

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	5
2. КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИИ.....	7
3. ЧИСТАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	11
4. УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТИМОСТИ	13
5. ДЕФОРМАЦИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ.....	16
6. ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ	19
7. ДВУХОСНОЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ	20
7.1. Компоненты тензора деформации	20
7.2. Деформация в произвольном направлении	21
ВЫВОДЫ.....	23
ПРИМЕРЫ	23
Библиографический список.....	25
ПРИЛОЖЕНИЯ	27
1. Эквивалентные бесконечно малые функции.....	27
2. Частные производные и дифференциалы функций многих переменных	27
3. Тесты для самопроверки	29
3.1. Деформированное состояние в окрестности точки тела	29
3.2. Напряженное состояние в окрестности точки тела.....	34

ВВЕДЕНИЕ

Деформированное состояние в окрестности точки представляет собой фундаментальную концепцию при изучении сопротивления материалов. Анализ распределения напряжений и деформаций в различных направлениях в этой области позволяет проводить комплексную оценку прочности и жесткости элементов конструкций. Полученные данные используются для моделирования поведения нагруженных тел, прогнозирования механизмов разрушения и разработки оптимальных инженерных решений, направленных на предотвращение этих процессов.

Предлагаемое учебно-методическое пособие содержит расширенный лекционный материал и логически выстроенную последовательность изучения теории деформированного состояния в курсе «Сопротивление материалов». Особое внимание уделяется наглядным примерам, которые помогают усвоить теоретические формулы и демонстрируют практическую ценность рассматриваемой темы. Пособие разработано для освоения материала обучающимися бакалавриата и их подготовки к аттестации по направлению 08.03.01 Строительство (профиль «Промышленное и гражданское строительство»). Кроме того, преподаватели дисциплин «Сопротивление материалов» и «Техническая механика» могут использовать его в качестве источника информации, адаптируя выбор изучаемых вопросов и задач к учебному плану и выделенному времени (прил. 3).

При изложении сложных понятий, физических величин или явлений предпочтение отдавалось физическому подходу, иногда отказываясь от более сложных математических формулировок, поскольку физическое понимание явлений имеет решающее значение для студента-строителя. Таким образом, данный подход изложения поможет развить у будущих инженеров интуицию, которая позволит им в своей профессиональной деятельности легче и быстрее распознавать разницу между неудачным и успешным конструктивными решениями.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Деформация, вызванная в теле внешними силами или другими воздействиями, обычно изменяется от одной точки к другой, т.е. она не является однородной. Неоднородную деформацию можно более четко понять, представив небольшие отрезки линий в нескольких местах тела, которые до деформации имеют одинаковую бесконечно малую длину ds и параллельны. Как правило, деформация вызывает различные повороты и удлинения в разных отрезках линии, как схематически показано на рис. 1.

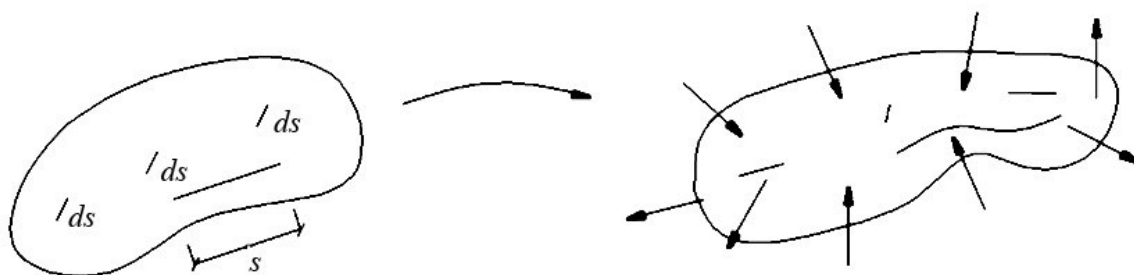


Рис. 1. Неоднородная деформация тела

Однако, если деформация однородна, т.е. не меняется от точки к точке, удлинение и поворот одинаковы по всей длине отрезков ds , что означает, что две параллельные прямые одинаковой длины (теперь не обязательно бесконечно малой) остаются прямыми, параллельными и с одинаковой длиной после деформации. Как следствие, однородная деформация преобразует треугольники в треугольники, прямоугольники в параллелограммы, тетраэдры в тетраэдры, прямоугольные параллелепипеды, как правило, в непрямоугольные параллелепипеды (рис. 2).

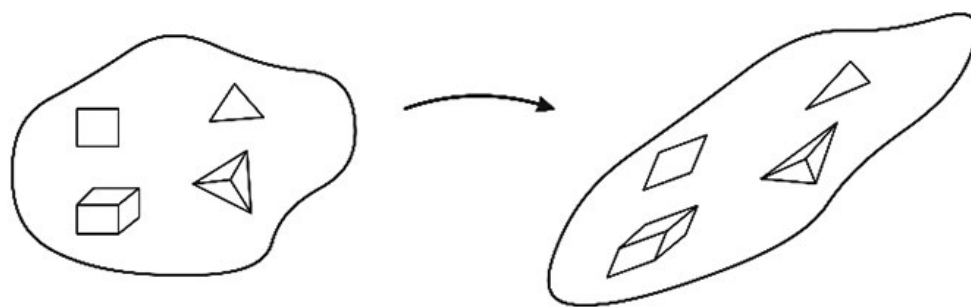


Рис. 2. Однородная деформация тела

Из этих соображений следует, что однородная деформация может быть полностью найдена шестью величинами, которые требуются для определения формы и размеров непрямоугольного параллелепипеда (например длина трех сторон и три независимых угла между непараллельными сторонами) или тетраэдра (например длина его шести сторон). В двумерном случае достаточно трех величин, необходимых для вычисления деформаций параллелограмма или треугольника.

Как упоминалось выше, деформация обычно не является однородной, а изменяется от точки к точке. Но ее можно рассматривать как таковую, если ограничить анализ деформации бесконечно малой окрестностью точки (прил. 1). Это утверждение можно легко доказать, разложив в ряд функции, которые определяют координаты материальных точек после деформации.

Физическая визуализация, однако, более показательна. Рассмотрим формы, которые получаются в результате неоднородной деформации прямоугольника, треугольника и прямоугольного параллелепипеда (рис. 3).

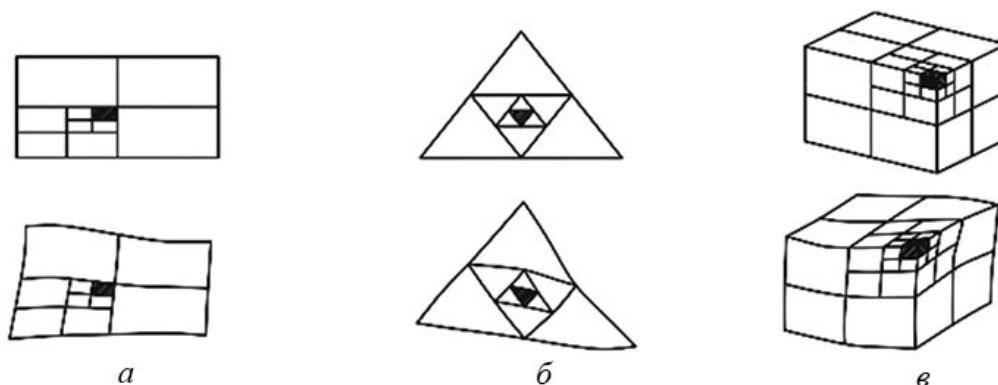


Рис. 3. Однородная деформация бесконечно малой области:
а — прямоугольника; б — треугольника; в — прямоугольного параллелепипеда

Неоднородная деформация приводит к тому, что изначально простые геометрические формы трансформируются в сложные формы, которые невозможно описать с помощью уменьшенного числа параметров. Однако, подразделяя исходные геометрические формы на более мелкие того же типа, мы обнаруживаем, что чем мельче подразделение, тем ближе деформация становится к однородной деформации. В конечном счете, когда размеры наименьшей формы стремятся к нулю, деформация становится однородной, поскольку мы можем принять, что заштрихованный прямоугольник на рис. 3, а стал параллелограммом, заштрихованный треугольник на рис. 3, б остается треугольником, а прямоугольный параллелепипед с заштрихованными гранями на рис. 3, в превращается в непрямоугольный параллелепипед. На основе вышеизложенного приходим к выводу, что для полного определения состояния деформации в бесконечно малой окрестности вокруг точки в трехмерном пространстве нужно знать шесть параметров. Эти шесть величин позволяют описать однородную деформацию в трех измерениях. В двумерном случае количество необходимых параметров уменьшается до трех.

Приведенные выше соображения справедливы независимо от размера деформации. Однако, как будет видно позже, выражения, связывающие функции, описывающие перемещение материальных точек с деформацией, могут быть значительно упрощены, если деформации и вращения достаточно малы, чтобы их можно было рассматривать как бесконечно малые величины (прил. 1). Кроме того, ограничение на бесконечно малые деформации и вращения допускает суперпозицию деформаций, связанных с различными полями перемещений.

2. КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИИ

Общие соображения, обсуждавшиеся в предыдущем разделе, теперь будут количественно определены с использованием прямоугольной декартовой системы координат x, y, z . Позднее станет ясно, что в рассматриваемой системе координат компоненты тензора деформации характеризуют деформацию тела. При бесконечно малых деформациях эти компоненты представляют собой удлинение единичных отрезков, ориентированных вдоль координатных осей, и половину изменения углов между этими отрезками (рассматриваются три пары отрезков). Три удлинения (продольные деформации) и три угловых изменения (угловые деформации), т.е. шесть величин, необходимых и достаточных для определения состояния деформации вокруг точки.

Начальное положение материальных точек тела описывается координатами x, y, z некой точки P , а ее перемещение определяется вектором $\overline{PP'}$ с компонентами u, v, w , ориентированными вдоль координатных осей x, y, z (рис. 4). Положение точки после деформации, следовательно, описывается координатами $x + u, y + v, z + w$. Ключевым предположением является сохранение непрерывности материала, что позволяет рассматривать функции перемещений $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ как непрерывные функции координат x, y, z , задающих исходное положение точки.

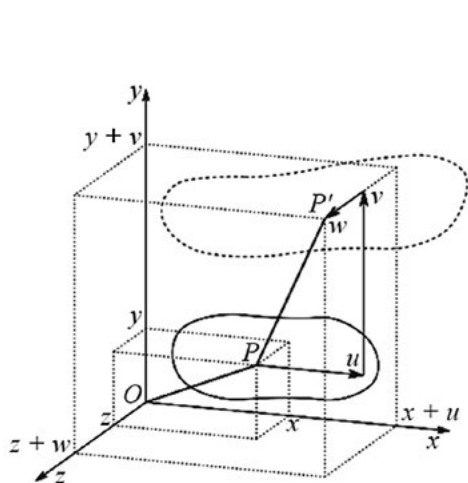


Рис. 4. Перемещение материальной точки P внутри тела

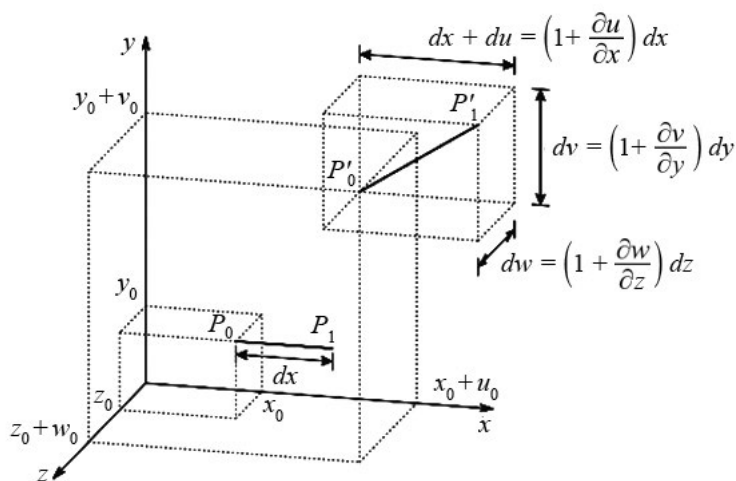


Рис. 5. Определения деформации ϵ_x

Теперь рассмотрим на рис. 5 прямую линию бесконечно малой длины $P_0P_1 = dx$, которая параллельна оси x до деформирования и определяется двумя близкими точками $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $P_1(x_0 + dx, y_0, z_0)$.

После деформации эти точки займут положения, определяемые координатами $P'_0(x_0 + u_0, y_0 + v_0, z_0 + w_0)$ и $P'_1(x_0 + dx + u_1, y_0 + v_1, z_0 + w_1)$. Так как точка P_1 находится на бесконечно малом расстоянии от P_0 и при переходе от P_0 к P_1 только координата x получает приращение dx (до деформирования), то имеем

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + du = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ v_1 = v_0 + dv = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} dx, \\ w_1 = w_0 + dw = w_0 + \frac{\partial w}{\partial x} dx. \end{cases}$$

Деформация преобразует отрезок прямой $\overline{P_0 P_1}$ в отрезок прямой $\overline{P'_0 P'_1}$, который в общем случае больше не параллелен оси x и претерпевает удлинение. Проекции $\overline{P'_0 P'_1}$ в координатных направлениях тогда равны

$$\begin{cases} \underbrace{x_0 + dx}_{x_1} + \underbrace{u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx}_{u_1} - (x_0 + u_0) = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx, \\ y_0 + v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} dx - (y_0 + v_0) = \frac{\partial v}{\partial x} dx, \\ z_0 + w_0 + \frac{\partial w}{\partial x} dx - (z_0 + w_0) = \frac{\partial w}{\partial x} dx. \end{cases} \quad (1)$$

Продольная деформация (или просто деформация) определяется как отношение удлинения к исходной длине. Следовательно, деформация в направлении x , т.е. деформация бесконечно малого отрезка dx , выражается следующим образом:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{P'_0 P'_1} - \overline{P_0 P_1}}{\overline{P_0 P_1}} = \frac{\overline{P'_0 P'_1} - dx}{dx} \Rightarrow \overline{P'_0 P'_1} = (1 + \varepsilon_x) dx. \quad (2)$$

Используя теорему Пифагора, длину $\overline{P'_0 P'_1}$ можно вычислить по ее проекциям на оси координат, что дает из выражений (1) и (2)

$$\begin{aligned} (\overline{P'_0 P'_1})^2 &= (1 + \varepsilon_x)^2 dx^2 = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] dx^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x^2}{2} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогичным образом можно получить соотношения, определяющие деформации в направлениях y и z через функции перемещения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y + \frac{\varepsilon_y^2}{2} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right], \\ \varepsilon_z + \frac{\varepsilon_z^2}{2} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь рассмотрим две бесконечно малые линии dx и dy , изначально ориентированные параллельно осям x и y , определенные точками P_0 , P_1 и P_2 (рис. 6). Деформация преобразует эти прямые линии в $\overline{P'_0 P'_1}$ и $\overline{P'_0 P'_2}$. Следуя той же логике, что и выше, данные отрезки имеют компоненты

$$\overline{P'_0 P'_1} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \\ \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ \frac{\partial w}{\partial x} dx \end{array} \right\} \text{ и } \overline{P'_0 P'_2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy \\ \frac{\partial w}{\partial y} dy \end{array} \right\}.$$

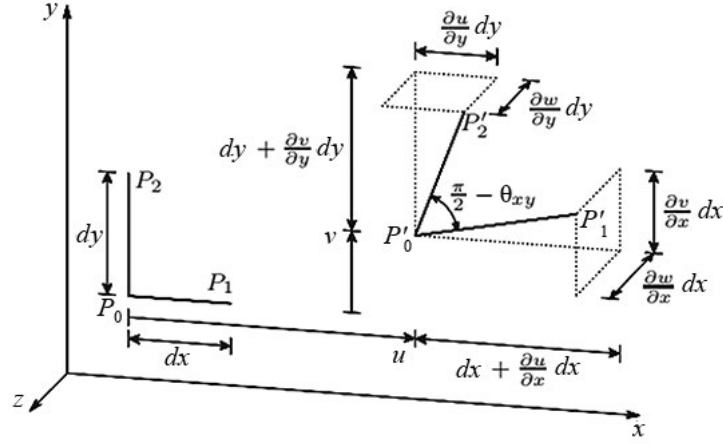


Рис. 6. Перемещение отрезков $dx = \overline{P'_0 P'_1}$ и $dy = \overline{P'_0 P'_2}$ при деформации (без учета перемещения P_0 в направлении z)

В соответствии с определением деформации, данным ранее, отрезки $\overline{P'_0 P'_1}$ и $\overline{P'_0 P'_2}$ имеют длины $(1 + \varepsilon_x)dx$ и $(1 + \varepsilon_y)dy$. Скалярное произведение векторов $\overline{P'_0 P'_1}$ и $\overline{P'_0 P'_2}$ может быть выражено как равенство

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_x)dx (1 + \varepsilon_y)dy \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{xy}\right) &= \\ = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial w}{\partial x} dx \frac{\partial w}{\partial y} dy &\Rightarrow \\ \Rightarrow \sin \theta_{xy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$.

Угол θ_{xy} представляет собой уменьшение изначально прямого угла между отрезками dx и dy . Таким образом, он определяет искажение (двойную сдвиговую деформацию) направлений x и y после деформации. Таким же образом искажения θ_{xz} и θ_{yz} могут быть связаны с производными функций перемещений (прил. 2), что дает

$$\begin{aligned} \sin \theta_{xz} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}}{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_z)}, \\ \sin \theta_{yz} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}}{(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Величины ε_x , ε_y , ε_z , θ_{xy} , θ_{xz} и θ_{yz} , описываемые выражениями (3)–(6), полностью определяют состояние деформации вокруг точки P_0 , поскольку их достаточно для определения формы и размеров в общем случае непрямоугольного параллелепипеда, полученного в результате однородной деформации прямоугольного параллелепипеда, определяемого отрезками dx , dy и dz , которые параллельны осям координат в недеформированном состоянии. Однако данные аналитические выражения для нахождения величин ε_x , ε_y , ε_z , θ_{xy} , θ_{xz} и θ_{yz} не являются простыми, поскольку неявно содержат эти величины. Более того, они не являются линейными. По этой причине, когда деформации слишком велики, чтобы считаться бесконечно малыми, деформации определяются иначе. Вместо рассмотрения удлинения на единицу длины

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

рассматривается половина относительного изменения квадрата длины

$$E = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2},$$

что значительно упрощает выражения, поскольку мы имеем

$$E = \frac{1}{2} \frac{l - l_0}{l_0} \frac{l - l_0 + l_0}{l_0} = \frac{1}{2} \varepsilon (\varepsilon + 2) = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

В большинстве задач механики деформируемого твердого тела, возникающих в практике, продольные и сдвиговые деформации достаточно малы, чтобы их можно было считать бесконечно малыми величинами, что допускает упрощения $\varepsilon^2 + 2\varepsilon \approx 2\varepsilon$ и $\sin \theta \approx \theta$ и позволяет пренебречь деформациями в знаменателях выражений (5) и (6). Поэтому деформации можно определить явными выражениями типа

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (7)$$

$$\frac{\theta_{xy}}{2} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right],$$

где γ_{xy} — бесконечно малое искажение направлений x и y .

Более того, если вращения достаточно малы, чтобы их можно было рассматривать как бесконечно малые величины, то квадраты и произведения производных, содержащиеся в выражениях (3)–(7), можно не принимать во внимание, поскольку при бесконечно малых деформациях и вращениях эти производные также будут бесконечно малыми, как легко заключить из рис. 6. В этом случае деформации можно определить линейными выражениями (прил. 1):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{\gamma_{xy}}{2} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} = \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (8)$$

Однако следует отметить, что вследствие последнего упрощения (бесконечно малые вращения) соотношения силы и перемещения, полученные из этих линеаризованных соотношений, не могут охватить явления неустойчивости, при которых происходят внезапные вращения частей тела.

Далее мы будем рассматривать, что соотношения между деформацией и перемещением определяются этими простыми выражениями. Одним из наиболее полезных следствий упрощения является возможность суперпозиции деформаций, связанных с различными полями перемещений. Это совершенно очевидно, если мы рассмотрим перемещения u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 , с которыми соответственно связаны деформации $^1\epsilon$ и $^2\epsilon$. Из выражений (8) мы имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = ^1\epsilon_x + ^2\epsilon_x, \\ \dots \\ \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial z} + \frac{\partial(w_1 + w_2)}{\partial y} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) = ^1\epsilon_{yz} + ^2\epsilon_{yz}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Выражения (8) дают компоненты тензора деформации в прямоугольной декартовой системе координат для бесконечно малых деформаций и вращений. Как мы увидим ниже (раздел 6), множитель $1/2$ в выражениях, касающихся сдвиговых деформаций, необходим для того, чтобы величины, определяющие деформированное состояние $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}$ и ϵ_{yz} , может образовывать тензор в декартовом пространстве x, y, z в математическом смысле этого термина. Компоненты тензора второго порядка преобразуются, как определено выражением тензора напряжений, когда система координат вращается. Как мы уже видели, деформированное состояние может быть найдено любым набором из шести величин, что позволяет количественно оценить деформацию элементарного параллелепипеда. Однако только шесть величин, вычисленных, как представлено в выражениях (8), определяют компоненты симметричного тензора второго порядка в декартовой системе отсчета x, y, z .

Формализация деформированного состояния в виде тензора обеспечивает возможность применения методов тензорного исчисления. Принципиальным является тот факт, что математический аппарат тензорного анализа инвариантен относительно природы тензора, применимого к анализу напряжений, деформаций и других симметричных тензоров второго порядка. Это свойство позволяет экстраполировать известные характеристики тензора напряжений на тензор деформаций, что будет подробно рассмотрено в последующих разделах.

3. ЧИСТАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В разделе 2 мы разработали выражения для вычисления элементов тензора деформаций из функций перемещения u, v, w . Бесконечно малая окрестность вокруг точки испытывает не только чистую деформацию, но и движение твердого тела из-за деформации других областей тела. В случае бесконечно малых деформаций и вращений движения связанные с различными полями перемещения могут быть наложены друг на друга, что позволяет идентифицировать движение твердого тела бесконечно малой области вокруг точки.

Движение бесконечно малой области полностью определяется величинами $u, v, w, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial u/\partial z, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y, \partial v/\partial z, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y$ и $\partial w/\partial z$. Величины u, v и w , очевидно, представляют собой поступательное движение. Остальные девять величин содержат деформацию и вращение твердого тела. Чтобы идентифицировать последнее, следует отметить, что при движении твердого тела продольные и сдвиговые деформации равны нулю (см. (8)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{xz} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru