О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Оценка показателей надежности радиоэлектронных устройств является необходимой процедурой, выполняемой на этапе проектирования аппаратуры. Актуальность задач по расчету надежности объясняется тем, что они дают ответ на вопрос о целесообразности дальнейших затрат, необходимых на отработку технологии и производству радиоэлектронных устройств. Сложность, тяжелые эксплуатационные условия и повышение энергоемкости новых технических систем требует весьма ответственного отношения к расчетам надежности разрабатываемых объектов.

Для успешного изучения основ надежности РЭС необходимы знания теории вероятностей и математической статистики [1,2,3,7]. На этапах научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ осуществляется прогнозирование надежности изделий с использованием значений показателей надежности в их взаимосвязи. С учетом учебного характера пособия в нем излагаются основные положения теорий вероятностей и надежности, но кроме основных определений, большое внимание уделено анализу причин отказов и методам расчета надежности радиоэлектронных средств, в том числе и специального назначения.

Учебное пособие предназначено для бакалавров и магистров обучающихся по направлениям 11.03.03 (11.04.03) «Конструирование и технология электронных средств», 11.03.02 (11.04.02) «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 11.03.01 (11.04.01) «Радиотехника», а также специалистов направления 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы» и является целесообразным при изучении дисциплин «Проектирование высоконадёжных и отказоустойчивых радиотехнических систем», «Конструирование узлов и устройств электронных средств», «Основы проектирования электронных средств», «Основы конструирования электронных средств», «Надежность и эффективность радиотехнических систем», «Конструирование радиоэлектронных средств и комплексов специального назначения», «Теоретические основы конструирования, технологии и надёжности РЭС». Приобретенные навыки и умения при изучении настоящего материала в вопросах надежности изделий радиоэлектроники будут востребованы в полной мере при написании выпускных квалификационных работ. Также данное пособие может оказаться полезным для инженерно-технических работников, занимающихся проектированием, испытанием и эксплуатацией радиоэлектронной аппаратуры, а теоретические разделы могут быть полезны научным работникам и аспирантам, стремящимся к более глубокому изучению теоретических основ надежности.

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Существенная часть явлений и процессов, протекающих в природных и искусственных системах, носит случайный характер. Радиоэлектронное средство, являясь сложной искусственной системой, характеризуется множеством взаимосвязей, как между отдельными электронными компонентами, так и между функциональными узлами, модулями и блоками в целом. Причины возникновения и развития во времени случайных явлений невозможно описать, используя точные физические законы и жесткие функциональные связи. Типичным примером являются различного рода переходные процессы в РЭС, например, при включении (выключении) электропитания или аварийном режиме работы. Изучением вероятностных закономерностей возникновения случайных событий занимается специальный раздел математики – теория вероятностей.

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Возникновение теории вероятностей относится приблизительно к середине XVII в., когда математики попытались провести математический анализ азартных игр. Первоначально её основные понятия не имели строго математического вида и формулировались в наглядных представлениях. При этом учёные того времени – Христиан Гюйгенс, Блез Паскаль, Пьер Ферма и Якоб Бернулли – были убеждены, что на базе массовых случайных событий могут возникать чёткие закономерности. Развитие естественных наук привело к необходимости привлечения более развитого аналитического аппарата [2, 4]. Поэтому теория вероятностей, как и другие разделы математики, сформировалась по причине практической необходимости, поскольку в абстрактной форме отражает закономерности, присущие случайным событиям массового характера. Эти закономерности играют важную роль в физике и технических науках, экономике, социологии, биологии. В связи с широким развитием предприятий, производящих массовую продукцию, результаты теории вероятностей стали использоваться для организации самого процесса производства (методы статистического контроля качества).

Как и другие виды научного знания, теория вероятностей основана на использовании целого ряда определённых понятий и терминов [5]. Рассмотрим наиболее важные из них.

Событие – ключевое понятие теории вероятностей. Под событием понимают любой факт, который может произойти в результате эксперимента (опыта или испытания), предполагающего выполнение определённого комплекса условий. Например, формирование выходного сигнала при включении высокочастотного генератора. Здесь в качестве эксперимента рассматривается подключение генератора к питающей сети, а событием является появление сигнала на выходе прибора.

Случайным (возможным) называется событие, которое в результате эксперимента может появиться, а может и нет. Так, рассмотренный выше генератор при включении может заработать, а может оказаться неисправным. Если случайное событие происходит однократно, то его называют единичным. Следует отметить, что теория вероятностей не может решить задачу предсказания исхода единичного события, поскольку точно учесть и количественно описать влияние всего множества воздействующих факторов на результат однократного испытания принципиально невозможно. Только в случае, когда случайное событие будет наблюдаться многократно при осуществлении постоянного, фиксированного комплекса условий, то тогда его появление будет подчиняться определенным закономерностям.

События могут быть ***совместные*** и ***несовместные***. События называются совместными, если наступление одного из них не исключает наступления другого, иначе такие события считаются несовместными. Например, задаётся амплитуда выходного сигнала источника питания. Формирование на выходе устройства напряжения четыре вольта исключает появление других значений. События «сигнал амплитудой 1 В», «сигнал амплитудой 6 В» и т. п. – несовместные события.

Событие называется ***достоверным***, если в результате эксперимента оно обязательно произойдёт. Событие называется ***невозможным***, если в конкретном опыте оно принципиально не может случиться. Например, событие, заключающееся в том, что из коробки микросхем определённого вида в стандартных корпусах будет взята типовая микросхема, является достоверным, а микросхема в нестандартном корпусе – невозможным.

Несколько событий образуют ***полную группу***, если в результате проведённого опыта обязательно появляется хотя бы одно из них. Следовательно, появление хотя бы одного из событий полной группы сформирует достоверное событие. Однако если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате опыта появляется одно и только одно из этих событий. Такое событие получило название ***противоположного***. Например, если партия изготовленных транзисторов состоит из годных и дефектных, то при извлечении одного изделия оно может оказаться либо годным, либо бракованным.

Часто при решении различных практических задач необходимо оценить реальную возможность наступления какого-либо случайного события. Такая количественная оценка получила название ***вероятности случайного события***. Результат любого, однократно проведённого эксперимента можно представить как элемент из множества попарно несовместных равновозможных, образующих полную группу случайных событий, называемых ***элементарными событиями (исходами)*** ω данного опыта. Множество элементарных исходов получило название ***пространства элементарных событий*** Ω, соответствующих данному эксперименту, при этом сами элементарные исходы с соответствующими индексами называют точками пространства Ω. Математически это можно записать следующим образом:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, .. \omega_k\},$$

где k – число элементарных исходов.

Если эксперимент повторить n раз, то легко убедиться, что количество элементарных исходов будет составлять 2^n. Например, при $n = 3$ пространство элементарных событий составят $k = 2^3 = 8$ элементарных исхода, т. е.

$$\Omega = \{\omega_i\},\ \ i = \overline{1, k}\,.$$

Вероятностью события называется отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов к общему числу всех равновозможных несовместимых элементарных исходов, образующих полную группу, т. е.

$$P(A) = \frac{m}{k},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A; k – число всех возможных элементарных событий в данном опыте.

Например, в коробке лежат шесть однотипных резисторов с различным сопротивлением: 100, 150, 220, 330, 470 и 680 Ом. Рассмотрим эксперимент, в котором человек наугад выбирает из коробки резистор. Элементарных исходов здесь шесть: ω_1 – выбор резистора 100 Ом; ω_2 – выбор резистора 150 Ом; ω_3 – выбор резистора 220 Ом и т.д. Они считаются равновозможными и образуют пространство элементарных событий Ω. Определим вероятность случайного выбора резистора сопротивлением не менее 330 Ом.

Нетрудно определить, что данному случайному событию благоприятствуют три элементарных исхода: ω_4, ω_5 и ω_6. Следовательно, вероятность события составит 3/6 = 0,5.

Относительной частотой события называется отношение числа экспериментов, в которых данное событие появилось, к общему числу фактически произведенных опытов и определяется выражением

$$W(A) = \frac{l}{n},$$

где l – число появлений события A; n – общее число произведённых опытов.

Например, в результате проверки партии ламп накаливания из 1000 ламп дефектными оказались 15. В этом случае относительная частота появления брака составляет 15/1000 = 0,015.

1.2. Алгебра событий

Отождествление события с множеством позволяет выполнять целый ряд операций, подобных операциям над множествами. Рассмотрим основные из них.

1. *Сумма* событий A и B есть событие C, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих по крайней мере одному из событий A или B:

$$A \cup B = C \leftrightarrow A \cup B := \{\omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}.$$

2. *Произведение* событий A и B образует событие C, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и событию A, и событию B:

$$A \cap B = C \leftrightarrow A \cap B := \{\omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}.$$

3. *Разность* событий A и B есть событие C, элементарные события которого принадлежат событию A, но не принадлежат B:

$$A \setminus B = C \leftrightarrow A \setminus B := A \cap \overline{B} = \{\omega \mid \omega \in A \wedge \omega \notin B\}.$$

Другими словами, событие $A \setminus B$ состоит в том, что A произошло, а B – нет.

4. *Симметрическая разность* событий A и B есть такое событие C, куда входят все те элементы события A, которые не входят в событие B, а также те элементы события B, которые не входят в событие A:

$$A \triangle B = C \leftrightarrow A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$$

$$= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \{\omega \mid (\omega \in A \wedge \omega \notin B) \vee (\omega \notin A \wedge \omega \in B)\}.$$

5. *Декартово (прямое) произведение* событий A и B есть событие C, элементарными событиями которого являются всевозможные упорядоченные пары элементов исходных двух событий:

$$A \times B = C \leftrightarrow A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

На рис. 1.1, *а–г* приведены графические интерпретации основных бинарных операций над событиями.

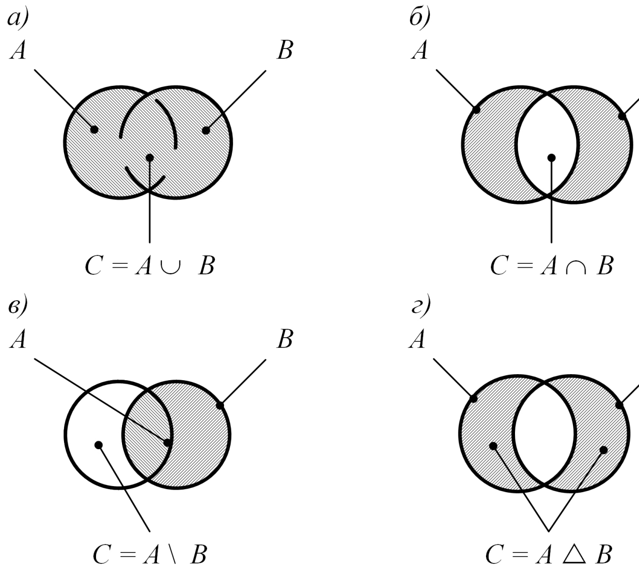

Рис. 1.1. Графические интерпретации операций над событиями:
а – сумма; *б* – произведение; *в* – разность;
г – симметрическая разность

Событие Ω назовем достоверным, а пустое множество $\varnothing$ назовем невозможным событием. Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называется противоположным событию A. Иначе говоря, событие $\overline{A}$ означает, что А не произошло.

События A и B несовместны, если $AB = \varnothing$.

Понятия произведения и суммы событий переносятся на бесконечные последовательности событий. Так, событие $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ состоит из элементарных событий, принадлежащих хотя бы одному из событий A_n, $n = 1, 2, \ldots$ Событие $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ состоит из элементарных событий, принадлежащих каждому событию A_n, $n = 1, 2, \ldots$

Для преобразования событий используется ряд законов, основанных на рассмотренных выше операциях.

1. *Коммутативный*:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A; \quad A \triangle B = B \triangle A.$$

2. *Ассоциативный*:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$
$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

3. *Дистрибутивный*:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \; A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. *Идемпотентности*:

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A;$$
$$A \cup U = U; \quad A \cap U = U;$$
$$A \cup \varnothing = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

5. *Поглощения*:

$$A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

6. *Де Моргана*:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

7. *Инволюции*:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

8. *Исключённого третьего*:

$$A \cup \overline{A} = U; \quad A \cap \overline{A} = \varnothing;$$
$$\overline{\varnothing} = U; \quad \overline{U} = \varnothing.$$

Например, пусть требуется упростить событие $G = E \cup F$, в котором $E = (A \cap B) \setminus C$, а $F = (B \cap C) \setminus A$. Используя законы преобразования событий, получим

$$G = [(A \cap B) \setminus C] \cup [(B \cap C) \setminus A] = [(A \cap B) \cap \overline{C}] \cup [(B \cap C) \cap \overline{A}] =$$
$$= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = B \cap [(A \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap C)] = B \cap (A \triangle C).$$

Рассмотрим произвольное множество элементарных событий Ω, в котором выделим некоторый класс подмножеств Ψ.

Алгеброй событий называется класс подмножеств Ψ множества Ω, если $\Omega \in \Psi$ и если результаты операций над любыми событиями $A \in \Psi$ и $B \in \Psi$ будут также принадлежать множеству Ψ: $A \cap B \in \Psi$; $A \cup B \in \Psi$ и $A \setminus B \in \Psi$. Алгебру событий Ψ называют также ***σ-алгеброй***, или ***борелевской*** алгеброй.

Борелевская алгебра Ψ обладает тем важным свойством, что операции сложения, разности и произведения событий, а также операция дополнения, производимые над множествами событий, не выходят за пределы этой σ-алгебры. σ-алгебру Ψ называют также ***полем событий*** для данного случайного эксперимента. Преимуществом σ-алгебры Ψ является отсутствие необходимости всякий раз обосновывать существование вероятности какого-либо сложного события, поскольку при выполнении условия $A \in \Psi$ определена вероятность $P(A)$ как числовая функция множества Ψ и с помощью теоретико-множественных операций из этих событий всегда будут получаться такие события, которые имеют вполне определенные вероятности.

Таким образом, математической моделью любого случайного явления в современной теории вероятностей служит вероятностное пространство. Соответствие между событиями некоторого множества событий и их вероятностями называют распределением вероятностей. Вероятность $P(A)$ как функция множества $A \in \Psi$ определяет распределение вероятностей на поле событий Ψ.

Приведем наиболее важные соотношения между вероятностями случайных событий, которые можно использовать при решении конкретных задач

1. Если $A \in B$, то

$$P(A) \le P(B).$$

2. При $\forall A \in \Psi$

$$P(A) \le 1.$$

3. Вероятность противоположного события $\overline{A}$ составляет:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A);$$

4. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$P(\varnothing) = 0.$$

5. Если события A и B совместны, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

6. Сумма вероятностей несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу, равна

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Рассмотренные соотношения имеют важный практический смысл. Так, соотношение 3 используется в тех случаях, когда непосредственное вычисление вероятности интересующего нас события A весьма затруднительно и в то же время весьма просто вычисляется вероятность противоположного события $\overline{A}$ (например, вероятность отказа и вероятность безотказной работы объекта).

1.3. Условная вероятность и независимость событий

При изучении реальных случайных явлений иногда возникает или искусственно создается ситуация, когда мы получаем дополнительную информацию о возможных исходах эксперимента [10]. Например, в ходе анализа возможных отказов РЭС было высказано предположение, что в результате скачка напряжения в сети (событие B) может случиться событие A – отказ радиоэлектронного блока. С математической точки зрения вероятность события A в предположении, что событие B произошло, получило название ***условной вероятности***, обозначаемой как $P(A/B)$. Условие наступления события B сужает пространство элементарных событий, из которых остаются только те, которые благоприятствуют событию B, а все остальные отбрасываются.

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при возникновении первого события. Если в качестве первого события берётся A, то

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B/A), \tag{1.1}$$

а если первым наступает событие B, тогда

$$P(A \cap B) = P(B) \cap P(A/B). \tag{1.2}$$

Выразив из (1.1) и (1.2) условные вероятности событий A и B, получим

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ и } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{1.3}$$

Например, у монтажницы имеется десять резисторов и пять конденсаторов. Для установки на плату она наугад взяла одну деталь, а затем другую. Вероятность того, что первая деталь окажется резистором (событие A), составит $P(A) = 10/15 \approx 0{,}66$, а вероятность того, что вторая деталь окажется конденсатором (событие B), вычисленная в предположении, что первая деталь – резистор, т. е. условная вероятность, будет $P(B/A) = 5/14 \approx 0{,}36$. По правилу умножения вероятностей (1.1) вероятность того, что первая деталь окажется резистором, а вторая конденсатором, составит $P(A \cap B) = 0{,}66 \cdot 0{,}36 = 0{,}24$.

Для произвольного числа событий правило умножения вероятностей можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1) \cap P(A_2/A_1) \cap P(A_3/A_1 \cap A_2) \cap \ldots \cap \\ \cap P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Из (1.4) видно, что вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, с учётом того, что каждое последующее событие уже наступило.

Если вероятность появления одного события не меняет вероятности появления другого, то такие события называют ***независимыми***. Для двух независимых событий A и B правило умножения вероятностей (1.4) принимает следующий вид:

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B).$$

Несколько событий называют ***независимыми в совокупности***, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных событий. Для независимых в совокупности событий правило умножения вероятностей (1.4) приобретает вид

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1) \cap P(A_2) \cap P(A_3) \cap \ldots \cap P(A_n). \tag{1.5}$$

Заметим, что если несколько событий A_1, A_2, …, A_n независимы, то и противоположные им события $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, …, $\overline{A}_n$ тоже будут являться независимыми.

Используя выражение (1.5) и соотношение 3 (см. §1.2), можно определить вероятность появления хотя бы одного из n независимых в совокупности событий A_1, A_2, …, A_n, зная вероятности появления каждого из этих событий:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cap P(\overline{A}_2) \cap P(\overline{A}_3) \cap \ldots \cap P(\overline{A}_n), \tag{1.6}$$

где $A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ – событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, …, A_n.

Например, пусть блок РЭС состоит из четырёх последовательно соединенных, независимо работающих друг от друга модулей f_1–f_4, как показано на рис. 1.2.

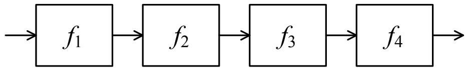

Рис. 1.2. Схема последовательного включения модулей

Выделяются следующие события:

– F_1 – нормальная работа модуля f_1, $P(F_1) = 0{,}6$;
– F_2 – нормальная работа модуля f_2, $P(F_2) = 0{,}7$;
– F_3 – нормальная работа модуля f_3, $P(F_3) = 0{,}8$;
– F_4 – нормальная работа модуля f_4, $P(F_4) = 0{,}9$.

Требуется определить вероятность нормальной работы всего блока.

Решение задачи начнём с введения события F – нормальной работы всего блока. При последовательном соединении для нормальной работы требуется, чтобы все модули работали исправно, поэтому $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$. Учитывая независимость событий F_1 – F_4, применяем формулу (1.5):

$$P(F) = P(F_1, F_2, F_3, F_4) = P(F_1) \cap P(F_2) \cap P(F_3) \cap P(F_4) =$$
$$= 0{,}6 \times 0{,}7 \times 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}302.$$

Рассмотрим другой пример. Пусть электрическая схема устройства состоит из четырёх параллельно соединенных функциональных узлов (см. рис. 1.3).

Как и в предыдущем примере, узлы работают независимо друг от друга и рассматриваются те же события F_1 – F_4. Требуется вычислить вероятность нормальной работы всей схемы, т. е. события F.

В этом случае для нормальной работы всей схемы достаточно исправности хотя бы одного узла, т. е. наступления хотя бы одного из независимых событий F_1 – F_4. Поэтому здесь используется формула (1.7):

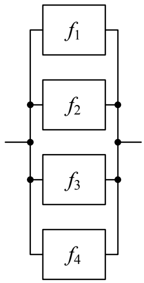

Рис. 1.3. Параллельное соединение узлов

$$
\begin{aligned}
P(F) &= 1 - P(\overline{F}_1) \cap P(\overline{F}_2) \cap P(\overline{F}_3) \cap P(\overline{F}_4) = \\
&= 1 - (1-0{,}6)\times(1-0{,}7)\times(1-0{,}8)\times(1-0{,}9) = \\
&= 1 - (0{,}4\times 0{,}3\times 0{,}2\times 0{,}1) = 0{,}998.
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

1.4. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И МЕТОДЫ ИХ ОПИСАНИЯ

Под ***случайной величиной*** (СВ) понимается значение переменной, которая в результате случайного эксперимента может принимать различное значение, которое заранее принципиально невозможно точно предсказать. Случайная величина, как и случайное событие, является одним из важнейших понятий теории вероятностей. Примером СВ служит разброс параметров полупроводниковых приборов, изготовленных по однотипной технологии, а также время наработки изделия до отказа. Средством математического описания СВ служит её закон распределения.

Случайные величины можно разделить на две группы: ***дискретные*** и ***непрерывные***. Если СВ принимает отдельные возможные значения с определенными вероятностями, то её называют дискретной. В том случае, когда СВ может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного интервала, её называют непрерывной. Следовательно, число всех возможных значений непрерывной СВ бесконечно велико.

Наиболее важными числовыми характеристиками случайной величины (СВ) являются следующие:

– характеристики центра распределения СВ (***среднее значение***, ***медиана*** и ***мода***);

– характеристики рассеивания СВ около её математического ожидания (***дисперсия***, ***среднее квадратичное отклонение***, размах варьирования, ***среднее линейное отклонение от математического ожидания***, коэффициенты ***вариации*** и ***осцилляции***);

– характеристика ***асимметрии*** распределения и его ***эксцесса***.

Рассмотрим более подробно их оценку для выборки объёмом n некоторой случайной величины X, заданной в виде числового массива

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1.8}$$

Среднее значение, или оценка ***математического ожидания*** вычисляется по формуле среднего арифметического:

$$\overline{X} = \widehat{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,.$$

Заметим, что оценка математического ожидания дискретной СВ может вычисляться как сумма произведений всех возможных значений СВ на вероятности этих значений, т. е.

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,,$$

где p_i – вероятность i-го значения СВ.

Значение m_x характеризует как бы «центр тяжести» распределения СВ. Наряду с математическим ожиданием центр распределения определяют медиана и мода.

Медианой СВ называется такая величина Me_x, для которой с одинаковой вероятностью значение X может оказаться меньше Me_x и больше Me_x. Для расчёта медианы массив (1.8) записывается в виде ранжированного ряда

$$\left(x_1^{\text{р}}, x_2^{\text{р}}, \dots, x_n^{\text{р}}\right), \tag{1.9}$$

где значения x_i расставлены в порядке возрастания или убывания, как в качестве примера показано в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Пример ранжированного ряда

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	3	1	2	5	8	7	4	3	3	9	7	10
$x_j^{\text{р}}$	1	2	3	3	3	4	5	7	7	8	9	10

В случае, если n – чётное число, медиана равна:

$$\widehat{Me}_x = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}}^{\text{р}} + x_{\frac{n}{2}+1}^{\text{р}} \right),$$

а при нечётном n

$$\widehat{Me}_x = x_{\frac{n+1}{2}}^{\text{р}}.$$

В нашем примере $n = 12$, тогда $\widehat{Me}_x = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{12}{2}}^{\text{р}} + x_{\frac{12}{2}+1}^{\text{р}} \right) = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

При малом n медиана наиболее устойчиво характеризует центр распределения СВ X.

Модой Mo_x называется наиболее вероятное значение СВ. В качестве оценки моды в ранжированном ряду (1.9) берётся значение $x_i^{\text{р}}$, которое повторяется большее число раз (имеет большую частоту). Тогда для данных, приведённых в табл. 1.1, $\widehat{Mo}_x = 3$. Распределение СВ может характеризоваться несколькими модами, такое распределение называют полимодальным. Применительно к данным табл. 1.1 можно указать второе значение моды $\widehat{Mo}_x = 7$. Если массив (1.8) не содержит повторяющихся значений, то значение моды оценивается после построения гистограммы.

Основной характеристикой рассеивания значений СВ около её математического ожидания является дисперсия.

Дисперсией СВ X называется математическое ожидание квадрата центрированной величины. Центрированная случайная величина $\dot{x}$ получается из исходной X вычитанием её математического ожидания m_x, таким образом,

$\dot{x}$ имеет нулевое математическое ожидание. Дисперсия имеет размерность квадрата СВ и рассчитывается по формуле

$$\widehat{D}_x = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{m}_x\right)^2 .$$

Непосредственно с дисперсией связана другая характеристика рассеивания СВ – ***среднее квадратичное отклонение***, определяемое по формуле

$$\sigma_x = \sqrt{\widehat{D}_x} .$$

Рассеивание значений X характеризуется также ***размахом варьирования***

$$\widehat{R} = x_{\max} - x_{\min}$$

и средним линейным отклонением от математического ожидания

$$\widehat{d}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - m_x\right| .$$

Для оценки рассеивания относительно среднего m_x используют коэффициент ***вариации*** ν, вычисляемый в процентах:

$$\widehat{\nu} = \frac{\widehat{\sigma}_x}{\widehat{m}_x}100\% ,$$

и коэффициент ***осциляции***

$$\widehat{V}_R = \frac{\widehat{R}}{\widehat{m}_x}100\% .$$

В качестве числовой характеристики асимметрии распределения СВ применяется коэффициент ***асимметрии***, определяемый по формуле

$$\widehat{A}_s = \frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}_x^3} ,$$

где $\widehat{\mu}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{m}_x\right)^3$ – оценка третьего центрального момента СВ.

Если $\widehat{A}_s > 0$, то имеет место положительная или правостороння асимметрия, если $\widehat{A}_s < 0$, то отрицательная или левосторонняя (см. рис. 1.4, *а*).

Остро- или плосковершинное распределение СВ определяется с помощью числовой характеристики, называемой ***эксцессом***, и рассчитываемой по формуле

$$\widehat{E}_k = \frac{\widehat{\mu}_4}{\widehat{\sigma}_x^4} - 3 ,$$

где $\widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{m}_x\right)^4$ – оценка четвёртого центрального момента СВ.

В случае положительного эксцесса ($\widehat{E}_k > 0$) распределение имеет островершинный характер, при $\widehat{E}_k < 0$ – плосковершинный (рис. 1.4, *б*).

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru