ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория нечетких множеств за свою более чем 50-летнюю историю стала важной инструментальной частью прикладных исследований в самых разных научных направлениях и приложениях. Такая всевостребованность обусловлена, с одной стороны, тем, что сами данные, которыми мы оперируем, по большей части точно нам неизвестны, а нечеткость представляет одну из моделей описания таких данных. Эта суть так называемого эпистемологического подхода, в котором нечеткость связана со степенью нашего незнания о принадлежности элемента множеству. Другой, так называемый онтологический подход рассматривает нечеткость как один из атрибутов нашего мира. Например, такие качественные понятия, как «высокий», «богатый» и т.д., не связаны с нашим неполным знанием об объекте или явлении, но их удобно моделировать с помощью понятия нечеткого множества.

В учебных курсах по теории нечетких множеств условно можно выделить базовую часть, которую можно излагать с той или иной степенью подробности и доказательности, прикладную часть и (возможно) некоторые обобщения классических нечетких моделей (нечеткие случайные величины, интуиционистские нечеткие множества и т.д.). В настоящее время курсы, в которых изучаются основы теории нечетких множеств и их применение к решению прикладных задач, включаются в программы учебных дисциплин, как бакалаврского, так и по большей части магистерского уровня, совершенно разных направлений подготовки. В российских вузах такие курсы широко представлены в образовательных программах, связанных с управлением в технических системах, с автоматизацией промышленных и транспортных систем, с информационными системами и т.д., что отражает традиции советской и российской научных школ по теории нечетких множеств. Соответственно, довольно много и учебных пособий, в которых рассматриваются как элементы нечетких множеств, так и прикладные задачи, связанные с указанными направлениями подготовки. Для этих направлений востребованы прежде всего такие разделы, как нечеткая логика, нечеткие правила вывода, нечеткие системы, а также конкретные инженерные приложения.

Значительно реже теория нечетких множеств встречается в образовательных программах подготовки специалистов по экономике, социологии, политологии и т.д., т.е. в традиционно «вышкинских» направлениях подготовки. Причины этого связаны, скорее всего, с засильем идеологии в экономической и гуманитарных науках в советское время и в последующем ресурсном и кадровом провале в российской науке. Только в последние 15–20 лет стали появляться как серьезные прикладные исследования, связанные с применением нечетких множеств в экономической и гуманитарных науках, так и соответствующие курсы учебных дисциплин.

На наш взгляд, при анализе экономических, социологических, политологических данных должны быть востребованы модели «не-факторов» (нечеткости, неопределенности, неточности и т.д.), поскольку такие данные зачастую несут отпечаток нерационального поведения, манипулирования, наличия «черных лебедей» и т.д. и в результате уже не обладают «хорошими» статистическими свойствами. А для их анализа уже недостаточно использовать только техники, основанные на методах математической статистики.

Другой важной тенденцией последних десятилетий, которая не могла не отразиться на развитии теории и прикладных аспектах исследований по нечетким множествам, стала тотальная цифровизация всех сфер жизни. Это, в частности, привело к возможности и необходимости оперирования огромными массивами данных. В связи с этим бурно развивается научное направление «Наука о данных» (Data Science). Данные, которыми приходится оперировать, могут быть плохо структурированными, неполными, неточными, искаженными и т.д., поэтому в последнее время оказались остро востребованными модели обработки и анализа таких данных. Эта тенденция привела к развитию в теории нечетких множеств направлений, которые ориентированы на данные. Но пока в учебной российской литературе (как и в работах российских исследователей) разделы, связанные как с применением нечетких методов к обработке и анализу данных, так и с обработкой нечетких данных, отражены, на наш взгляд, недостаточно. В пособии предпринята попытка хотя бы частично восполнить этот недостаток. В частности, в нем рассмотрены такие прикладные разделы, связанные с обработкой и анализом нечетких данных, как нечеткая регрессия, нечеткая классификация и кластеризация, нечеткий сетевой анализ и т.д.

Другая прикладная направленность данного пособия связана с применением нечетких математических моделей в задачах принятия решений. Этому посвящены разделы сравнения и ранжирования нечетких данных, нечеткой оптимизации, многокритериального принятия решений с нечеткими данными, нечеткого логического вывода. По мнению авторов, анализ данных и принятие решений являются двуединой составляющей использования информации: анализ данных осуществляется для принятия решений, а принятие решений немыслимо без анализа данных. Поэтому выбранная прикладная направленность пособия вполне обоснованна. Кроме того, инструментарий нечетких множеств дает возможность использовать элементы принятия решений при анализе данных. Например, с помощью нечеткого логического вывода экспертная информация (принятие решений) может быть использована в задачах прогнозирования данных. Соответствующие кейсы также рассмотрены в данном пособии.

В советской научной литературе были две «настольные» книги для специалистов по нечеткой математике: переводная книга известного специалиста по теории нечетких множеств А. Кофмана (A. Kaufmann) [Кофман, 1982], которая вышла на русском языке в 1982 году (оригинальное издание 1977 года), и книга [Нечеткие множества..., 1986] под редакцией Д.А. Поспелова, вышедшая в 1986 году. Конечно, с тех пор исследования по теории нечетких множеств ушли далеко вперед, сместились некоторые акценты, изменился язык изложения материала и т.д. Среди зарубежной учебной литературы по нечеткой математике можно порекомендовать прежде всего два издания: книгу [Klir, Yuan, 1995], которая по стилю изложения, соотношению между строгостью и наглядностью, широте охвата прикладных разделов является, на наш взгляд, образцом учебного пособия, и книгу [Wang et al., 2009], которая в большей степени заинтересует математиков и поклонников строгого и доказательного стиля изложения. В качестве дополнительной литературы к отдельным разделам данного пособия можно порекомендовать монографии [Lee, 2005] (простой, но широкий по охвату приложений курс), [Liu, Pedrycz, 2009] (сильно математизированный, строгий по изложению курс с минимумом приложений), [Ekel et al., 2010] (принятие решений с нечеткими данными), [Siler, Buckley, 2005] (нечеткие экспертные системы и нечеткий вывод), [Wolkenhauer, 2001] (нечеткие модели анализа данных).

Данное учебное пособие написано на основе материалов курса «Нечеткость и неопределенность в анализе данных и принятии решений», который авторы читают магистрам программы «Науки о данных» факультета компьютерных наук на протяжении нескольких последних лет. Подытоживая, можно указать следующие отличия этой книги от других ранее публиковавшихся изданий по теме нечетких множеств:

- ориентация рассматриваемого теоретического материала как на задачи анализа данных, так и на задачи принятия решений;
- адресация пособия широкому кругу «вышкинских» читателей — студентам, аспирантам и преподавателям образовательных программ, как непосредственно связанных с анализом данных (прежде всего на факультете компьютерных наук), так и использующих анализ данных и принятие решений в своих исследованиях, — бизнес-информатикам, экономистам, финансовым аналитикам, политологам и т.д.;

- освещение разделов нечеткой математики, редко встречающихся в российской литературе, но широко востребованных в анализе данных и принятии решений: нечеткая регрессия, нечеткая оптимизация, нечеткие классификация и кластеризация и др.;
- ориентация рассматриваемых прикладных методов на традиционно «вышкинские» задачи анализа данных и принятия решений в социально-экономической сфере, финансах, политологии и т.д.;
- большое количество задач, примеров и кейсов (более 70 разобранных примеров и кейсов, более 150 задач для самостоятельного решения), что делает возможным использование данного издания не только как учебника, но и как задачника;
- включение в книгу «кейсов» конкретных проектов;
- разумное сочетание математической строгости и популярности изложения.

Структура учебного пособия следующая.

В главе 1 введены и рассмотрены базовые понятия теории нечетких множеств: функция принадлежности, срезовые множества. Введены алгебраические операции над нечеткими множествами и рассмотрены их свойства. Обсуждены основные методы построения функций принадлежности нечетких множеств: по массивам данных, по экспертным оценкам.

Глава 2 посвящена метрикам на нечетких множествах и такой важной характеристике, как степень нечеткости (размытия). В частности, рассмотрены два приложения показателя размытия. Первое приложение связано с применением этой характеристики нечетких множеств в задачах обработки изображений. Второе приложение посвящено применению показателя размытия для анализа согласованности позиций экспертов в задачах принятия решений.

В главе 3 обсуждаются такие обобщения операций над нечеткими множествами, как понятия треугольных норм и конорм. Рассмотрены также функциональные описания обобщенных операций и их приложения к моделированию нечетких высказываний.

В главе 4 вводится и рассматривается понятие нечеткого отношения, операций над нечеткими отношениями. Особое внимание уделено композиции нечетких отношений, нечетким отношениям на декартовом квадрате множеств, нечетким отношениям, обладающим определенными свойствами (рефлексивные, транзитивные и т.д.), построению транзитивного замыкания. Обсуждаются различные типы транзитивности нечетких отношений. Отдельно рассматриваются такие важные виды нечетких отношений, как различные отношения нечеткого порядка, нечеткие отношения подобия, различия и сходства, связь отношения различия с ультраметрикой. В качестве прикладной задачи рассмотрено приложение нечетких отношений к анализу согласованности рекомендаций финансовых аналитиков.

В главе 5 рассматриваются два важнейших понятия теории нечетких множеств: принцип обобщения и понятие нечеткого числа. Принцип обобщения Заде (Zadeh's extension principle) вводится как эвристическое правило, но подробно обсуждается мотивация такого введения. Основное внимание в этой главе уделено понятию нечеткого числа. Рассмотрены общий вид нечетких чисел (LR-представление), основное аналитическое свойство нечетких чисел о коммутативности непрерывного отображения с операцией среза нечетких чисел, сведении операций над нечеткими числами к соответствующим операциям над интервалами. В то же время достаточно подробно обсуждаются ограниченность алгебраических свойств над нечеткими числами и следствия этих ограничений для возможности решения уравнений с нечеткими числами. В этой же главе рассмотрены функции, уравнения и системы уравнений с нечеткими числами. Материал проиллюстрирован примерами экономического анализа (нечеткие функции спроса и предложения, нечеткая модель Леонтьева).

Глава 6 посвящена числовым характеристикам нечетких чисел. Речь прежде всего идет об ожидаемом значении, о степени нечеткости и мере неопределенности нечетких чисел. Кроме того, в этой главе рассматриваются всевозможные концепции метрик на множестве нечетких чисел: на основе расстояния между срезами нечетких чисел, на основе расстояния между LR-функциями, на основе расстояния между числовыми характеристиками, понятие нечеткого расстояния на основе транспортной метрики.

В главе 7 рассматриваются некоторые концепции введения порядка на множестве нечетких чисел. Это важная для приложений задача, которая является частью задачи принятия решения с нечеткими данными, сравнения и ранжирования вариантов нечетких решений и т.д. В этой же главе рассмотрены два приложения, в которых используется инструментарий работы с нечеткими числами, сравнения нечетких чисел, решения систем уравнений с нечеткими числами. Первое приложение связано с сетевым анализом нечетких графов, т.е. взвешенных графов, в которых веса — нечеткие числа. Второе приложение связано с применением нечетких чисел к прогнозированию волатильности фондового или валютного рынка. А именно речь идет о нечетких модификациях асимметричных GARCH-моделей.

Глава 8 посвящена некоторым обобщениям понятия нечеткого множества. В частности, рассмотрены интервальнозначные нечеткие множества, интуиционистские нечеткие множества и нечеткие случайные величины.

Последние пять глав посвящены прикладным аспектам теории нечетких множеств применительно к решению задач анализа данных и принятия решений.

Так, в главе 9 приведена общая постановка и одна из концепций решений задачи нечеткой оптимизации в рамках так называемой симметричной модели. Более подробно рассмотрены постановка и решение задачи нечеткого линейного программирования.

Глава 10 посвящена задаче нечеткой регрессии. В частности, обсуждается возможностная модель решения задачи линейной регрессии с нечеткими параметрами и метрическая модель решения задачи линейной регрессии с нечеткими данными.

В главе 11 рассматривается многокритериальная задача принятия решений при нечетких данных. В частности, подробно описаны нечеткая модель взвешенной суммы и нечеткий метод TOPSIS.

Глава 12 посвящена задачам нечеткой классификации и кластеризации. В случае классификации неразмытых образов по нечетким классам рассмотрена одна из методик (причем сугубо «нечеткая методика», отличная от методов статистического оценивания плотностей вероятностей) построения функций принадлежности описания нечетких классов по обучающей выборке. В задаче классификации нечетких образов по нечетким классам описан метрический способ классификации и подход на основе введения меры близости. Достаточно подробно в этой главе рассмотрены методы нечеткой кластеризации. Это и наиболее популярный нечеткий алгоритм *c*-средних, и алгоритм Густафсона — Кесселя, и возможностный алгоритм кластеризации.

Наконец, последняя глава 13 пособия посвящена вопросам нечеткого логического вывода. В первых разделах этой главы рассмотрены различные нечеткие обобщения операции логической импликации. Далее рассмотрены понятия нечеткой и лингвистической переменных, приведены некоторые виды простейших нечетких высказываний и нечеткие правила дедуктивного вывода. В частности, рассмотрено общее композиционное правило вывода и такие его популярные реализации, как правило Мамдани и правило Ларсена, а также соответствующие схемы вывода, состоящие из многих правил и антецедентов. Затем рассмотрены некоторые схемы нечеткого моделирования на основе правил логического вывода, в частности популярная адаптивная схема вывода Такаги — Сугено. Кроме того, обсуждаются аппроксимативные возможности систем нечеткого моделирования. Завершается глава рассмотрением возможности применения систем логического вывода в задаче прогнозирования волатильности фондового или валютного рынка.

Большинство рассмотренных в этом пособии приложений (кейсов) тех или иных разделов теории нечетких множеств — это результат адаптации под учебное пособие материалов курсовых или выпускных квалификационных работ, выполненных студентами под руководством авторов пособия (соответствующие ссылки есть в тексте пособия). Поэтому авторы выражают всем им свою благодарность. Кроме того, авторы благодарят студентов магистерской программы «Науки о данных» НИУ ВШЭ, которые были первыми слушателями курса лекций, положенного в основу данного пособия.

Особую признательность авторы выражают рецензентам данного пособия профессорам А.Н. Каркищенко и Б.И. Яцало за ряд ценных замечаний.

И конечно, авторы признательны своим коллегам — преподавателям департамента математики на факультете экономических наук, которые поддержали издание этой книги, академическому руководителю программы «Науки о данных» С.О. Кузнецову, который был инициатором появления соответствующего курса лекций, руководителю департамента математики на факультете экономических наук Ф.Т. Алескерову, руководству факультета экономических наук за инициативную поддержку решения о включении соответствующих разделов в программу цикла курсов по цифровой экономике.

Авторы благодарят РФФИ за частичную поддержку работы грантом № 18-01-00877-а. А.Е. Лепский благодарит за частичную поддержку работы Международный центр анализа и выбора решений НИУ ВШЭ, поскольку книга подготовлена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Глава 1
НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1. Понятие нечеткого множества

Нечеткие множества можно рассматривать как обобщение обычных (четких или неразмытых) множеств. В нечетком множестве A не указывается точно, принадлежит или не принадлежит произвольный элемент x множеству A, а устанавливается лишь степень принадлежности, которая может принимать значения из некоторого множества $U \subseteq \mathbb{R}$, называемого множеством принадлежности. Всюду далее будем считать, если не оговорено противное, что $U = [0; 1]$. Понятие нечеткого множества и рассмотренные ниже операции над такими множествами впервые были введены Лотфи Заде в 1965 году в работе [Zadeh, 1965].

Пусть задано универсальное множество X. Тогда, по определению, произвольное *нечеткое множество* $A \subseteq X$ можно задать с помощью *функции принадлежности* $\mu_A(x)$, $x \in X$, которая отображает универсальное множество X во множество U, т.е. μ_A: $X \to U$. Отметим, что обычное (четкое или неразмытое) множество A также принадлежит классу нечетких множеств, при этом функция принадлежности $\mu_A(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ является характеристической функцией множества A.

Обозначения нечетких множеств:

1) $\mu_A(x)$ для несчетного множества X;

2) $A = \{(x_1 \mid \mu_A(x_1)); (x_2 \mid \mu_A(x_2)); \ldots\}$, $A = \left\{\dfrac{x_1}{\mu_A(x_1)}; \dfrac{x_2}{\mu_A(x_2)}; \ldots\right\}$,

$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & \ldots \\ \hline \mu_A(x_1) & \mu_A(x_2) & \ldots \\ \hline \end{array}$ для конечного или счетного множества X.

Нечеткое множество A имеет следующую логическую интерпретацию. Функция принадлежности $\mu_A(x)$ отражает степень истинности высказывания $V = \{x \in A\}$, оцениваемого из интервала $U = [0; 1]$: если $\mu_A(x) = 0$, то высказывание V считается точно ложным, а когда $\mu_A(x) = 1$ — точно истинным.

Пример 1.1. Рассмотрим высказывание «$x \approx 2$» («число x приближенно равно 2»). Тогда этому высказыванию можно поставить в соответствие нечеткое множество чисел A, близких по значению к числу 2:

$$A = \{(x_i \mid \mu_A(x_i)) \colon i = 1,\ 2,\ \ldots\} =$$
$$= \{(1{,}2 \mid 0{,}1);\ (1{,}5 \mid 0{,}6);\ (1{,}7 \mid 0{,}8);\ (2 \mid 1);\ (2{,}2 \mid 0{,}85),\ \ldots\}$$

в дискретном случае (см. рис. 1.1*а*). Или можно поставить в соответствие непрерывную функцию принадлежности $\mu_A(x) = \max\{0;\ 1 - |x - 2|\}$, график которой изображен на рис. 1.1*б*. ■

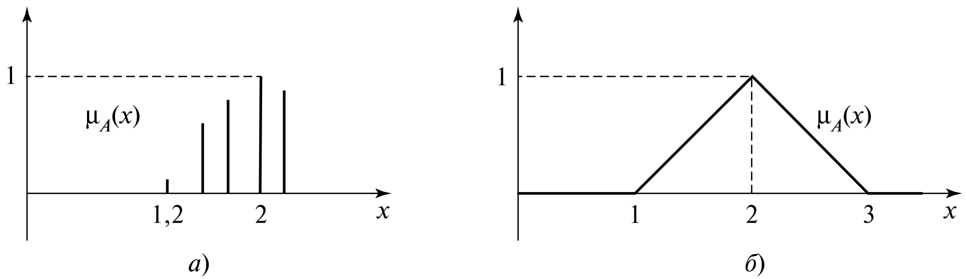
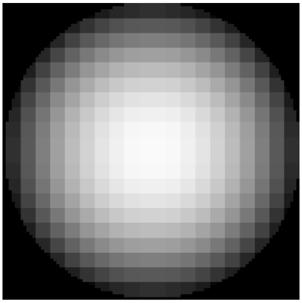


Рис. 1.1. Дискретная (*а*) и непрерывная (*б*) функции принадлежности нечетких чисел, соответствующих высказыванию «примерно 2»

Очевидно, что рассмотренное нечеткое множество A было определено из эвристических соображений и отражает субъективную точку зрения на установление значений истинности высказывания «$x \approx 2$» при различных x.

Общий вид функции принадлежности нечеткого множества задается характером моделируемого высказывания или объекта, а значения конкретных параметров функции принадлежности могут определяться посредством статистического или экспертного оценивания или носить субъективный характер. Более подробно о способах оценивания функции принадлежности см. раздел 1.3.

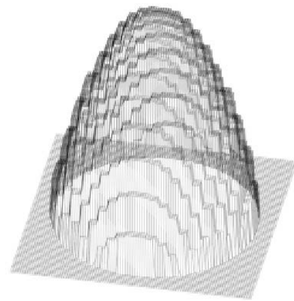
Природа нечеткости может быть различной. Более подробно об этом пойдет речь в разделе 8.5. Например, нечеткость может отражать недостаток информации об объекте, как в примере 1.1. Или сам описываемый объект нельзя «четко» определить. Примерами таких объектов прежде всего являются качественные понятия: «большой», «высокий», «яркий», «сильный» и т.д. Например, на рис. 1.2*а* показано оцифрованное полутоновое изображение светлого круга на однородном темном фоне, на рис. 1.2*б* — матрица значений яркости этого изображения в пикселях, на рис. 1.2*в* — график соответствующей функции яркости. Множество пикселей изображения светлого круга можно считать нечетким множеством. Про многие пиксели нельзя достоверно сказать, принадлежат они кругу или нет. Но значения



а)

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	20
0	0	0	0	0	20	20
0	0	0	11	11	20	20
0	11	11	11	11	20	20
15	26	26	26	26	35	35
15	26	26	26	26	35	35
15	26	26	26	26	35	35
15	26	26	26	26	35	35
28	39	39	39	39	48	48
28	39	39	39	39	48	...

б)



в)

Рис. 1.2. (*а*) — полутоновое изображение круга; (*б*) — матрица значений яркости; (*в*) — график функции яркости

функции яркости будут характеризовать степень истинности высказывания, что данный пиксель принадлежит кругу.

Примеры графиков наиболее популярных функций принадлежности, когда $X = \mathbb{R}$, приведены на рис. 1.3. Примерами нечетких множеств на $\mathbb{R}$ с функцией принадлежности, изображенной на рис. 1.3*а*, могут быть: «число принадлежит примерно отрезку $[a, b]$», «человек имеет средний рост», «компания будет иметь среднюю прибыль» и т.д. А примерами нечетких множеств с функцией принадлежности, изображенной на рис. 1.3*б*, являются: «высокий человек», «компания будет иметь большую прибыль» и т.д.

Если нечеткое множество задано на универсальном множестве $X = \mathbb{R}$, то его называют еще нечеткой величиной. Нечетким величинам и их наиболее важному частному случаю — нечетким числам — посвящены главы 5, 6 и 7 этого пособия.

Пример 1.2. Найдите аналитически функции принадлежности, графики которых приведены на рис. 1.3*а*, *б* в классе: 1) кусочно-линейных функций; 2) модульно-линейных функций (т.е. функций, которые могут быть получены с помощью применения конечного числа раз арифметических операций и операции суперпозиции к линейной $y = kx + b$ и модульной $y = |x|$ функциям).

Решение. а) Нечеткое множество (величина), определенное на $\mathbb{R}$, функция принадлежности которого имеет вид, показанный на рис. 1.4*а*, называется треугольным нечетким числом (см. главу 5). Это множество полностью определяется тремя числами a, b, c ($a \le b \le c$) при условии, что эти множества — нормальные, т.е. $\sup\limits_x \mu_A(x) = 1$, и обозначаются $A(a, b, c)$. Нетрудно видеть, что функция

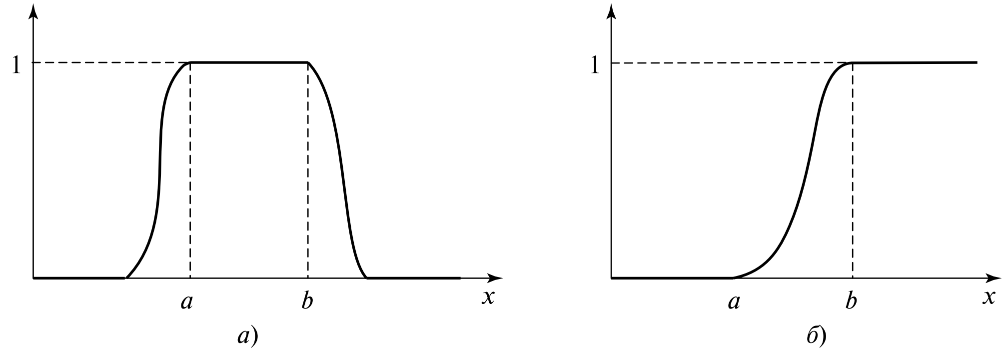


Рис. 1.3. Примеры графиков функций принадлежности нечетких множеств на $\mathbb{R}$

принадлежности будет иметь следующий вид в классе кусочно-линейных функций:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a;\ b], \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & x \in (b;\ c], \\ 0, & x \notin [a;\ c] \end{cases} = \max\left\{0;\ \min\left\{\frac{x-a}{b-a};\ \frac{c-x}{c-b}\right\}\right\}.$$

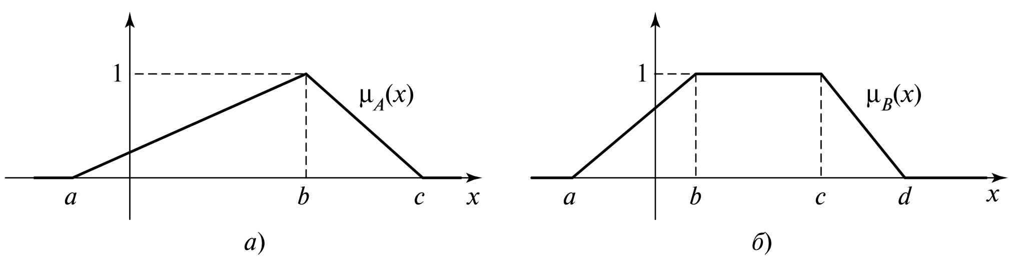


Рис. 1.4. Графики треугольной (*а*) и трапециевидной (*б*) функций принадлежности

Функция принадлежности μ_A в классе модульно-линейных функций будет иметь вид

$$\mu_A(x) = \begin{cases} k_1|x-b| + k_2(x-b) + 1, & x \in [a;\ c], \\ 0, & x \notin [a;\ c], \end{cases}$$

где $k_1 = -\dfrac{c-a}{2(b-a)(c-b)}$, $k_2 = -\dfrac{2b-a-c}{2(b-a)(c-b)}$, если $a < b < c$. Например, нечеткое число $A(1;\ 2;\ 3)$ с функцией принадлежности $\mu_A(x) = \max\{0;\ 1-|x-2|\}$ может моделировать высказывание «число x примерно равно 2».

б) Нечеткое множество (величина), определенное на $\mathbb{R}$, функция принадлежности которого имеет вид, показанный на рис. 1.4*б*, называется *трапециевидным* нечетким числом. Более подробно такие нечеткие множества рассмотрены в главе 5. Это множество полностью определяется четырьмя числами a, b, c, d ($a \le b \le c \le d$) при условии, что эти множества — нормальные, т.е. $\sup\limits_x \mu_A(x) = 1$, и обозначаются $A(a, b, c, d)$. Функция принадлежности трапециевидного числа в классе кусочно-линейных функций будет иметь вид

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a;\ b], \\ 1, & x \in (b;\ c], \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & x \in (c;\ d], \\ 0, & x \notin [a;\ d] \end{cases} = \max\left\{0;\ \min\left\{\dfrac{x-a}{b-a};\ 1;\ \dfrac{d-x}{d-c}\right\}\right\}.$$

А в классе модульно-линейных такая функция будет иметь вид

$$\mu_B(x) = \begin{cases} k_1(|x-b|-(x-b)) + k_2(|x-c|+x-c)+1, & x \in [a;\ d], \\ 0, & x \notin [a;\ d], \end{cases}$$

где $k_1 = -\dfrac{1}{2(b-a)}$, $k_2 = -\dfrac{1}{2(d-c)}$, если $a < b$ и $c < d$. ■

Нечеткое множество A можно однозначно описать с помощью его так называемых α-уровней (α-срезов, α-cuts)

$$A_\alpha = \{x \in X\colon \mu_A(x) \ge \alpha\}, \quad \alpha \in (0,\ 1].$$

Заметим, что α-срезы являются неразмытыми множествами и справедливо включение: $A_\alpha \subseteq A_\beta$, если $\alpha \ge \beta$. Множество α-срезов $\{A_\alpha\colon \alpha \in (0,\ 1]\}$ определяет нечеткое множество A однозначно, так как справедлива следующая теорема о декомпозиции.

Теорема 1.1 (о декомпозиции). *Для любого нечеткого множества A верно равенство*

$$\mu_A(x) = \sup\{\alpha\colon x \in A_\alpha\} = \sup_\alpha\{\alpha\chi_{A_\alpha}(x)\}, \tag{1.1}$$

где χ_B — характеристическая функция множества B.

Пример 1.3. Для нечеткого множества $A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ \hline\end{array}$ декомпозиция будет следующей:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ \hline\end{array} = \max\left\{0{,}7\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline\end{array};\ 0{,}3\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array};\ 0{,}5\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}\right\}.$$

Здесь предполагается, что умножение строки на число и операция max выполняются покоординатно. ■

С помощью формулы (1.1) можно также синтезировать нечеткое множество из конечной последовательности вложенных неразмытых множеств $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$, удовлетворяющей условию: $1 \geq \alpha_i \geq \alpha_j > 0 \Rightarrow A_{\alpha_i} \subseteq A_{\alpha_j}$.

Вместе с нестрогим рассматривают также и строгие α-срезы $\operatorname{int} A(\alpha)$ множества A, для которых

$$\operatorname{int} A_\alpha = \{x \in X\colon \mu_A(x) > \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Неразмытое множество $\ker A = A_1$ называют *ядром* нечеткого множества A, а множество строгого уровня $\operatorname{supp} A = \operatorname{int} A_0$ — *носителем* нечеткого множества A[1]. Таким образом, ядро — это элементы универсального множества X, которые определенно принадлежат множеству A, а носитель — это элементы множества X, которые могут принадлежать A.

1.2. Алгебраические операции над нечеткими множествами и их свойства

Теоретико-множественные отношения и операции над нечеткими множествами определяются как продолжение соответствующих отношений и операций над неразмытыми множествами (или, что то же самое, над их характеристическими функциями). Пусть заданы нечеткие множества A, B, C на универсальном множестве X. Тогда по определению:

1) нечеткие множества A и B равны ($A = B$), если $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ для любого $x \in X$;

2) нечеткое множество A включается в нечеткое множество B ($A \subseteq B$), если $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ для любого $x \in X$;

---

[1] Понятие носителя нечеткого множества отличается от понятия носителя функции. Обычно под носителем функции понимают замыкания множества ненулевых значений функции.

3) нечеткое множество C — объединение нечетких множеств A и B ($C = A \cup B$), если $\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x); \mu_B(x)\}$ для любого $x \in X$;

4) нечеткое множество C — пересечение нечетких множеств A и B ($C = A \cap B$), если $\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x); \mu_B(x)\}$ для любого $x \in X$;

5) нечеткое множество C — алгебраическая сумма нечетких множеств A и B ($C = A + B$), если $\mu_C(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$ для любого $x \in X$;

6) нечеткое множество C — алгебраическое произведение нечетких множеств A и B ($C = A \cdot B$), если $\mu_C(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$ для любого $x \in X$;

7) нечеткое множество C — дополнение нечеткого множества B ($C = \neg B$), если $\mu_C(x) = 1 - \mu_B(x)$ для любого $x \in X$ (если $U = [0; 1]$).

Данные теоретико-множественные операции и отношения можно выразить через соответствующие «четкие» операции и отношения над α-уровнями нечетких множеств A, B и C. Например,

1) $A = B$, если $A_\alpha = B_\alpha$ для любого $\alpha \in (0; 1]$;

2) $A \subseteq B$, если $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ для любого $\alpha \in (0; 1]$;

3) $A \cup B = C$, если $A_\alpha \cup B_\alpha = C_\alpha$ для любого $\alpha \in (0; 1]$;

4) $A \cap B = C$, если $A_\alpha \cap B_\alpha = C_\alpha$ для любого $\alpha \in (0; 1]$;

5) $\neg A = C$, если $\neg(A_{1-\alpha}) = C_\alpha$ для любого $\alpha \in (0; 1]$.

Пусть $\mathcal{F}(X)$ — множество всех нечетких подмножеств множества X, включая пустое множество $\varnothing$ (с функцией принадлежности $\mu_\varnothing(x) = 0$ для любого $x \in X$) и все множество X (с функцией принадлежности $\mu_X(x) = 1$ для любого $x \in X$). Нетрудно показать, что множество $\mathcal{F}(X)$ относительно пары операций $(\cap, \cup)$, рассматриваемых как операции умножения и сложения, образует алгебру. В частности, для операций $(\cap, \cup)$ будут выполняться свойства коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, идемпотентности (см. табл. 1.1).

В отличие от алгебры неразмытых множеств алгебра нечетких множеств $(\mathcal{F}(X), \cap, \cup)$ не будет булевой алгеброй [Владимиров, 1969], поскольку для нее не выполняется свойство дополнительности относительно унарной операции дополнения $\neg$, т.е. $A \cup \neg A \neq X$ (закон исключенного третьего) и $A \cap \neg A \neq \varnothing$ (закон противоречия). Тем не менее в алгебре $(\mathcal{F}(X); \cap, \cup, \neg)$ выполняются законы инволюции ($\neg(\neg A) = A$) и де Моргана ($\neg(A \cup B) = (\neg A) \cap (\neg B)$, $\neg(A \cap B) = (\neg A) \cup (\neg B)$). Алгебра нечетких множеств $(\mathcal{F}(X); \cap, \cup, \neg)$, для унарной операции $\neg$ которой выполняется закон инволюции и правило де Моргана, называется алгеброй де Моргана или мягкой алгеброй [Wang et al., 2009].

Для операций $(\cdot, +)$ свойства дистрибутивности и идемпотентности, так же как и свойство дополнительности, вообще говоря, не выполняются (см. табл. 1.1), но выполняются законы де Моргана.

Таблица 1.1

Свойства операций над нечеткими множествами

Свойства	$(\cap, \cup)$	$(\cdot, +)$
1. Коммутативность	$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$	$A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$
2. Ассоциативность	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
3. Дистрибутивность	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cdot (B + C) \neq (A \cdot B) + (A \cdot C)$, $A + (B \cdot C) \neq (A + B) \cdot (A + C)$
4. Идемпотентность	$A \cup A = A$, $A \cap A = A$	$A + A \neq A$, $A \cdot A \neq A$
	$A \cup X = X$, $A \cap X = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$	$A + X = X$, $A \cdot X = A$, $A + \varnothing = A$, $A \cdot \varnothing = \varnothing$

Вместе с парами операций $(\cap, \cup)$ и $(\cdot, +)$ рассматриваются и другие пары операций над нечеткими множествами (а также другая унарная операция «дополнения»), относительно которых множество $\mathcal{F}(X)$ обладает рядом «хороших» алгебраических свойств. Подробнее об этом см. в главе 3.

1.3. Методы построения функций принадлежности нечетких множеств

Одно из «слабых» мест теории нечетких множеств — известный произвол в выборе функций принадлежности элементов нечеткому множеству. Похожая проблема есть и в теории вероятностей, но там вероятностная мера подчинена «жесткой» аксиоме аддитивности. Кроме того, в теории вероятностей существуют различные подходы к вычислению оценок вероятностных распределений: от классического статистического подхода до теоретико-игрового подхода [Shafer, Vovk, 2001].

Тем не менее и в теории нечетких множеств существуют определенные методы построения функции принадлежности μ_A нечеткого множества A, определенного на универсальном множестве X. Прежде всего можно выделить два подхода в соответствии с тем, какой источник данных используется. Это — построение функции принадлежности:

- по массивам данных;
- по экспертным оценкам.