угол наклона прямой к плоскости проекций: α, β или γ.

Спроецируем отрезок AB на плоскость τ.

Параллельным переносом поднимаем проекцию $A_\tau B_\tau$ до нижнего конца отрезка (точка B), получаем прямоугольный треугольник. В этом треугольнике $A_\tau B_\tau$ — один из катетов, разность концов отрезка $\Delta l = l_A - l_B$ — второй катет, а натуральная величина — гипотенуза.

Угол φ наклона отрезка прямой к плоскости проекций τ определяем между натуральной величиной и проекцией отрезка на эту плоскость.

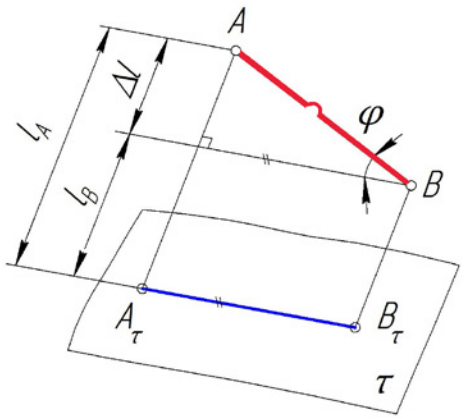


Рис. 7

Весь теоретический материал определения натуральной величины отрезка и углов наклона прямой к плоскостям проекций можно объединить (*рис. 8*).

Таким образом, ***натуральная величина отрезка прямой*** — это гипотенуза прямоугольного треугольника, один из катетов которого является проекцией отрезка на какую-либо плоскость проекций, а второй катет — разность расстояний от концов отрезка до той плоскости проекций, на которой взят первый катет. ***Угол наклона*** *отрезка прямой* к плоскости проекций определяется из прямоугольного треугольника как угол между натуральной величиной отрезка и проекцией отрезка на эту плоскость.

τ	H	V	W
$A_\tau B_\tau$	$A'B'$	$A''B''$	$A''B''$
l	Z	Y	X
Δl	ΔZ	ΔY	ΔX
φ	α	β	γ

Рис. 8

ЗАДАЧА 2.1. Определить натуральную величину отрезка *AB* (*рис. 9*), его углы наклона к плоскостям *H, V, W*. Построить точку *K*, принадлежащую заданному отрезку и отстоящую от его нижнего конца на 20 мм.

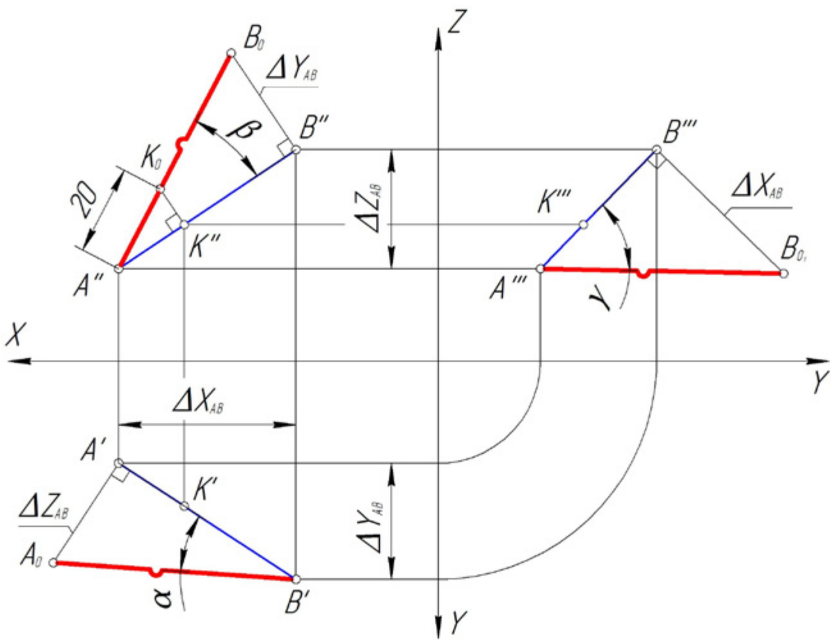


Рис. 9

Решение:

На первом этапе при решении задач, связанных с определением метрических характеристик отрезка (линейные либо угловые размеры), необходимо выяснить, какое положение в пространстве занимает заданный объект (общее или частное).

В настоящей задаче отрезок занимает общее положение (то есть не параллелен и не перпендикулярен ни одной из плоскостей проекций), следовательно, на все три эти плоскости он проецируется с искажением. Поэтому натуральную величину заданного отрезка определяем по правилу прямоугольного треугольника.

Для нахождения только натуральной величины отрезка построение можно производить на любой из плоскостей проекций (решение от этого не изменится). Но, так как кроме натуральной величины необходимо определить углы наклона к плоскостям *H, V, W*, то натуральную величину заданного отрезка надо будет находить три раза, потому что угол наклона прямой к плоскости проекции по правилу прямоугольного треугольника определяется между натуральной величиной и соответствующей проекцией (*рис. 7* и *8*).

Только после определения натуральной величины отрезка можно найти положение точки *K*. Для этого сначала выясним, какой конец отрезка расположен ниже. Высоту точки определяет координата z. По чертежу видно, что координата z точки *A* меньше чем координата z точки *B*, следовательно, точка *A* расположена ниже точки *B*. Поэтому заданное расстояние 20 мм откладываем на натуральной величине от точки *A* (на фронтальной плоскости проекций), получаем точку K_0. Из точки K_0 опускаем перпендикуляр на фронтальную проекцию отрезка *AB* и находим проекцию K'', затем по линиям связи определяем K', K'''.

2. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Теорема о проецировании прямого угла

Решение задач на перпендикулярность геометрических элементов основано на *теореме о проецировании прямого угла:* прямой угол спроецируется в натуральную величину на какую-либо плоскость проекций, если одна сторона прямого угла будет параллельной этой плоскости проекций, а вторая — не будет ей перпендикулярна [6].

2.1. Перпендикулярность прямой и плоскости

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

Построение перпендикуляра к плоскости и восстановление перпендикуляра из плоскости называется *прямой задачей*, а построение плоскости, перпендикулярной к прямой — *обратной задачей*.

2.1.1. Построение прямой, перпендикулярной плоскости

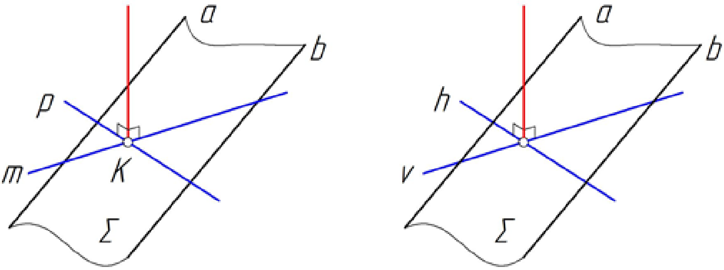
ЗАДАЧА 2.1. Через точку K, принадлежащую плоскости Σ, построить прямую n, перпендикулярную этой плоскости. Плоскость Σ задана параллельными прямыми a и b. Анализ решения задачи проведём на пространственном чертеже (*рис. 10*, *а*).

Решение:

Чтобы провести прямую $n \perp \Sigma(a||b)$, нужно в этой плоскости взять две пересекающиеся прямые (на рисунке 10, *а* это $p \cap m = K$). Прямую n нужно строить перпендикулярно одновременно двум этим прямым.

Однако, если прямые p и m не будут прямыми общего положения, то прямой угол к ним ни на одной плоскости проекций не спроецируется в натуральную величину.

Согласно теореме о проецировании прямого угла в качестве прямых p и m выгодно взять горизонталь h и фронталь v (*рис. 10*, *б*).

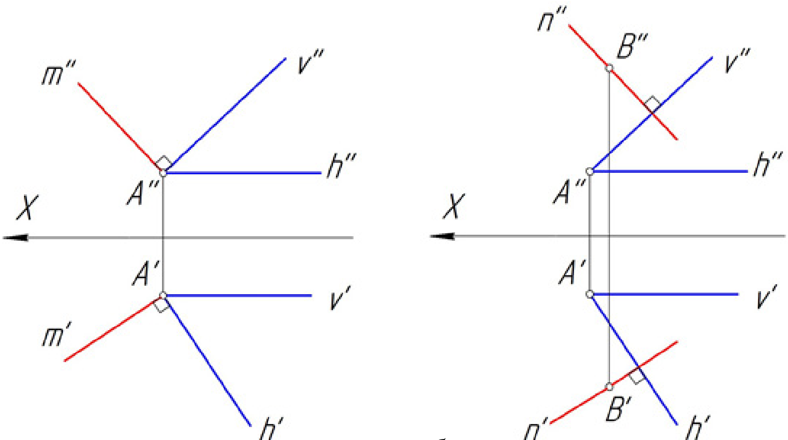


а *б*

Рис. 10

Тогда прямой угол между прямой *n* и горизонталью *h* проецируется в натуральную величину на *H* (горизонтальную плоскость проекций), а прямой угол между прямой *n* и фронталью *v* — на *V* (фронтальную плоскость проекций).

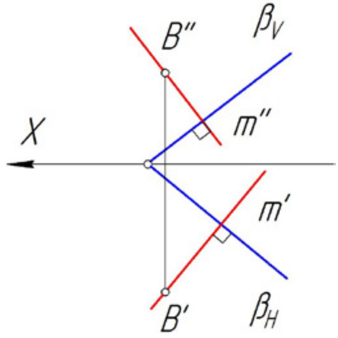
Проекции прямой, перпендикулярной к плоскости, на комплексном чертеже перпендикулярны к соответствующим проекциям линий уровня плоскости. При построении *прямой линии, перпендикулярной плоскости*, ее горизонтальная проекция должна быть перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а ее фронтальная проекция — фронтальной проекции фронтали. Это правило применяется и в случае, когда точка принадлежит



а *б*

$A \in m \perp \Sigma (h \cap v = A)$ $B \in n \perp \Sigma (h \cap v = A)$

Рис. 11



$B \in m \perp \Sigma(\beta_H, \beta_V)$

Рис. 12

плоскости (*рис. 11, а*), и когда не принадлежит (*рис. 11, б*). При этом плоскость может быть задана как пересекающимися горизонталью и фронталью (*рис. 11, а, б*), так и следами (*рис. 12*).

ЗАДАЧА 2.2. Построить прямую *n* перпендикулярную плоскости *Σ*. Плоскость *Σ* задана параллельными прямыми *a* и *b*. Точка *K*, заданная фронтальной проекцией *K″*, принадлежит этой плоскости (*рис. 13*, *а*).

Решение:

Для построения прямой *n*, перпендикулярной плоскости, необходимо перезадать эту плоскость горизонталью и фронталью.

Построения начинаем с горизонтали (*рис. 13*, *б*). Через фронтальную проекцию точки *K″* параллельно оси *X* проводим фронтальную проекцию горизонтали *h″*, находим точки пересечения ее с проекциями прямых (*1″* и *2″*). Через точки *1′* и *2′* строим горизонтальную проекцию горизонтали *h′*, а на ней с помощью линии связи — проекцию точки *K′*. Через точку *K′* проводим $n' \perp h'$.

Аналогично находим *n″* (рисунок 13, *в*). Через горизонтальную проекцию точки *K′* проводим параллельно оси *X* горизонтальную проекцию фронтали *v′*, находим точки пересечения ее с проекциями прямых *a* и *b* (*3′* и *4′*). Через точки *3″* и *4″* строим фронтальную проекцию фронтали *v″*. Через точку *K″* проводим $n'' \perp v''$.

Полностью решение задачи представлено *на рис. 13*, *г*. Видимость прямой *n* при построениях не учитывалась.

Алгоритмическая запись решения:

1. $h \subset \Sigma,\ v \subset \Sigma,\ h \cap v = K$.
2. $K \in n \Rightarrow K' \in n',\ K'' \in n''$.
3. $n \perp h \Rightarrow n' \perp h'$;
4. $n \perp v \Rightarrow n'' \perp v''$.

Итак, чтобы задать на комплексном чертеже прямую *n*, перпендикулярную данной плоскости *Σ*, достаточно построить проекции прямой *n′* и *n″*, расположив их в любом месте чертежа так, чтобы $n' \perp h'$, $n'' \perp v''$, где *h* и *v* — горизонталь и фронталь плоскости.

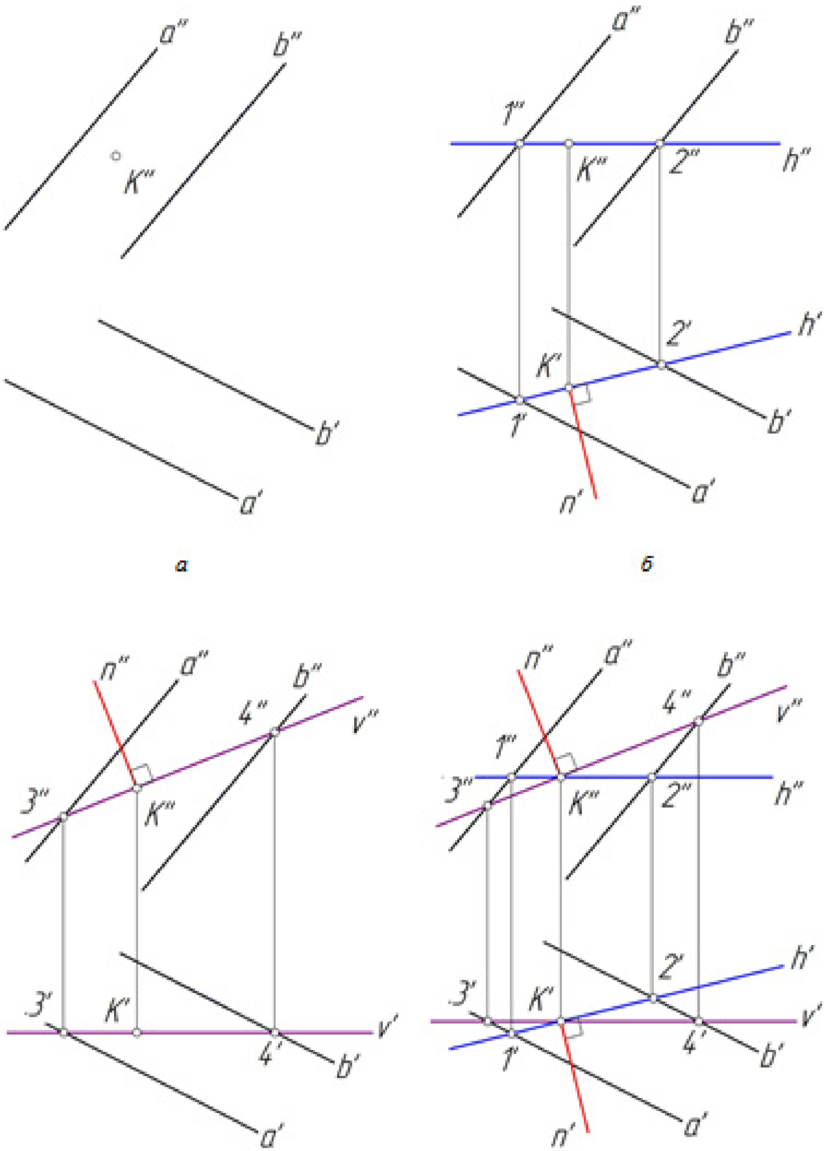
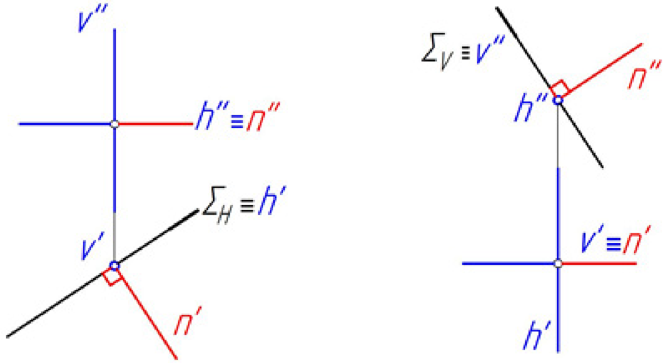


Рис. 13

Если плоскость Σ занимает проецирующее положение, то прямая, перпендикулярная ей, является линией уровня (рис. 14, *а, б*).

Чтобы лучше понять данное утверждение, нужно вспомнить, какие прямые являются линиями уровня в проецирующих плоскостях.



а *б*

Рис. 14

Если Σ — горизонтально проецирующая плоскость (*рис. 14*, *а*):
$\Sigma\perp H \Rightarrow h' = \Sigma_H,\ v\perp H,$
$n\perp h \Rightarrow n'\perp h';\ n\perp v \Rightarrow n''\perp v'';\ \Rightarrow n$ — горизонталь.
Если Σ — фронтально проецирующая плоскость (*рис. 14*, *б*):
$\Sigma\perp V \Rightarrow v''=\Sigma_V,\ h\perp V,$
$n\perp h \Rightarrow n'\perp h';\ n\perp v \Rightarrow n'\perp v'';\ \Rightarrow n$ — фронталь.

2.1.2. Построение плоскости, перпендикулярной прямой

Чтобы задать на чертеже плоскость, перпендикулярную данной прямой n, достаточно задать проекции горизонтали и фронтали этой плоскости так, чтобы $v''\perp n''$, а $h'\perp n'$. При этом, очевидно, должно выполняться условие $h\cap v$ (*рис. 15*).

Если прямая n является прямой уровня, то плоскость, перпендикулярная ей, занимает *проецирующее положение* и может быть задана своей главной проекцией — горизонтальным следом Σ_H (рис. 16, *а*).или фронтальным следом Σ_V (*рис. 16*, *б*).

Если прямая n — горизонталь (рисунок 16, *а*), то плоскость Σ, перпендикулярная ей, является горизонтально проецирующей (Σ_H). Если прямая n — фронталь (рис. 16, *б*), то плоскость Σ, перпендикулярная ей, является фронтально проецирующей (Σ_V).

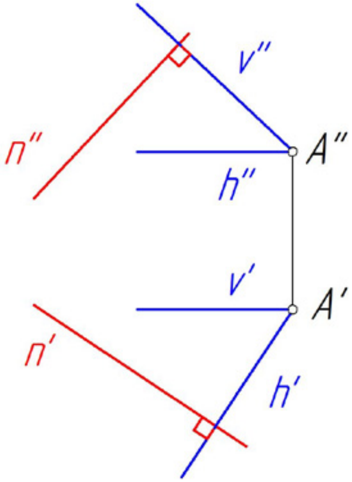
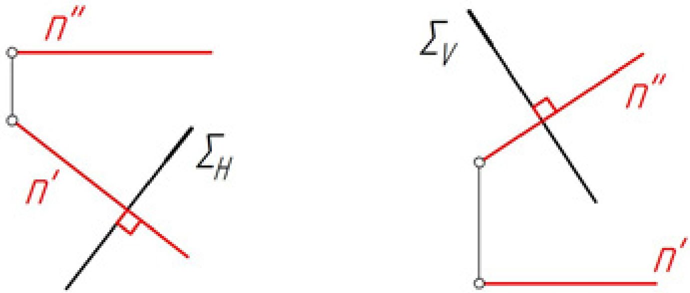


Рис. 15

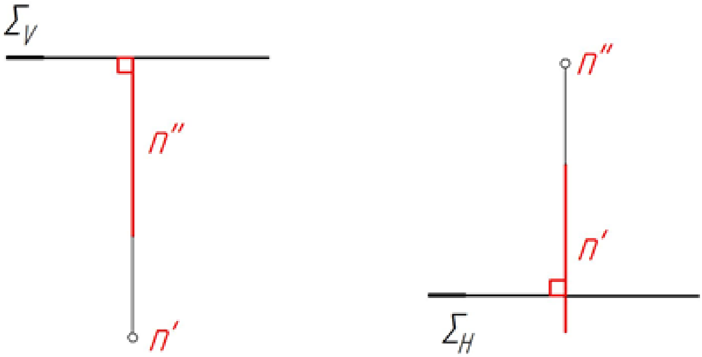


а *б*

Рис. 16

Если прямая *n* занимает проецирующее положение, то плоскость, перпендикулярная ей, *является плоскостью уровня* (рис. 17, *а, б*).

Если прямая *n* — горизонтально проецирующая (*рис. 17*, *а*), то $\Sigma \perp n$ — горизонтальная плоскость уровня и задается фронтальным следом Σ_V. Если прямая *n* — фронтально проецирующая (*рис. 17*, *б*), то $\Sigma \perp n$ — фронтальная плоскость уровня и задается горизонтальным следом Σ_H.



а *б*

Рис. 17

2.2. Перпендикулярность плоскостей

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой. Построение таких плоскостей может быть выполнено двумя способами:

1. плоскость проводится через перпендикуляр к другой плоскости;
2. плоскость проводится перпендикулярно прямой, принадлежащей другой плоскости.

Таким образом, построение взаимно перпендикулярных плоскостей общего положения сводится к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

ЗАДАЧА 2.3.Через точку K, взятую вне плоскости $\alpha(\Delta ABC)$, провести плоскость $\Sigma(m\cap n=K)\perp\alpha$ (рисунок 18, *а*).

Решение:

Построение выполняем первым способом. Одна из прямых m или n, задающих плоскость Σ, должна быть перпендикулярна плоскости α. Пусть это будет n.

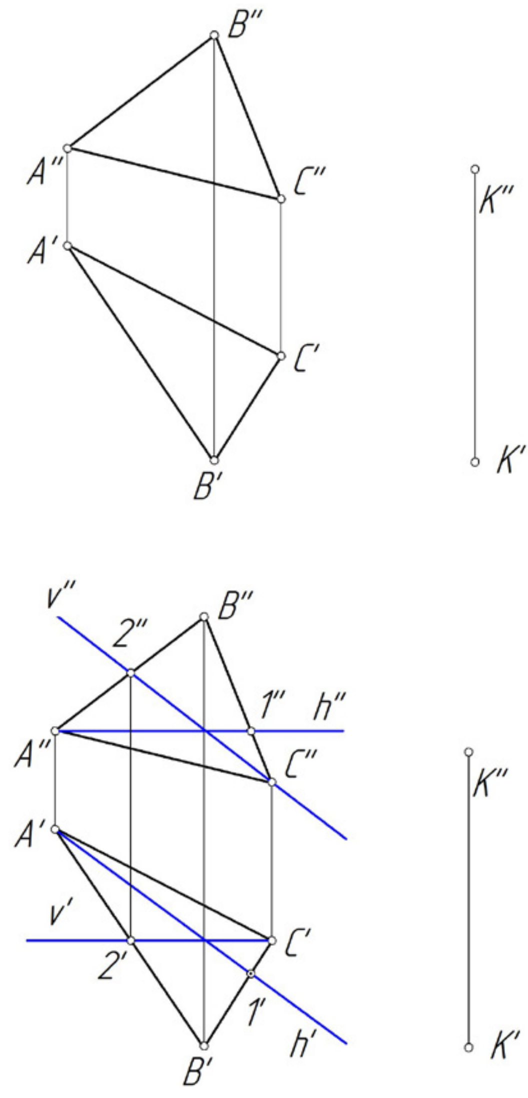
1. В плоскости α строим горизонталь h и фронталь v (рис. 18, *б*).

2. Через точку K' проводим $n'\perp h'$, а через K'' проводим $n''\perp v''$. Следовательно, $n\perp\alpha$. Прямую m, проходящую через точку K, задаём произвольно (*рис. 18*, *в*).

3. Таким образом, $\Sigma(n\cap m)\perp\alpha(\Delta ABC)$.

Алгоритмическая запись решения:

1. $h \subset \alpha \Rightarrow h'' \Rightarrow h'$, $v \subset \alpha \Rightarrow v' \Rightarrow v''$;
2. $\Sigma = m \cap n = K$, $n \perp \alpha \Rightarrow n' \perp h'$, $n'' \perp v''$.
3. $\Sigma(n \cap m) \perp \alpha(\Delta ABC)$.



а

б

Рис. 18