Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

«Теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов современной математики. Чтобы охарактеризовать ее место в современной математической науке, прежде всего необходимо подчеркнуть основные особенности теории дифференциальных уравнений, состоящей из двух обширных областей математики: теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории уравнений с частными производными.

Первая особенность — это непосредственная связь теории дифференциальных уравнений с приложениями. Характеризуя математику как метод проникновения в тайны природы, можно сказать, что основным путем применения этого метода является формирование и изучение математических моделей реального мира. Изучая какие-либо физические явления, исследователь прежде всего создает его математическую идеализацию или, другими словами, математическую модель, т.е., пренебрегая второстепенными характеристиками явления, он записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто эти законы можно выразить в виде дифференциальных уравнений. Такими оказываются модели различных явлений механики сплошной среды, химических реакций, электрических и магнитных явлений и др. Исследуя полученные дифференциальные уравнения вместе с дополнительными условиями, которые, как правило, задаются в виде начальных и граничных условий, математик получает сведения о происходящем явлении, иногда может узнать его прошлое и будущее. Изучение математической модели математическими методами позволяет не только получить качественные характеристики физических явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реального процесса, но и дает возможность проникнуть в суть физических явлений, а иногда предсказать и новые физические эффекты. Бывает, что сама природа физического явления подсказывает и подходы, и методы математического исследования. Критерием правильности выбора математической модели является практика, сопоставление данных математического исследования с экспериментальными данными.

Математическая модель дает возможность изучать явление в целом, предсказать его развитие, делать количественные оценки изменений, происходящих в нем с течением времени. Напомним, что на основе анализа дифференциальных уравнений так были открыты электромагнитные волны, и только после экспериментального подтверждения Герцем фактического существования электромагнитных колебаний стало возможным рассматривать уравнения Максвелла как математическую модель реального физического явления.

Теория уравнений с частными производными возникла на основе конкретных физических задач, приводящих к исследованию отдельных уравнений с частными производными, которые получили название основных уравнений математической физики. Изучение математических моделей конкретных физических задач привело к созданию в середине XVIII в. новой ветви анализа — уравнений математической физики, которую можно рассматривать как науку о математических моделях физических явлений.

Основы этой науки были заложены трудами Д'Аламбера (1717–1783), Эйлера (1707–1783), Бернулли (1700–1782), Лагранжа (1736–1813), Лапласа (1749–1827), Пуассона (1781–1840), Фурье (1768–1830) и других ученых. Интересно то, что многие из них были не только математиками, но и астрономами, механиками, физиками. Разработанные ими при исследовании конкретных задач математической физики идеи и методы оказались применимыми к изучению широких классов дифференциальных уравнений, что и послужило в конце XIX в. основой для развития общей теории дифференциальных уравнений.

Важнейшими уравнениями математической физики являются: уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности, волновое уравнение» [1].

«К изучению уравнения Лапласа приводят самые разнообразные физические задачи совершенно разной природы. Это уравнение встречается в задачах электростатики, теории потенциала, гидродинамики, теории теплопередачи и многих других разделах физики, а также в теории функций комплексного переменного и в различных областях математического анализа. Уравнение Лапласа является простейшим представителем широкого класса так называемых эллиптических уравнений.

Также важное место в теории уравнений с частными производными и ее приложениях занимает уравнение теплопроводности. Это уравнение встречается в теории теплопередачи, в теории диффузии и многих других разделах физики, а также играет важную роль в теории вероятностей. Оно является наиболее простым представителем класса так называемых параболических уравнений.

Волновое уравнение описывает различные волновые процессы, в частности распространение звуковых волн. Оно играет важную роль в акустике. Это представитель класса так называемых гиперболических уравнений.

Многие разделы теории дифференциальных уравнений так разрослись, что стали самостоятельными науками. Можно сказать, что большая часть путей, связывающих абстрактные математические теории и естественнонаучные приложения, проходит через дифференциальные уравнения. Все это обеспечивает теории дифференциальных уравнений почетное место в современной науке» [1].

Глава 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

§ 1. Общие понятия

Дифференциальным уравнением с частными производными называется уравнение, содержащее неизвестную функцию, зависящую от нескольких переменных (аргументов), и ее частные производные.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящих в него производных.

Например, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ — уравнения первого порядка относительно неизвестной функции $u=u(x,y)$. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ — уравнение второго порядка, также $u=u(x,y)$ — неизвестная функция.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, при подстановке которой в уравнение оно превращается в тождество.

Так для уравнения $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, где $u=u(x,y)$ — неизвестная функция, решением является $u=\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — произвольная функция.

Уравнение $\frac{\partial u}{\partial y}=f(y)$ имеет следующее решение: $u=\int f(y)dy+\psi(y)$, где $\psi(y)$ — произвольная функция.

Дифференциальные уравнения с частными производными, которые находят наиболее широкое применение в физике, механике, технике, называются уравнениями математической физики. Постановка задач для этих уравнений в частных производных делается, исходя из физических соображений, и само решение должно иметь вполне определенную физическую интерпретацию. Важнейшими уравнениями математической физики являются:

– *волновое уравнение* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, или $u_{tt}=\Delta u$, где $u=u(t,x,y,z)$ и $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

– *уравнение теплопроводности* $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, или коротко $u_t=\Delta u$;

– *уравнение Лапласа* $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, $u=u(x,y,z)$ — неизвестная функция.

§ 2. Свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными

1. Если $u_1(x,y),u_2(x,y),\ldots,u_n(x,y)$ — решения линейного однородного дифференциального уравнения, то их линейная комбинация с произвольными постоянными $C_1u_1(x,y)+$ $+C_2u_2(x,y)+\ldots+C_nu_n(x,y)$ также является решением этого уравнения.

2. Если имеется бесконечная последовательность решений линейного однородного дифференциального уравнения $u_1(x,y),u_2(x,y),\ldots,u_n(x,y),\ldots$ и ряд, составленный из этих решений, сходится, и его можно почленно дифференцировать, то сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)$ также будет решением этого уравнения.

§ 3. Краевые и начальные условия

Волновое уравнение $u_{tt} = \Delta u$, уравнение теплопроводности $u_t = \Delta u$ и уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ имеют бесчисленное множество решений. Чтобы выделить необходимое частное решение, нужно задать дополнительные условия.

Краевые (граничные условия) — это условия на границе изучаемой среды.

Начальные условия — условия, заданные в какой-то момент времени, который называется начальным.

Для уравнения Лапласа задаются только краевые условия. Решение должно удовлетворять трем требованиям: оно должно существовать, быть единственным и быть устойчивым, т.е. любое малое изменение одного из параметров должно вызывать малое изменение решения. Задача, удовлетворяющая этим трем требованиям, называется *корректно поставленной*.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. ОБЩИЙ ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальные уравнения первого порядка имеют следующий вид:

$$F\left(\vec{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

где $a_i(x) \in C^1$, $i = 1, 2, ..., n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Решение уравнения (1) в $(n + 1)$-мерном пространстве переменных $x_1, x_2, ..., x_n, u$ задает некоторую гладкую поверхность размерности n, которая называется *интегральной поверхностью уравнения* (1).

Пусть функция $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ и переменные $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда, как известно,

$$\frac{du(x_1, x_2, ..., x_n)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), видим:

$$a_1(x) = \frac{dx_1}{dt},\ a_2(x) = \frac{dx_2}{dt},\ \cdots,\ a_n(x) = \frac{dx_n}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \frac{dx_2}{a_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x)} = dt, \tag{3}$$

или

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \frac{dx_2}{a_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x)}. \tag{4}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (4) называется *характеристической системой*, ее решения называются *характеристиками.*

Функция $\varphi(t, y_1, y_1, ..., y_n)$ называется *первым интегралом системы* (4), если эта функция равна постоянной при замене $y_1 = x_1(t), y_2 = x_2(t), \ldots, y_n = x_n(t)$ на решения системы (4), т.е. $\varphi(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) = C$, $C = \mathrm{const}$.

Утверждение. Функция u является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда u есть первый интеграл системы (4).

Теорема. Если $\varphi_i(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, $(i = 1, 2, ..., n - 1)$ — независимые первые интегралы системы (4) в области D, то в окрестности любой точки $M \in D$ общее решение уравнения (1) имеет следующий вид:

$$u = \Phi(\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \varphi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)),$$

где Φ — произвольная функция класса C^1.

Пример. Найти общее решение $2\sqrt{x}\,\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$.

Решение. Система (4) для данного уравнения имеет вид: $\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2}$, т.е. $\frac{dx_1}{2\sqrt{x_1}} = \frac{dx_2}{-x_2}$. Найдем первый интеграл:

$$\int\frac{dx_1}{2\sqrt{x_1}} = -\int\frac{dx_2}{x_2} \;\Rightarrow\; \sqrt{x_1} = -\ln|x_2| + C, \;\Rightarrow\; \varphi_1 = \sqrt{x_1} + \ln|x_2| = C.$$

Следовательно, $u = \Phi(\sqrt{x_1} + \ln|x_2|)$ — общее решение.

Из общего решения можно получить частное решение, например: $\grave{u} = (\sqrt{\ _1} + \ln|\ _2|)^7$ и т. п.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$a_1(x)\frac{\partial u}{dx_1} + a_2(x)\frac{\partial u}{dx_2} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial u}{dx_n} = b(x), \tag{5}$$

где $a_i(x)$, $b(x) \in C^1$, $i = 1, 2, ..., n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Коротко уравнение (5) можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b.$$

Ищем решение уравнения (5) в неявном виде:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{dF}{dx_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}.$$

Подставив в уравнение (5), получим:

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial F}{\partial x_i} = b\frac{\partial F}{\partial u} \text{ или } \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial F}{\partial x_i} + b\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

где F — неизвестная функция.

Для этого уравнения характеристическая система будет следующей:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b} \text{ (} n \text{ равенств).}$$

Эта система имеет n первых интегралов, т.е. $\varphi_1 = C_1$, $\varphi_2 = C_2$, ..., $\varphi_n = C_n$, следовательно, общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения:

$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u \operatorname{ctg} y.$$

Решение. Составляем два уравнения характеристик:

$$\cos x\, dx = dy = \operatorname{tg} y\frac{du}{u}.$$

1) $\cos x\,dx = dy$, $\sin x = y - C_1$, $\quad y - \sin x = C_1$;

2) $dy = \operatorname{tg} y \dfrac{du}{u}$, $\operatorname{ctg} y\,dy = \dfrac{du}{u}$, $\dfrac{u}{\sin y} = C_2$.

Решения уравнения имеют вид: $\Phi\left(y - \sin x, \dfrac{u}{\sin y}\right) = 0$, отсюда можно получить

$$\frac{u}{\sin y} = f(y - \sin x) \text{ или } u = \sin y\, f(y - \sin x).$$

Замечание. Может получиться, что переменная u входит только в один первый интеграл. Тогда общее решение $\Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x,u)) = 0$ можно по теореме о неявной функции переписать в виде:

$$\varphi_n(x,u) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_{n-1}(x))$$

и разрешить это уравнение относительно u. В результате получим общее решение в явном виде.

§ 4. Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Для выделения из общего решения единственного частного необходимо задать дополнительные условия. К таким условиям, например, относятся начальные условия. Например, среди всех решений уравнения нужно найти такое решение $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которое удовлетворяет начальному условию: $u = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ при $x_n = x_{n0}$.

В случае, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных, задача Коши состоит в том, чтобы найти решение $u = f(x, y)$, которое удовлетворяет начальному условию: $u = f_0(y)$ при $x = x_0$, где $f_0(y)$ — заданная функция от y. Геометрически это означает, что среди всех интегральных поверхностей надо найти интегральную поверхность $u = f(x, y)$, которая проходит через заданную кривую $u = f_0(y)$, лежащую в плоскости $x = x_0$, параллельной плоскости yOu.

Пример. Найти интегральную поверхность уравнения:

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial u}{\partial y}z = -xy, \text{ проходящую через кривую } \begin{cases} y = x^2, \\ z = x^3 \end{cases}.$$

Решение. Сначала найдем общее решение данного неоднородного уравнения.

Характеристическая система имеет вид:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}.$$

Решим эту систему двумя способами.

1-й способ. Найдем решения двух уравнений:

1) $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{yz}$, $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$, $\dfrac{x}{y} = C_1$;

2) воспользуемся свойством: если $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d} = \dfrac{a}{b}$, имеем:

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{yxz + xyz} = \frac{dz}{-xy},$$

тогда $\dfrac{d(xy)}{2xyz} = \dfrac{dz}{-xy}$, $d(xy) = -2zdz$, $xy + z^2 = C_2$.

2-й способ. Из $\dfrac{x}{y} = C_1$ находим $x = C_1 y$ и подставляем во второе уравнение: $\dfrac{dy}{yz} = -\dfrac{dz}{xy}$. Отсюда

$$\frac{dy}{yz} = -\frac{dz}{C_1 y^2}, \; -C_1 y dy = z dz, \; z^2 = -C_1 y^2 + C_2.$$

Так как $C_1 = \dfrac{x}{y}$, то $z^2 = -xy + C_2$ или $xy + z^2 = C_2$.

$\Phi\left(\dfrac{x}{y}, z^2 + xy\right) = 0$ — общее решение, где Φ — произвольная функция.

Теперь (также двумя способами) находим частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $\begin{cases} y = x^2, \\ z = x^3 \end{cases}$.

1-й способ. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \\ \dfrac{x}{y} = C_1 \\ z^2 + xy = C_2 \end{cases} \Rightarrow \ \frac{1}{x} = C_1,\ x^6 + x^3 = C_2,\ \text{исключим } x\text{:}\ \frac{1}{C_1^6} + \frac{1}{C_1^3} = C_2.$$

Далее подставим вместо C_1, C_2 левые части первых интегралов, в результате найдем искомое решение:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy.$$

2-й способ. $\Phi\left(\dfrac{x}{y}, z^2 + xy\right) = 0 \ \Rightarrow\ z^2 = -xy + \psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, где ψ — неизвестная функция.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \\ z^2 = -xy + \psi\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{cases}, \text{ отсюда } x^6 = -x^3 + \psi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Пусть $\dfrac{1}{x} = \xi$, тогда $\psi(\xi) = \left(\dfrac{1}{\xi}\right)^6 + \left(\dfrac{1}{\xi}\right)^3$. Подставим эту функцию в общее решение:

$$z^2 = -xy + \frac{1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^6} + \frac{1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^3},\ \text{или}\ z^2 = -xy + \left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение поверхности, определяемой уравнением $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4(x^2 + y^2)$ и проходящей через линию пересечения поверхностей: $x = 3$, $z = 4y^2$.

Ответ: $z = 2x^2 - y^2 + \dfrac{5x^4y^2}{81} - 18$.

2. Решить задачу Коши: $\dfrac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad x = 0, z = y$.

Ответ: $z = 1 - e^{2x} + ye^x$.

Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Приведение дифференциального уравнения второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными x, y и неизвестной функцией $u = u(x, y)$, линейное относительно производных второго порядка:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0\,, \tag{6}$$

где A, B, C — функции, зависящие от x, y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно, A, B, C не обращаются одновременно в нуль, и функция $u = u(x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно.

Перейдем от независимых переменных x, y к новым независимым переменным ξ, η. Пусть $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ в рассматриваемой области.}$$

Производные функции $u = u(x, y)$ по старым переменным x, y выразятся через производные по новым переменным ξ, η следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6), получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]+\\ +2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(A\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}+B\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}+B\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}+C\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\\ +\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]+F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0.\end{gathered} \tag{7}$$

Покажем, что в некоторой окрестности G фиксированной точки $(x_0,\ y_0)$ функции $\xi(x,\ y)$ и $\eta(x, y)$ можно выбрать таким образом, чтобы уравнение (6) в каждой точке этой окрестности имело канонический вид.

Рассмотрим отдельно случаи, когда в рассматриваемой точке $B^2 > AC$, $B^2 < AC$ или $B^2 = AC$.

Случаи, когда в любой окрестности рассматриваемой точки выражение $B^2 - AC$ меняет знак или обращается в нуль нетождественно, мы не будем рассматривать.

1. $B^2 > AC$, в этом случае дифференциальное уравнение называется *гиперболическим*.

Рассмотрим уравнение:

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{8}$$

Пусть $A \neq 0$. Уравнение (8) можно переписать так:

$$\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(-B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(-B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = 0,$$

и поэтому уравнению (8) соответствуют решения каждого из уравнений:

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \left(-B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ A\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \left(-B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{cases}. \tag{9}$$

Из системы (9): $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} : \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} = -B - \sqrt{B^2 - AC}$, $\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} : \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} = -B + \sqrt{B^2 - AC}$.

Так как $B^2 - AC \neq 0$, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} : \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \neq \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} : \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}$, отсюда якобиан:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому в рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0) мы можем выполнить следующую замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) = \varphi_2(x, y) \end{cases}.$$

Тогда в левой части уравнения (7) исчезнут члены, содержащие $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$.

Коэффициент при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}$ будет при этом неравным нулю. Разделив на этот коэффициент, приведем уравнение (7) к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{10}$$

Это канонический вид дифференциального уравнения гиперболического типа.

Если исходное уравнение было линейным относительно неизвестной функции u и ее первых производных, то также будет линейным и преобразованное уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\eta} + c(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta).$$

Пусть $\xi = \mu + \nu$, $\eta = \mu - \nu$, тогда уравнение (10) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\mu^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2} = \Phi\left(\mu, \nu, u, \frac{\partial u}{\partial\mu}, \frac{\partial u}{\partial\nu}\right). \tag{11}$$

Это второй канонический вид уравнения гиперболического типа. Возникает вопрос: как определять функции для замены переменных $\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases}$?

Ответ следует из системы (9). Запишем уравнения этой системы в виде:

$$\begin{aligned} &A\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0; \\ &A\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Уравнения (12) — это дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Составляем соответствующие им системы обыкновенных дифференциальных уравнений — характеристические уравнения (глава 2, § 2):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{A} = \dfrac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}} \\ \dfrac{dx}{A} = \dfrac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}} \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} Ady - (B + \sqrt{B^2 - AC})dx = 0 \\ Ady - (B - \sqrt{B^2 - AC})dx = 0 \end{cases}. \tag{13}$$

Систему (13) можно записать в виде одного уравнения:

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0. \tag{14}$$

Пусть $\varphi_1(x, y) = C_1$, $\varphi_2(x, y) = C_2$ — интегралы уравнений (13), тогда их левые части будут решениями уравнений (12) и, следовательно, решениями уравнения (8).

Кривые $\varphi_1(x, y) = C_1$, $\varphi_2(x, y) = C_2$ называются характеристиками уравнения (6), или характеристическими кривыми, а уравнение (8) называется уравнением характеристик.

В случае уравнения гиперболического типа $B^2 - AC > 0$ интегралы $\varphi_1(x, y) = C_1$, $\varphi_2(x, y) = C_2$ действительны и различны. В этом случае существует два различных семейства действительных характеристик.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Решение. В данном случае $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$.

Уравнение (14) будет иметь вид: $(dy)^2 - (dx)^2 = 0$, или $dy + dx = 0$, $dy - dx = 0$.

Интегралы этих уравнений следующие: $y + x = C_1$, $y - x = C_2$, т.е. $\varphi_1 = y + x$, $\varphi_2 = y - x$. Вводим новые переменные $\xi = y + x$, $\eta = y - x$. Переходя к этим переменным в данном уравнении, получим: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$.

Решим это уравнение.

Пусть $\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = v$, тогда будет $\dfrac{\partial v}{\partial\xi} = 0$, отсюда $v = f(\eta)$, где $f(\eta)$ — произвольная функция η.

Далее $\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = f(\eta)$, значит, $u = \int f(\eta)d\eta + C(\xi)$ или $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x + y) + \psi(y - x)$, где φ и ψ — произвольные (дважды непрерывно дифференцируемые) функции.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, y > 0\,.$$

Решение. $B^2 - AC = x^2y^2 > 0$, следовательно, это уравнение гиперболического типа в указанной области.

Составляем уравнение характеристик:

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0 \text{ или } xdy + ydx = 0, \quad xdy - ydx = 0\,.$$

Решаем эти уравнения:

$$xy = C_1 \qquad - = C_2\,.$$

Следовательно, нужно ввести новые переменные ξ и η по формулам:

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}y + \frac{\partial u}{\partial \eta}\left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}y + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]y + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}y + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]\left(-\frac{y}{x^2}\right) +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}0 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{2y}{x^3}\right) = y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{1}{x}\right]x + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{1}{x}\right]\frac{1}{x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}0 + \frac{\partial u}{\partial \eta}0 = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляем в данное уравнение, имеем:

$$x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta} - x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} - \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

После приведения подобных членов получаем:

$$-4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} + \frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} - \frac{1}{2xy}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

но $xy = \xi$, тогда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} - \dfrac{1}{2\xi}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, $(\xi > 0, \eta > 0)$.

2. $B^2 = AC$. В этом случае уравнение параболического типа.

Пусть $A \neq 0$. Уравнения (13) совпадают и превращаются в одно уравнение:

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{15}$$

Так как $B^2 = AC$, то $\dfrac{A}{B} = \dfrac{B}{C}$, и любое решение уравнения (15) будет решением уравнения:

$$B\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{16}$$