ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга основана на нескольких курсах, прочитанных в разные годы в НМУ (Независимый московский университет), Высшей школе экономики и в программе Math in Moscow — совместном проекте НМУ и НИУ ВШЭ.

Разумеется, книга такого объема, как эта, не может заменить подробного курса (в двухтомнике В.А. Зорича «Математический анализ» более 1300 страниц крупного формата). Некоторые традиционные темы (например, интегралы, зависящие от параметра) в книге опущены, для других выбрано максимально краткое изложение. В частности, при исследовании сходимости рядов Тейлора для элементарных функций удалось обойтись без сложных видов остаточного члена с помощью использования аналитичности. Вместо интеграла Римана в одномерном случае используется интеграл, который Ж. Дьедонне в одномерном случае называет «интегралом в смысле Коши»; для начального курса этого хватает, а для более продвинутых разделов анализа все равно понадобится интеграл Лебега, излагать который в начальном курсе неоправданно.

Выражаю благодарность Издательскому дому НИУ ВШЭ за грантовую поддержку в период написания книги, а также рецензентам, и в особенности В.И. Богачеву, за указания на существенные недочеты в первых вариантах рукописи.

1 ГЛАВА

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Из школьного курса вы знаете, что действительные числа — это бесконечные десятичные дроби. Это определение не слишком строгое (точнее говоря, при таком определении трудно определить арифметические действия над действительными числами и проверить их свойства наподобие распределительного закона умножения), но пока что будем руководствоваться им; в дальнейшем мы дадим и строгое определение.

Курс математического анализа начинается с определения предела последовательности.

Определение 1.1.1. Говорят, что число a является пределом последовательности действительных чисел $\{x_n\}$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что при всяком $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Последовательности, имеющие предел, называются *сходящимися*.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $a_n - \varepsilon < x < a_n + \varepsilon$; интервал $(a_n - \varepsilon; a_n + \varepsilon)$ часто называют *ε-окрестностью* числа a. Тогда определение **1.1.1** можно переформулировать еще так, для всякой окрестности числа a существует такое N, что x_n лежит в этой окрестности при всех $n > N$.

Пример 1.1.2. Пусть $x_n = 1/(2n+3)$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ выберем натуральное $N > 1/\varepsilon$. Тогда при $n > N$ имеем

$$0 < x_n = \frac{1}{2n+3} \leqslant \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon;$$

и подавно $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$.

Первое свойство предела последовательности состоит в том, что если он существует, то он единственен.

Предложение 1.1.3. *Пусть* $\{x_n\}$ *— последовательность действительных чисел; если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$*, то* $a = b$.

Доказательство. Рассуждаем от противного: пусть $a \neq b$. Тогда при достаточно малых ε оказывается, что ε-окрестности точек a и b не пересекаются (например, годится $\varepsilon = |a-b|/2$ — сделайте чертеж!). Зафиксируем такое ε; тогда ввиду условия существуют такие натуральные N_1 и N_2, что при всяком $n > N_1$ число x_n лежит в ε-окрестности точки a и всяком $n > N_2$ число x_n лежит в ε-окрестности точки b; если теперь взять какое-нибудь $n > \max(N_1, N_2)$, то окажется, что x_n лежит одновременно в ε-окрестности точки a и в ε-окрестности точки b, а это невозможно ввиду нашего выбора ε. □

На практике пределы редко находят прямо по определению, как в нашем примере **1.1.2**; обычно сводят более сложные пределы к более простым с помощью правил, известных под общим названием «арифметики пределов». Вот первое из этих правил.

Предложение 1.1.4. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$*, то существует и предел последовательности* $\{x_n + y_n\}$*, причем* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

Доказательство. Пусть нам дано $\varepsilon > 0$. Тогда ввиду определения предела существуют такие натуральные числа N_1 и N_2, что $|x_n - a| < \varepsilon/2$, как только $n > N_1$, и $|x_n - b| < \varepsilon/2$, как только $n > N_2$. Положим теперь $N = \max(N_1, N_2)$. Если теперь $n > N$, то

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqslant \\ \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$. □

Коротко говоря, предел суммы равен сумме пределов. Два следующих утверждения про арифметику пределов доказываются аналогично предложению **1.1.4**; их доказательство предоставляется читателю.

Предложение 1.1.5. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$*, то существует и предел последовательности* $\{x_n - y_n\}$*, причем* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* k *— произвольное действительное число, то существует и предел последовательности* $\{kx_n\}$*, причем* $\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n) = ka$.

Аналогичное утверждение верно и для предела произведения, но доказывается оно немного сложнее. Для начала определим одно понятие, которое пригодится нам и в дальнейшем.

Определение 1.1.6. Последовательность действительных числе $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если выполнено одно из двух следующих равносильных условий:

— существует такое $M > 0$, что $|x_n| \leqslant M$ при всех n;

— существует такой отрезок $[P; Q]$, что все x_n лежат на этом отрезке.

Лемма 1.1.7. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Взяв в определении предела $\varepsilon = 1$ (вместо единицы здесь можно было бы взять и любое другое положительное число), получаем, что существует такое натуральное N, что при всяком $n > N$ число x_n лежит на отрезке $[a-1; a+1]$. Поскольку членов последовательности x_n, где $n < N$, конечное число, получаем, что существует отрезок $[P; Q]$, содержащий $[a-1; a+1]$ и все x_n, где $n < N$. Ясно, что $[P; Q]$ содержит вообще все x_n, а это и означает, что последовательность ограничена. $\square$

Вооружившись этой леммой, мы можем доказать, что предел произведения равен произведению пределов.

Предложение 1.1.8. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то существует и предел последовательности* $\{x_n y_n\}$, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$.

Доказательство. По лемме **1.1.7** последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены; тем самым существует такое число $M > 0$, что $|x_n| \leqslant M$ и $|y_n| \leqslant M$ при всех n, а также $|a| \leqslant M$, $|b| \leqslant M$. Заметим, что

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| = |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n| \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b| \leqslant M \cdot |y_n - b| + M \cdot |x_n - a|.$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$; ввиду условия существует такое N_1, что $|x_n - a| < \varepsilon/2M$ при $n > N_1$, а также такое N_2, что $|y_n - a| < \varepsilon/2M$ при $n > N_2$. Если положить $N = \max(N_1, N_2)$, то при $n > N$ имеем

$$|x_n y_n - ab| \leqslant M \cdot |y_n - b| + M \cdot |x_n - a| < M \cdot (\varepsilon/2M) + M \cdot (\varepsilon/2M) = \varepsilon;$$

и все доказано. $\square$

Утверждение про предел частного также верно, но требует некоторой аккуратности в формулировке.

Предложение 1.1.9. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *причем* $b \neq 0$, *то существует и предел последовательности* $\{x_n/y_n\}$, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n/y_n) = a/b$.

Доказательство. Поскольку $x_n/y_n = x_n(1/y_n)$, ввиду предложения **1.1.8** достаточно доказать следующее:

$$\text{если } \lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0, \text{ то } \lim_{n\to\infty}(1/y_n) = 1/b.$$

Для доказательства положим в определении предела $\varepsilon = |b|/2 > 0$; тогда существует такое натуральное N_1, что при $n > N_1$ имеем

$$|y_n - b| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow |y_n| \geqslant \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow |1/y_n| \leqslant \frac{2}{|b|}.$$

Кроме того, ввиду леммы **1.1.7** существует такое $M > 0$, что $|y_n| \leqslant M$ при всех n. Следовательно, при $n > N_1$ имеем

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} = \frac{1}{|y_n|} \cdot \frac{1}{|b|}|y_n - b| \leqslant \frac{2}{|b|}\frac{1}{|b|}|y_n - b| = \frac{2}{|b|^2}|y_n - b|.$$

Теперь для данного $\varepsilon > 0$ найдем такое натуральное N_2, что $|y_n - b| < (|b|^2/2)\varepsilon$ при $n > N_2$; тогда при $n > \max(N_1, N_2)$ имеем

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| \leqslant \frac{2}{|b|^2}|y_n - b| < \frac{2}{|b|^2}\frac{|b|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Все доказано. □

В формулировке предложения **1.1.9** мы (сознательно) допустили одну небрежность: мы нигде не оговорили, что $y_n \neq 0$ при всех n, так что, формально говоря, нет гарантии, что выражение x_n/y_n определено при всех n. Эта небрежность на самом деле ничему не мешает: из доказательства предложения видно, что $y_n \neq 0$ для всех n, кроме конечного числа, а для оставшегося конечного числа номеров n можно придать выражениям x_n/y_n произвольные значения — на предел это не повлияет. Вообще, ни сходимость последовательности, ни значение ее предела не изменятся, если изменить конечное число ее членов.

Еще одно полезное свойство пределов известно под названием *теоремы о двух милиционерах*.

Предложение 1.1.10. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ — такие последовательности действительных чисел, что $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ при всех n и $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.*

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ существует такое N_1, что x_n лежит на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ при всех $n > N_1$, и существует такое N_2, что y_n лежит на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ при всех $n > N_2$. Если $x \leqslant y \leqslant z$ и при этом x и z лежат на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, то и y лежит на этом же интервале; поэтому при всех $n > \max(N_1, N_2)$ точка y_n лежит на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, что и требовалось. □

В упражнениях вы найдете еще некоторое количество элементарных свойств пределов; кроме того, в процессе решения этих упражнений вы самостоятельно определите понятие «последовательность стремится к бесконечности». Всеми этими свойствами и понятиями мы в дальнейшем будем свободно пользоваться.

В различных ситуациях бывает необходимо установить существование предела последовательности a priori, не вычисляя предела в явном виде. Сформулируем один результат в этом направлении.

Определение 1.1.11. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонно возрастающей*, если $x_m \leqslant x_n$ всякий раз, когда $m < n$, и *монотонно убывающей*, если $x_m \geqslant x_n$ всякий раз, когда $m < n$.

Определение 1.1.12. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что $x_n \leqslant M$ для всех n.

Читателю предлагается самостоятельно дать определение *ограниченной снизу* последовательности. Ясно, что последовательность ограничена тогда и только тогда, когда она ограничена и сверху, и снизу.

Теорема 1.1.13. *Всякая монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.*

Строго доказать эту теорему мы сможем только тогда, когда дадим строгое определение действительных чисел, а пока что обоснование, которое мы дадим, будет с неизбежностью нестрогим.

Нестрогое доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — монотонно возрастающая и ограниченная последовательность; тогда имеется такое действительное M, что $x_n \leqslant M$ при всех n. Представим все члены последовательности в виде бесконечных десятичных дробей; последовательность целых частей чисел x_n очевидным образом будет также монотонно возрастающей, и при этом все эти целые части не превосходят M; значит, начиная с какого-то момента все целые части будут одинаковы и будут совпадать с некоторым целым числом m.

Далее, у членов последовательности, имеющих целой частью это число m, рассмотрим первые десятичные знаки после запятой (для определенности будем считать, что в десятичных записях отсутствуют бесконечные «хвосты» девяток). Последовательность этих десятичных знаков также монотонно возрастает, так что начиная с какого-то места все эти знаки будут одинаковы; обозначим соответствующий десятичный знак через m_1. У членов последовательности с целой частью m и первым десятичным знаком m_1 рассмотрим вторые знаки после запятой: они также будут возрастать и тем самым «стабилизируются» на каком-то знаке m_2, — и т.д. Положим теперь

$$x = \overline{m,m_1m_2m_3\ldots}$$

и покажем, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $10^{-N} < \varepsilon$. Пусть номер N таков, что у числа x_N стабилизировались уже целая часть и первые N знаков после запятой. Тогда $0 \leqslant x - x_N \leqslant 10^{-N} < \varepsilon$; если $n > N$, то очевидно $x_N \leqslant x_n \leqslant x$, так что $|x - x_n| \leqslant |x - x_N| < \varepsilon$. Ввиду произвольности выбора ε все доказано. $\square$

1.2. МНОЖЕСТВА

Этот раздел будет посвящен теоретико-множественному языку, которым пользуются все математики.

Множество — «начальное» математическое понятие, ему невозможно дать формальное определение. Множества состоят из *элементов*; если элемент x принадлежит множеству A, то это обозначают так: $x \in A$ (или $A \ni x$). Если же x не принадлежит множеству A, то пишут $x \notin A$.

Два множества A и B равны тогда и только тогда, когда они состоят из тех же элементов (подробнее: всякий элемент множества A является элементом множества B и всякий элемент множества B является элементом множества A).

Множества обычно обозначают буквами. Например, множество действительных чисел обычно обозначают $\mathbb{R}$, множество рациональных чисел обычно обозначают $\mathbb{Q}$, множество целых чисел обычно обозначают $\mathbb{Z}$, множество натуральных чисел обычно обозначают $\mathbb{N}$.

Множества можно задавать, перечислив его элементы (если это возможно). В этом случае перечисляемые элементы принято записывать в фигурных скобках. Например, множество $\{2, 3, -\sqrt{2}\}$ состоит из трех элементов: числа 2, числа 3 и числа $-\sqrt{2}$. Можно не указывать в фигурных скобках полный список, если из контекста понятно, что именно должно входить в множество. Например, $\{1, 2, \ldots, 99\}$ — множество всех натуральных чисел, не превосходящих 99.

Можно также задавать множество как множество элементов, удовлетворяющих определенному условию. Записывается это как в следующем примере:
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} \quad \text{или} \quad \{x \in \mathbb{R} \colon x > 3\}.$$
Это множество всех действительных чисел, бóльших трех; как известно, по-другому оно обозначается $(3; +\infty)$.

Наряду с прочими, рассматривается множество, не содержащее *ни одного элемента*; оно обозначается $\varnothing$ и называется *пустым множеством*[1]. Если всякий элемент множества A является элементом множества B, то это обозначается так: $A \subseteq B$ (или $B \supseteq A$); в этом случае говорят, что A является *подмножеством* в B. Пустое множество является подмножеством любого множества (объяснение: если бы включение $\varnothing \subseteq A$ не выполнялось,

[1] Хотя оно и пустое, но при формальном построении теории множеств все в некотором смысле строится именно из него.

то в пустом множестве нашелся бы хотя бы один элемент, не лежащий в A, однако в пустом множестве никаких элементов нет!)[2].

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, лежащих в A или в B (или в обоих множествах одновременно — такое тоже не запрещается). Обозначение: $A \cup B$.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, лежащих в A и B одновременно. Обозначение: $A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, лежащих в A, но не лежащих в B. Обозначение: $A \setminus B$.

В задачах мы рассмотрим различные свойства операций над множествами.

Еще одна важная операция над множествами, о которой в школе обычно не рассказывают, называется *декартовым произведением* (или *прямым произведением*). По определению прямым произведением множеств X и Y называется множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар[3] $(x; y)$, где $x \in X$, $y \in Y$. Прямое произведение множеств X и Y обозначается $X \times Y$. Например, прямое произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ можно известным способом отождествить с плоскостью.

СРАВНЕНИЕ МОЩНОСТЕЙ

Пусть даны два множества A и B; как выяснить, в каком из них больше элементов? Если множества *конечны* (состоят из конечного числа элементов), то можно эти элементы просто пересчитать. В общем случае пользуются таким определением.

Определение 1.2.1. Говорят, что множества A и B *равномощны*, если между ними существует *биекция* или *взаимно однозначное соответствие*. Это означает, что существует отображение $f\colon A \to B$, обладающее следующими свойствами:

— если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$;

— для всякого элемента $y \in B$ существует (единственный ввиду предыдущего условия) элемент $x \in A$, для которого $f(x) = y$.

Если множества A и B равномощны, мы будем обозначать это обстоятельство так: $A \approx B$. Два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое количество элементов. Вот пример с бесконечными множествами.

---

[2] В некоторых текстах отношение «A является подмножеством в B» записывают как $A \subseteq B$, а в случае, когда A содержится в B и не совпадает с ним, используют обозначение $A \subset B$; иногда, с другой стороны, $A \subset B$ пишут и тогда, когда множествам A и B разрешено совпадать.

[3] По определению упорядоченные пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$.

Пример 1.2.2. Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ равномощны. В самом деле, биекцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ можно организовать следующим образом:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10…
$f(n)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5…

Иными словами,

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{1-n}{2}, & n \text{ нечетно,} \\ \dfrac{n}{2}, & n \text{ четно.} \end{cases}$$

Итак, в отличие от ситуации с конечными множествами, мы видим, что в $\mathbb{Z}$ есть подмножество (а именно, $\mathbb{N}$), не совпадающее с ним, но ему равномощное. На самом деле так бывает с любым бесконечным множеством.

Предложение 1.2.3. *Всякое бесконечное множество X содержит подмножество Y, не совпадающее с X, но равномощное ему.*

Доказательство. Раз X бесконечно, оно непусто. Значит, существует по крайней мере один элемент $x_1 \in X$. Поскольку X бесконечно, $X \neq \{x_1\}$, так что в X существует элемент $x_2 \neq X_1$, и т.д. В итоге получится последовательность $\{x_n\}$, состоящая из попарно различных элементов множества X. Положим теперь $Y = X \setminus \{x_1\}$; тогда биекция $f\colon X \to Y$ строится так:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ отлично от всех } x_n, \\ x_{n+1}, & \text{если } x = x_n \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$ □

Определение 1.2.4. Множество, равномощное множеству $\mathbb{N}$, называется *счетным*.

Если $f\colon \mathbb{N} \to X$ — биекция, то, полагая $x_n = f(n)$, получим такое равносильное определение счетного множества: множество счетно, если все его элементы можно расположить в последовательность $x_1, x_2, \ldots$ — «пересчитать».

Пример **1.2.2** показывает, что множество $\mathbb{Z}$ счетно. Вот менее бросающийся в глаза пример.

Предложение 1.2.5. *Множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетно.*

Доказательство. Для всякой пары натуральных чисел (p, q) имеем $p + q \geqslant 2$, и для каждого натурального числа n количество пар (p, q), для которых $p + q = n$, конечно. Теперь можно пересчитать все пары натуральных чисел (p, q) таким образом: сначала все пары, для которых $p + q = 2$; затем все пары, для которых $p + q = 3$; затем все пары, для которых $p + q = 4$, и т.д. Так как на каждом шаге добавляется только конечное число членов последовательности, наше построение корректно. □

Следствие 1.2.6. *Множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ счетно.*

Доказательство. Если $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ — какая-нибудь биекция (существующая ввиду предложения **1.2.2**) и $n \mapsto (p_n, q_n)$ — биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, то биекцию между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ можно задать по правилу $n \mapsto (f(p_n), f(q_n))$. $\square$

Аналогично показывается, что если $A \approx A'$ и $B \approx B'$, то $A \times B \approx \approx A' \times B'$.

Вот еще одно очень полезное (и на первый взгляд неожиданное) следствие предложения **1.2.5**.

Следствие 1.2.7. *Множество рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Ввиду следствия **1.2.6** существует последовательность пар (u_n, v_n), включающая в себя все пары целых чисел. Будем по ней строить последовательность всех рациональных чисел следующим образом: паре (u_n, v_n) поставим в соответствие число u_n/v_n; если $v_n = 0$ или если число, равное u_n/v_n, нам уже встречалось, то соответствующую пару будем пропускать. В итоге все *положительные* рациональные числа окажутся организованными в последовательность без повторений. Теперь все вообще рациональные числа можно организовать в последовательность так: ноль, первое положительное число, противоположное ему, второе положительное число, противоположное ему и т.д. $\square$

Вот еще один типичный пример счетного множества. Рассмотрим некоторое конечное множество S; будем называть его *алфавитом*. *Словом* над алфавитом S называется произвольная конечная последовательность элементов множества S.

Предложение 1.2.8. *Множество слов над конечным алфавитом S счетно.*

Доказательство. Для каждого натурального k множество слов длины k конечно, так как конечен алфавит. Имея это в виду, можно организовать все конечные слова в последовательность таким образом: сначала перечислить все слова длины 1, затем все слова длины 2 и т.д. $\square$

На самом деле можно показать, что счетно и множество всех конечных слов над счетным алфавитом.

Разобранные примеры могли создать впечатление, что все бесконечные множества счетны. На самом деле это совершенно не так: разные бесконечные множества могут быть бесконечны по-разному. Вот очень важный пример.

Предложение 1.2.9. *Множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц не счетно.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что бесконечные последовательности из нулей и единиц удалось организовать в последовательность $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, в которой встречаются все последовательности, и покажем, что такое допущение ведет к противоречию.

В самом деле, построим последовательность s следующим образом. Первый ее элемент выберем отличным от первого элемента последовательности s_1 (если s_1 начинается с нуля, то s начинается с единицы, если s_1 начинается с единицы, то s начинается с нуля). Второй ее элемент выберем отличным от второго элемента последовательности s_2, третий — отличным от третьего элемента последовательности s_3 и т.д. Построенная таким образом последовательность s с неизбежностью отлична от каждой из s_k: она отлична от s_1 по крайней мере в первом элементе, она отлична от s_2 по крайней мере во втором элементе и т.д. Мы получили искомое противоречие. □

Определение 1.2.10. Множества, равномощные множеству бесконечных последовательностей из нулей и единиц, называются *множествами мощности континуум*.

Предложение 1.2.11. *Интервал* $(0;\ 1)$ *имеет мощность континуум.*

Доказательство. Всякому действительному числу из интервала $(0; 1)$ можно поставить в соответствие бесконечную последовательность десятичных цифр, т.е. элементов множества $\{0, 1, \dots, 9\}$ — знаков после запятой в его десятичном разложении (считаем, что конечная десятичная дробь заканчивается на бесконечный «хвост» из нулей). Обозначим множество всевозможных бесконечных последовательностей десятичных цифр через D, а множество всевозможных бесконечных последовательностей из нулей и единиц — через C.

Покажем сначала, что множество D имеет мощность континуум. Для этого построим биекцию $f\colon D \to C$ следующим образом. Чтобы построить последовательность нулей и единиц $f(\sigma)$, соответствующую последовательности десятичных цифр σ, заменим каждую десятичную цифру на последовательность из нулей и единиц так, как показано в таблице:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	110	1110	11110	111110	1111110	11111110	111111110	111111111

Так как всякая последовательность нулей и единиц начинается либо с нуля, либо с некоторого количества (от 1 до 8) подряд стоящих единиц, за которыми следует нуль, либо, наконец, с девяти подряд стоящих единиц, ясно, по всякой последовательности нулей и единиц можно, притом единственным образом, восстановить соответствующую ей последовательность десятичных цифр, так что f является биекцией. (С такого рода «префиксным кодом» мы еще встретимся.)

Чтобы завершить доказательство, нам достаточно построить биекцию между D и интервалом $(0;1)$. Начнем с леммы.

Лемма 1.2.12. *Если D — несчетное множество и $Z \subset D$ — счетное множество, то $D \setminus Z$ равномощно D.*

Доказательство леммы. Так как объединение счетного и конечного множеств очевидно счетно (можно пересчитать сначала конечное множество, а затем счетное), а множество D несчетно, разность $D \setminus Z$ бесконечна. Следовательно, как и в доказательстве предложения **1.2.3**, можно найти счетное подмножество $Z_1 \subset D \setminus Z$. Так как Z и Z_1 — счетные множества, очевидно, что существует биекция $\varphi\colon Z \cup Z_1 \to Z_1$ (ср. пример **1.2.2**). Теперь биекцию $g\colon D \to D \setminus Z$ можно построить так:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \notin Z \cup Z_1, \\ g(x), & x \in Z \cup Z_1. \end{cases}$$

□

Заметим теперь, что интервал $(0;1)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей десятичных цифр (знаков после запятой в десятичном разложении), не имеющих «хвоста» из девяток и не состоящих из одних нулей. Обозначим множество элементов D, заканчивающихся на хвост из девяток или состоящих из одних нулей, через Z. Тогда Z счетно (в последовательности можно сначала поставить последовательность из одних нулей, затем — последовательность из одних девяток, затем — последовательности с одной не девяткой перед хвостом из девяток ...), а D несчетно (оно, как мы доказали, равномощно C), лемма показывает, что $D \setminus Z$ равномощно D. Поскольку имеется естественная биекция между $D \setminus Z$ и $(0;1)$, все доказано. □

Следствие 1.2.13. *Множество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум.*

Доказательство. Отображение $x \mapsto 2x - 1$ задает биекцию между $(0;1)$ и $(-1;1)$, а отображение

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & x \geqslant 0, \\ -\dfrac{x}{x+1}, & x < 0, \end{cases}$$

задает биекцию между $(-1;1)$ и $\mathbb{R}$. □

1.3. МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Несчетность множества действительных чисел имеет следующее более или менее конкретное приложение.

Определение 1.3.1. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *алгебраическим*, если оно является корнем уравнения некоторой степени $n \in \mathbb{N}$ с рациональными коэффициентами,

$$c_0 a^n + c_1 a^{n-1} + \ldots + c_{n-1} a + c_n = 0. \qquad (1.3.1)$$

Число, не являющееся алгебраическим, называется *трансцендентным*.

Избавляясь от знаменателя, можно считать, что все коэффициенты c_i в левой части (1.3.1) являются целыми числами, что мы и будем далее предполагать.

Теорема 1.3.2. *Трансцендентные числа существуют.*

Мы выведем эту теорему из следующего предложения.

Предложение 1.3.3. *Множество алгебраических чисел счетно.*

Так как множество всех действительных чисел несчетно, то предложение **1.3.3** действительно влечет теорему **1.3.2**.

Доказательство предложения. Покажем, что множество многочленов от одного переменного с целыми коэффициентами (т.е. левых частей уравнения (1.3.1)) счетно. В самом деле, множество многочленов степени 1, т.е. пар коэффициентов (c_0, c_1), равномощно множеству $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и тем самым счетно; множество многочленов степени 2, т.е. троек (c_0, c_1, c_2), равномощно $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ (обычно пишут просто $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$); так как $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$, имеем

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$$

(см. замечание после доказательства следствия **1.2.6**). Продолжая в том же духе, получаем, что для каждого d множество многочленов степени d с целыми коэффициентами счетно.

Стало быть, для каждого d все многочлены степени d с целыми коэффициентами можно расположить в последовательность $f_{d1}, f_{d2}, \ldots, f_{dn}, \ldots$ Расположим все эти последовательности в виде таблицы,

$$\begin{array}{ccccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & \cdots \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & \cdots \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & \cdots \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Теперь пересчитаем многочлены так же, как в доказательстве предложения **1.2.5**: сначала многочлены с суммой индексов 2, затем многочлены с суммой индексов 3 и так далее:

$$f_{11},\ f_{12},\ f_{21},\ f_{31},\ f_{22},\ f_{13},\ f_{41},\ f_{32},\ f_{23},\ f_{14},\ \ldots$$

Далее, многочлен степени d имеет не более d действительных корней. Имея это в виду, расположим все алгебраические числа в последовательность таким образом: сначала выпишем все корни многочлена номер 1, затем все корни многочлена номер 2 (если таковые найдутся) и так далее; если у многочлена действительных корней нет, мы его пропустим; числа, встречавшиеся ранее, также будем опускать (ср. доказательство счетности множества рациональных чисел). Тем самым все алгебраические числа можно организовать в последовательность, и счетность множества алгебраических чисел доказана. $\square$

Теорема **1.3.2** дает доказательство существования трансцендентных чисел, но не дает возможности ни про одно «разумное» число утверждать, что оно является трансцендентным. На самом деле существуют интересные конкретные примеры трансцендентных чисел (в частности, трансцендентны числа e и π), но доказать их трансцендентность уже сложнее.

Следующее предложение в момент своего открытия (конец XIX века) произвело очень сильный эффект.

Предложение 1.3.4. *Множества* $\mathbb{R}$ *и* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *равномощны.*

Это предложение, в частности, означает, что можно установить биекцию между прямой и плоскостью. На первый взгляд такое представляется невероятным: ведь каждому ясно, что прямая одномерна, а плоскость двумерна! На самом деле ничего страшного не происходит: предложение просто показывает, что для формализации интуитивных представлений о размерности одного только понятия мощности множества недостаточно. (Забегая вперед, скажем, что все становится на свои места, если привлечь понятие непрерывности.)

Доказательство. Поскольку $\mathbb{R}$ равномощно множеству C бесконечных последовательностей из нулей и единиц, достаточно показать, что $C\times C$ равномощно C. Биекцию же $f\colon C\times C\to C$ можно построить следующим образом. Если $a=(a_1,a_2,\ldots)$ и $b=(b_1,b_2,\ldots)$ — две последовательности нулей и единиц из C, то можно положить

$$f(a,b)=(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\ldots)$$

(элементы последовательностей a и b перемежаются). $\square$

Введем некоторые обозначения, относящиеся к сравнению множеств по мощности. Если множества A и B равномощны, то будем писать $|A|=|B|$. Если множество A равномощно какому-то подмножеству в B, то будем писать $|A|\leqslant|B|$, а если при этом к тому же A не равномощно B, будем писать $|A|<|B|$ (например, $|\mathbb{N}|<|\mathbb{R}|$). В случае когда $|A|<|B|$, будем говорить, что мощность множества A меньше мощности множества B. (Отдельного понятия «мощность множества A, обозначаемая через $|A|$» мы вводить не будем — для этого пришлось бы углубиться в аксиоматику теории множеств; ограничимся тем, что будем мощности сравнивать.) Вот два основные свойства сравнения мощностей.

Теорема 1.3.5. *Для любых двух множеств A и B обязательно имеем $|A| < |B|$, $|A| = |B|$ или $|B| < |A|$.*

Эту теорему доказать нетрудно, но для доказательства потребуется небольшой экскурс в аксиоматику. Мы ее докажем в разд. **3.1**. А вот следующую теорему мы докажем прямо сейчас.

Теорема 1.3.6 (теорема Кантора–Бернштейна)**.** *Если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.*

Доказательство. Из условия явствует, что существуют биекции $f\colon A \to B_1$ и $g\colon B \to A_1$, где $B_1 \subset B$, $A_1 \subset A$.

Для всякого элемента $x \in A$ назовем его предшественником такой элемент $y \in B$, что $g(y) = x$; так как g — биекция, предшественник единственен, если он существует. Аналогично, для всякого $y \in B$ назовем его предшественником такой элемент $x \in A$, что $f(x) = y$; если он существует, то он единственен. Для каждого элемента $x \in A$ построим максимальную цепочку предшественников: сначала предшественник из B (если он существует), затем предшественник предшественника (если он существует, то это опять элемент из B) и т.д. Аналогично определим максимальную цепочку предшественников для элементов из B. Для всякого целого неотрицательного n обозначим через $A_n \subset A$ множество элементов, у которых максимальная длина цепочки предшественников равна n, а через A_∞ — множество элементов, у которых длина цепочки предшественников бесконечна. Аналогичный смысл имеют обозначения B_n и B_∞.

Заметим теперь, что f отображает A_∞ на B_∞ и (более того) индуцирует биекцию между этими множествами. Аналогично видим, что f биективно отображает A_k на B_{k+1} (для всякого k), а g биективно отображает B_k на A_{k+1}:

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[dr, "f"] & A_1 & A_2 \arrow[dr, "f"] & A_3 & \cdots & A_\infty \arrow[d, "f"] \\
B_0 \arrow[ur, "g"'] & B_1 & B_2 \arrow[ur, "g"'] & B_3 & \cdots & B_\infty
\end{tikzcd}$$

Теперь биекцию $\varphi\colon A \to B$ можно определить так:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_{2k}, \\ g^{-1}(x), & x \in A_{2k-1}, \\ f(x), & x \in A_\infty. \end{cases}$$ □

Теорема Кантора–Бернштейна очень помогает при установлении равномощности различных множеств. Например, из нее сразу следует, что всякое подмножество $X \subset \mathbb{R}^2$, содержащее хотя бы один отрезок, имеет мощность континуум: $|X| \leqslant |C|$, так как X содержится в $\mathbb{R}^2$, и $|C| \leqslant |X|$, так как X содержит отрезок.

Зададимся теперь вопросом, существуют ли мощности, большие, чем континуум. Оказывается, что существуют, да еще как!

Определение 1.3.7. Пусть X — множество; тогда через 2^X обозначается множество всевозможных подмножеств в X.

Происхождение этого обозначения таково: если X — конечное множество из n элементов, то 2^X, как известно, состоит из 2^n элементов. Отметим еще, что существует биекция между множеством $2^{\mathbb{N}}$ и множеством C бесконечных последовательностей из нулей и единиц: каждой последовательности $\{a_n\}$ ставится в соответствие множество

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 1\}.$$

Теорема 1.3.8. *Для любого множества X имеем $|X| < |2^X|$.*

Доказательство. Соотношение $|X| \leqslant |2^X|$ проверяется совсем просто: имеется очевидная биекция между X и множеством одноэлементных подмножеств в X (элементу $a \in X$ ставится в соответствие подмножество $\{a\} \subset X$). Остается показать, что не существует биекции $f\colon X \to 2^X$. Рассуждая от противного, предположим, что такая биекция есть. Тогда рассмотрим множество

$$Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}. \tag{1.3.2}$$

Множество Y является подмножеством в X и тем самым — элементом из 2^X; так как f — биекция, существует такой элемент $x \in X$, что $f(x) = Y$. Теперь рассмотрим два случая.

1. $x \in Y$. Так как $Y = f(x)$, это означает, что $x \in f(x)$, но тогда формула (1.3.2) показывает, что $x \notin Y$ — противоречие.

2. $x \notin Y$. Так как $Y = f(x)$, это означает, что $x \notin f(x)$, но тогда формула (1.3.2) показывает, что $x \in Y$ — противоречие.

Итак, оба a priori возможных случая дают противоречие. Значит, искомой биекции не существует. $\square$

Рассуждение, примененное в доказательстве этой теоремы, называется «диагональным приемом Кантора». Оно является обобщением рассуждения из доказательства предложения **1.2.9**.

Итак, для каждого (в том числе и бесконечного) множества существует множество большей мощности, и эту иерархию бесконечностей можно продолжать весьма далеко. Важно сознавать, что на этом этапе при беспечном обращении с понятием множества могут возникать неприятные парадоксы. Пусть, например, X — множество *вообще всех* множеств. Тогда очевидно, что 2^X обязано совпадать с X, и это явным образом противоречит теореме **1.3.8**. Если «развинтить» доказательство этой теоремы применительно к данному случаю, то получится такое приводящее к парадоксу рассуждение. Пусть

$$Y = \{X \mid X - \text{множество и } X \notin X\}.$$

Тогда и допущение, что $Y \in Y$, и допущение, что $Y \notin Y$, — оба приводят к противоречию.

Когда парадоксы обнаружились (в начале XX века), математиками была проведена большая работа по аксиоматизации и формализации теории множеств. Оставляя рассказ об этой аксиоматизации для других курсов (возможно, основное, что должен знать о ней математик, не специализирующийся по математической логике, — что такая аксиоматизация существует), отметим два момента. Во-первых, за без малого сто лет, прошедших с момента построения аксиоматической теории множеств, никаких противоречий в ней не обнаружилось, зато обнаружилось, что теория множеств — очень полезный и плодотворный язык и основа для математики. Во-вторых, недопустимо произвольно строить «слишком большие» множества. Законна конструкция множества 2^X, законны конструкции объединений (в том числе бесконечных), пересечений, декартовых произведений. Наконец, если какое-то множество уже есть, то законно строить в нем подмножество, состоящее из элементов, заданных каким-то условием. При этом никаких безобразий вроде несуществующего «множества всех множеств» уже не получается.

1.4. НЕКОТОРЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЫ

После экскурса в теорию множеств вернемся к более конкретным задачам.

Предложение 1.4.1. *Если* $|q| < 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Доказательство. Заметим, что в силу самого́ определения предела равенства $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$ равносильны. Поэтому достаточно рассмотреть случай $q = |q| \geqslant 0$. Пусть, стало быть, $0 \leqslant q < 1$. Тогда последовательность $\{q^n\}$ монотонно убывает; так как она очевидно ограничена снизу нулем, из теоремы **1.1.13** (точнее, из ее аналога для убывающих последовательностей) вытекает, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = c$. Теперь имеем

$$c = \lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (q \cdot q^n) = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = qc$$

(мы воспользовались предложением **1.1.5**). Так как $q \neq 1$, из равенства $c = qc$ вытекает, что $c = 0$. $\square$

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru