Содержание

Предисловие

Слова «дискретная математика», входящие в название данной книги, употребляют в разных значениях. Иногда противопоставляют «дискретную» математику, рассматривающую конечные или, по крайней мере, хорошо различимые объекты, и «непрерывную», где речь идёт о действительных числах, пределах, непрерывности, производных и т. п. Хотя это противопоставление условно и не всегда применимо (скажем, странно было бы разделять «дискретные» алгебраические кривые над конечным полем и «непрерывные» алгебраические кривые над полем комплексных чисел), некоторый смысл оно имеет.

Говоря о «советской школе дискретной математики», имеют в виду немного другое — прежде всего пионерные работы 1950-х и 1960-х годов (О.Б. Лупанов и его школа) по анализу булевых функций, их классов, обобщений на многозначную логику и др.

Наконец, «дискретная математика» как учебный предмет на младших курсах — это сборная солянка из разных понятий и результатов, которые являются частью базовой математической культуры и необходимы будущим математикам и программистам, но не входят в традиционно сложившиеся курсы начального математического цикла (анализ, алгебра, линейная алгебра).

Именно в этом смысле слова «дискретная математика» используются в названии этой книги, представляющей собой расширенные записки лекций, которые читались на факультете компьютерных наук Высшей школы экономики. Получилась она разнородной: некоторые темы (скажем, про математическую индукцию или про комбинаторику) — это то, что вполне могло бы изучаться в школе и даже когда-то изучалось[1]. В других случаях целью является освоение некоторого языка (скажем, что такое пересечение множеств или бинарное отношение). Или это может быть прологом к рассказу о некоторой математической теории, попыткой выделить какое-то минимальное содержательное начало, которое имело бы смысл рассказать даже тем, кто в дальнейшем с этим не столкнётся. Или просто какой-то красивый результат, который трудно найти доступно изложенным.

В каждую лекцию (в реальности это могло быть несколько лекций) мы старались включить и достаточно трудный материал, чтобы

[1] «Гимназист бойко выводил какую-то формулу, со стуком ломая мел о доску, и всё писал, несмотря на то, что профессор уже сказал ему: “Довольно”, — и велел нам взять билеты. “Ну что, ежели достанется теория сочетаний!” — подумал я, доставая дрожащими пальцами билет из мягкой кипы нарезанных бумажек» (*Толстой Л.* Юность // Детство. Отрочество. Юность. Глава XI. Экзамен математики). Странно, но потом герой повести с успехом отвечает про бином Ньютона.

подготовленным студентам не было скучно. При этом мы не рассчитывали на то, что всё это сразу поймут. Такие более трудные места можно и нужно пропускать, если они кажутся непонятными, и двигаться дальше.

Изложение сопровождается задачами. Часть из них — это вопросы к слушателям для проверки понимания на лекциях, другие — разбирались на семинарах и включались в домашние задания, третьи — могут быть предметом самостоятельной работы для заинтересовавшихся студентов и указанием на возможное развитие темы. Некоторые задачи (и даже целые разделы книги) помечены звёздочкой. Так обозначается материал повышенной трудности, его можно смело пропускать при первом чтении. В общем, как говорил классик, *прими собранье пёстрых глав*...

Черновики книги были использованы в преподавании курса «Дискретная математика» на факультете компьютерных наук ВШЭ в 2014–2018 гг. Авторы признательны всем преподавателям и студентам, которые указывали на замеченные неточности в тексте. Практически невозможно вспомнить всех поимённо. Особо отметим А. Ж. Бусурманкулова, В. Ю. Батурина, В. И. Бубнову, С. В. Булгакова, Е. В. Дашкова, Р. Е. Кизилова.

Авторы также благодарны В. А. Тиморину, который сделал много важных замечаний.

Скорее всего, не все неточности и ошибки в книге исправлены, они остаются на совести авторов. Мы будем благодарны тем читателям, которые заметят эти неточности и сообщат нам о них.

Часть I

Начальные примеры

1

ЛЕКЦИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Математики часто говорят о «доказательствах по индукции», «принципе математической индукции» и так далее — ничего сложного в этом нет, но нужно к этому привыкнуть. С этим приёмом рассуждений мы будем часто сталкиваться, начнём с простых примеров.

1.1. ЗАДАЧА О РАСКРАСКЕ ПЛОСКОСТИ

Задача 1.1. На плоскости проведено несколько прямых. Они делят плоскость на области. Докажите, что области можно так раскрасить в два цвета, чтобы соседние области были покрашены в разные цвета.

Соседними считаются области, имеющие общий участок границы (отрезок или луч, точка не считается).

На рис. 1.1 показана такая раскраска для одной, двух и трёх прямых. Примерно такое обычно рисуют школьники, когда решают эту задачу на математическом кружке, — и часто считают, что решили задачу: показали, что раскрасить можно. И действительно, раскраска удовлетворяет поставленным требованиям. Что не так с этим «решением»?

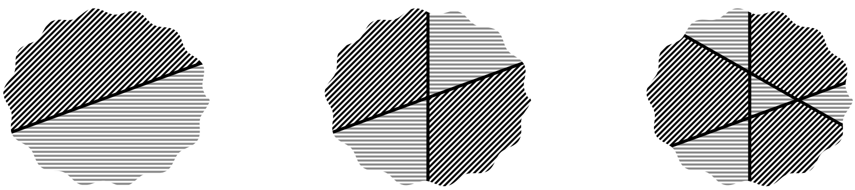

Рис. 1.1. Примеры раскраски для одной, двух и трёх прямых

Проблема в том, что разобраны не все варианты. Для одной прямой действительно ничего другого быть не может, но уже для двух прямых возможна ситуация, когда они параллельны. (Понятно, как тогда красить?)

Для трёх прямых вариантов ещё больше: некоторые из прямых могут быть параллельными, все три прямые могут проходить через одну точку. Попробуйте перечислить все возможные варианты и убедиться, что в каждом случае требуемая раскраска существует. Нужно быть внимательным, чтобы ничего не пропустить, — и чем больше прямых, тем сложнее. Видно, что перебором вариантов задачу не решить, тем более что число прямых может быть сколь угодно большим. Как же быть?

«Ну, хорошо, — скажет школьник, недовольный тем, что его решение забраковали. — Давайте я объясню, как раскрашивать в общем случае. Выберем какую-то область и покрасим её в какой-то цвет. Тогда соседние области нужно красить в другой цвет, их соседей — снова в первый, и так постепенно всё закрасим. Хотите, нарисуйте прямые, и я так всё закрашу.»

Что на это может возразить преподаватель? Ведь действительно, если нарисовать какие угодно прямые, таким способом можно найти требуемую раскраску. Так что, теперь задача решена?

Увы, нет. Проблема в том, не придём ли мы к противоречию. Представьте себе, что мы закрасили начальную область в один цвет, её соседей в другой, соседей соседей снова в первый, и так далее, но, дойдя до какой-то области, обнаружили, что она уже граничит с областями разных цветов, и её нельзя закрасить ни так, ни этак. «Такого не может быть», — скажет школьник, и он действительно прав в том смысле, что так не бывает. Но это пока не доказано. И, скажем, если бы мы рассматривали не прямые, а лучи, то проблема бы действительно возникла (попробуйте закрасить области на рис. 1.2). А предложенное «решение» с постепенной раскраской никак не использует то, что у нас именно прямые.

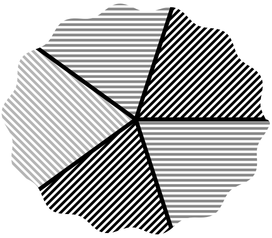

Рис. 1.2. Пять областей нельзя правильно раскрасить в два цвета

Идею с постепенной раскраской можно довести до конца[1], но сейчас мы хотим показать рассуждение по индукции. Рассуждая по индукции, мы идём, так сказать, «от простого к сложному» и постепенно увеличиваем число прямых. Попробуем понять, что происходит при добавлении одной прямой. Пусть есть набор прямых и области, на которые они разбили плоскость, уже покрашены как требуется (рис. 1.3, левый).

Проведём ещё одну прямую (рис. 1.3, средний). Для новой конфигурации старая раскраска не годится, потому что по сторонам этой прямой области одинаковой раскраски. Как исправить положение? Если мы поменяем штри-

[1] Скажем коротко, как это делается. Идя от соседа к соседу, мы меняем штриховку. Проблема возникнет, если на одном пути будет чётное число границ, а на другом нечётное. Тогда при обходе туда — обратно мы вернёмся, пересекши в сумме нечётное число границ, а каждую прямую мы должны пересекать чётное число раз, переходя из одной полуплоскости в другую и возвращаясь обратно — возникает противоречие.

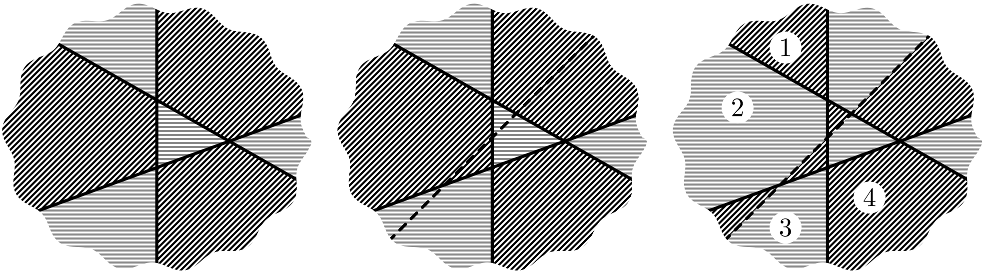

Рис. 1.3. Добавление прямой

ховку у одного из получившихся кусков и сохраним у другого, то в этом месте проблема будет решена, но потом придётся изменять её и в других областях, и где гарантия, что мы снова не придём к противоречию?

Будем действовать более глобально. Изменим штриховку на противоположную у *всех* областей по одну сторону от новой прямой (рис. 1.3, правый, где штриховки поменялись у областей сверху от новой прямой). Мы утверждаем, что теперь получится правильная раскраска (если, конечно, перед добавлением прямой раскраска была правильной). Почему?

Это надо действительно объяснить, иначе к нам можно будет предъявить те же претензии, которые мы раньше предъявляли к школьнику: сформулированное утверждение не доказано. Давайте попробуем. Требование задачи состоит в том, что любой участок границы теперь разделяет области разных штриховок. Граница может быть либо на новой прямой, либо на старой. Случай первый: граница на новой прямой. В старой раскраске области с двух сторон были одной штриховки, а теперь мы с одной стороны изменили её, так что получились области разной штриховки. Случай второй: граница на старой прямой. Тогда мы либо оставили штриховки как было (если изменили её с другой стороны от новой прямой, области 3 и 4 на рис. 1.3), либо изменили оба её вида (области 1 и 2 на том же рисунке), но и тогда штриховки останутся разными, только поменяются местами.

Что осталось сказать, чтобы закончить решение задачи? Для одной прямой утверждение задачи очевидно. Добавив вторую прямую и перекрасив области с одной стороны от неё, мы получим решение для двух прямых. При этом не важно, как именно пройдёт вторая прямая (будет она параллельна первой или нет). Теперь можно добавить третью прямую (снова не важно, как именно она проходит) и перекрасить области с одной стороны, и так далее. В конце концов можно получить раскраску для любого числа прямых.

Программисты сказали бы, что мы описали алгоритм построения требуемой раскраски (рис. 1.4). Пусть нам дана произвольная конфигурация из n прямых. Пронумеруем эти прямые от 1 до n и будем добавлять их постепенно («в цикле»). Добавив очередную прямую, мы перекрашиваем все области с одной стороны от неё, восстанавливая правильность раскраски («инвариант цикла», как говорят программисты). Так делаем, пока все n прямых не будут добавлены.

```
k = 1
нарисовать одну прямую и закрасить две полуплоскости разными штриховками
// имеется правильная раскраска для k прямых
while k ≠ n {
        добавить (k + 1)-ю прямую
        изменить штриховки всех областей с одной её стороны
        k = k + 1
}
```

Рис. 1.4. Алгоритм построения раскраски для n прямых

Математики, конечно, будут несколько удивлены таким изложением (и вздрогнут, увидев «равенство» $k = k + 1$). Более привычное для них изложение выглядит так.

Докажем индукцией по n, что *требуемая раскраска существует для всех конфигураций из n прямых*. Назовём это утверждение A_n, где n — параметр индукции.

Базис индукции. При $n = 1$ утверждение A_1 очевидно: прямая делит плоскость на две полуплоскости, которые можно покрасить разными штриховками (рис. 1.1, левый).

Шаг индукции. Пусть мы уже знаем, что A_n верно. Докажем, что верно A_{n+1}. Рассмотрим произвольную конфигурацию из $(n + 1)$ прямых. Надо доказать, что существует раскраска, удовлетворяющая условию задачи. Выберем какую-то одну прямую (можно взять любую) и временно её удалим. Получится конфигурация из n прямых. Согласно A_n, для неё есть раскраска, удовлетворяющая условию. Теперь вернём удалённую прямую на место и изменим раскраску в одной из полуплоскостей (с одной стороны от удалённой и возвращённой прямой). Получится требуемая раскраска для $(n + 1)$ прямых. (Тут надо повторить рассуждения про два типа границ и про то, почему с обоими типами всё будет в порядке.)

С помощью шага индукции можно перейти от A_1 (базис индукции) к A_2, значит, A_2 тоже верно (для любых двух прямых есть раскраска). Теперь снова применим шаг индукции, но уже при $n = 2$: раз A_2 верно, то верно и A_3. И так далее: раз A_3 верно, то верно и A_4, затем A_5 и т. п.

1.2. ОБЩАЯ СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ПО ИНДУКЦИИ

Давайте повторим схему рассуждения из предыдущего раздела. Доказательства по индукции применяются, когда есть последовательность утверждений A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_n, $\ldots$, и мы хотим доказать, что все они верны. Принцип индукции говорит, что для этого достаточно сделать две вещи:

- **Базис индукции:** надо доказать, что A_1 (первое утверждение в цепочке) верно.
- **Шаг индукции:** надо доказать (для произвольного n), что A_{n+1} верно, предполагая известным, что A_n верно.

Шаг индукции ещё называют «индуктивным переходом», и даже понятно почему — откуда и куда мы переходим: от A_n к A_{n+1}. Ещё говорят, что при этом переходе мы должны доказать «следование»: доказать, что из A_n следует A_{n+1}. Записывают это следование как «$A_n \Rightarrow A_{n+1}$», и шаг индукции состоит в доказательстве (при произвольном n) утверждения $A_n \Rightarrow A_{n+1}$.

Понятно ли, почему такая схема рассуждения законна? Смотрите: мы доказали A_1 (базис). Кроме того, мы доказали, что из A_1 следует A_2 (шаг индукции при $n=1$). Значит, A_2 тоже верно. Теперь используем шаг индукции при $n=2$: из A_2 следует A_3. Значит, и A_3 верно. И так далее — мы постепенно дойдём до любого A_n.

Тут люди с философским складом ума спросят: а почему, собственно, мы дойдём до любого натурального числа n? Вот мы прибавляем единицу и прибавляем — а вдруг до какого-то n так дойти нельзя в принципе? Или даже более конкретно: если $n=10^{1000}$, то ясно, что на практике дойти до такого n нереально (время жизни Вселенной существенно меньше). И что? На этот вопрос трудно ответить убедительно, потому что за ним тянутся другие: а что такое вообще натуральное число? Что такое число «семь», можно показать на пальцах, а для 10^{1000} никаких пальцев не хватит — и почему мы уверены, что такое число есть? И где, собственно говоря, оно есть? И какие способы рассуждений о натуральных числах допустимы? И почему мы уверены, что не получим какую-то ерунду? Такие вопросы изучаются в математической логике. Мы не будем даже пытаться пересказать ответы на них. Скажем лишь, что в математической логике принцип математической индукции — одна из аксиом натурального ряда (что бы это ни значило).

Вместо этого мы ещё раз продемонстрируем принцип математической индукции в действии и то, как принято записывать рассуждения с его использованием.

Теорема 1.1. *При любом $n \geqslant 1$ выполнено равенство:*

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство. Обозначим это равенство через A_n и докажем его по индукции.

Базис индукции (A_1):
$$1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2},$$
очевиден.

Шаг индукции. Предположим, что A_n верно, т. е.
$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Прибавим к обеим частям этого верного равенства число $(n+1)$, получим
$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \\ = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$
т. е. A_{n+1} (надо только переставить сомножители). Шаг индукции и тем самым всё доказательство завершены. ■

Часто, говоря о рассуждениях по индукции, приводят разные житейские примеры. Почему в автобус можно запихнуть любое количество людей? Потому что один человек туда войдёт, и каким бы полным автобус ни был, всегда можно потесниться и впихнуть ещё одного человека. В порядке занудства скажем, что здесь утверждение A_n состоит в том, что в автобус можно поместить n человек, базис индукции — про одного человека, а индуктивный переход соответствует запихиванию ещё одного. Рассуждение это приводит к неверному результату (тысячу человек в автобус явно не запихнуть), потому что сформулированный в качестве шага индукции принцип «всегда можно потесниться» неверен.

Другой житейский пример: если первым в очереди стоит студент, и за каждым студентом в очереди стоит студент, то все в очереди — студенты. Понятно, в чём состоит A_n, где здесь базис и каков индуктивный переход?

Может быть, вы в детстве выстраивали кости домино в цепочку — если первую кость толкнуть, то она упадёт на вторую, вторая — на третью, третья — на четвёртую, и они все рухнут. (Таких видео много в Интернете.) Можно сказать, что примерно так же происходит и рассуждение по индукции: базис индукции — это когда мы толкаем первую кость, а шаг индукции — когда n-я кость, падая, сбивает $(n+1)$-ю.

Или представьте себе цепочку островов в море. Если (базис индукции) построить мост с материка на первый остров, а затем (шаг индукции) построить мосты с n-го острова на следующий, $(n+1)$-й, то на любой остров можно будет попасть. В этой схеме следование $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ соответствует мосту: благодаря ему если мы можем попасть на n-й остров, то можем попасть и на $(n+1)$-й.

1.3. ВАРИАНТЫ РАССУЖДЕНИЙ ПО ИНДУКЦИИ

1.3.1. С ЧЕГО НАЧИНАТЬ?

В наших примерах мы начинали с единицы, но это совсем не обязательно. Пусть, скажем, мы хотим сравнить, какое число больше: 2^n или n^2. Посмотрим на несколько первых значений:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128

Возникает впечатление, что при малых n бывает больше то одно, то другое, а потом 2^n уверенно обгоняет. То есть первые значения 2^n и n^2 подсказывают, что справедливо такое утверждение.

Теорема 1.2. $2^n \geqslant n^2$ *при* $n \geqslant 4$.

Как это доказать? Вдруг когда-нибудь потом n^2 начнёт быстро расти и наверстает упущенное, хотя это и кажется странным? Тут снова помогает рассуждение по индукции, только начинать надо с $n = 4$.

Доказательство. Рассмотрим утверждения

$$2^n \geqslant n^2 \qquad (A_n)$$

при $n = 4, 5, 6, 7, \ldots$ Рассуждая по индукции, докажем, что первое из них (т. е. A_4) верно (базис индукции) и что из A_n следует A_{n+1} при $n \geqslant 4$ (шаг индукции).

Базис очевиден ($16 \geqslant 16$). Проведём шаг индукции. Для этого посмотрим, во сколько раз увеличиваются 2^n и n^2 при переходе от n к $n+1$. Первое выражение увеличивается в 2 раза, а второе — в

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

раз. При $n \geqslant 4$ это выражение не больше $1{,}25^2 < 2$, поэтому правая часть увеличивается меньше, чем в 2 раза, и не может превысить левую.

Более формально: пусть $2^n \geqslant n^2$, тогда

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geqslant n^2 \cdot 2 \geqslant n^2 \cdot (1{,}25)^2 \geqslant n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{n^2} = (n+1)^2.$$

Дальше рассуждение по индукции происходит как раньше: мы знаем, что A_4 верно и из A_4 следует A_5, поэтому и A_5 верно; поскольку из A_5 следует A_6, то и A_6 верно, и т. д. ■

Другими словами, не обязательно начинать индукцию с единицы. Можно начинать и с любого большего числа, и с нуля (который часто тоже считают натуральным числом). В результате утверждение будет доказано для всех натуральных чисел, не меньших того, с которого мы начали.

Задача 1.2. Докажите, что при больших n (выберите границу сами) выполнено неравенство $2^n > n^3$. Тот же вопрос для $1{,}001^n > n^2$ и $n! > 100^n$.

1.3.2. СВЕДЕНИЕ К МЕНЬШИМ

Мы записывали шаг индукции как переход от A_n к A_{n+1}, но можно было бы записать его и как переход от A_{n-1} к A_n. Это ничего не меняет по существу, но формулы станут немного другими. Скажем, для суммирования мы должны были бы из

$$1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)}{2}$$

получить

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Понятно, как это сделать, прибавив n?

В таких обозначениях легче объяснить, в чём польза от метода математической индукции. Нас просят доказать A_n для произвольного n. Индукция даёт нам некоторое послабление и разрешает принять на веру предыдущее утверждение A_{n-1} (если оно есть). Ясное дело, что от этого наша задача может стать легче. Опять же вернёмся к примеру с суммированием: найти сумму $1+2+\ldots+(n-1)+n$ становится легче, если нам разрешено использовать формулу для $1+2+\ldots+(n-1)$ (достаточно прибавить n).

Можно пойти ещё немного дальше и разрешить себе использовать не одно, а *все* предыдущие утверждения. Это изменит шаг индукции следующим образом.

- **Шаг индукции:** надо доказать (для произвольного n), что утверждение A_n верно, предполагая что все предыдущие утверждения ($A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$) верны.

Такой вариант принципа индукции не меняет сути дела: раньше мы доказывали, что A_n верно исходя из того, что верно A_{n-1}, а поскольку n было произвольным, то, перед тем как доказать, что верно A_{n-1}, мы доказали, что верно A_{n-2}, и так вплоть до утверждения A_2, которое следует из утверждения A_1, истинность которого мы установили, доказав базис.

Более того, в такой формулировке можно даже не разделять базис индукции и шаг индукции: когда мы доказываем A_1, «принимая на веру все предыдущие», этих самых «всех предыдущих» нет, принимать на веру нечего, и мы должны доказать A_1 «с чистого листа», что и даёт базис индукции.

Много лет назад, когда в ходу были трёх- и пятикопеечные монеты (последние называли «пятаки»), этот приём было легко проиллюстрировать такой задачей.

Задача 1.3. Докажите, что любое целое число копеек, начиная с восьми, можно заплатить такими монетами.

Понятно, как это доказать? Начнём пробовать: $8=3+5$, $9=3+3+3$, $10=5+5$, но что дальше? А дальше можно добавлять одну трёхкопеечную монету и из 8 получится 11, из 9 получится 12, из 10 получится 13, потом из 11 получится 14 и т. д.

Более формально это рассуждение можно пересказать так. Мы должны доказать утверждение A_n: *можно заплатить n копеек монетами в 3 и 5 копеек* при всех $n \geqslant 8$. При этом, рассуждая по индукции, считаем известными все предыдущие утверждения A_m (при $8 \leqslant m < n$). Тут есть четыре случая:

- $n=8$: платим $5+3$;
- $n=9$: платим $3+3+3$;
- $n=10$: платим $5+5$;
- $n \geqslant 11$: тогда $m=n-3$ будет больше или равно 8 и меньше n; рассуждая по индукции, мы считаем, что A_m уже известно, т. е. что m копеек уплатить можно, и осталось добавить одну трёхкопеечную монету, чтобы заплатить $m+3=n$.

Вот ещё один пример задачи, когда полезно использовать *все* предыдущие утверждения, а не только последнее.

Задача 1.4. Пусть выпуклый 1000-угольник разрезан на треугольники диагоналями, которые не пересекаются во внутренних точках (но могут иметь общие вершины). Докажите, что получилось 998 треугольников.

Будем доказывать это по индукции — точнее, конечно, не это, а общее утверждение о том, что если выпуклый n-угольник (при $n \geqslant 3$) разрезан на треугольники диагоналями, то этих треугольников $n-2$. Итак, докажем это для какого-то n, считая известным для всех меньших n. Посмотрим на какую-то диагональ, по которой разрезали. (Если диагоналей нет, то $n=3$ и этот треугольник уже разрезан на $(n-2)$ треугольников.) Представим себе, что по этой диагонали разрезали первой. Что тогда получится? С одной стороны будет какой-то k-угольник, а с другой стороны — какой-то l-угольник. Оба числа k и l будут меньше n. При этом $k+l$ будет равно $n+2$, поскольку, считая вершины сначала k-угольника, а потом l-угольника, мы посчитаем все вершины многоугольника, причём концы диагонали посчитаем дважды. По предположению индукции при разрезании на треугольники получится $(k-2)$ и $(l-2)$ треугольников, всего $(k-2)+(l-2)=k+l-4=(n+2)-4=(n-2)$ треугольников, что и требовалось доказать.

1.3.3. ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА: ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ЧИСЛА

То же самое решение задачи про монеты можно изложить, и не упоминая индукцию. Будем рассуждать, как говорят математики, от противного. Предположим, что утверждение неверно, и покажем, что такого быть не может: что-то с чем-то не сойдётся («придём к противоречию»).

Пусть не при всех $n \geqslant 8$ сумму в n копеек можно заплатить трёх- и пятикопеечными монетами. *Возьмём наименьшую сумму, которую заплатить нельзя*. Пусть это будет какое-то n. Может ли n быть равно 8, 9 или 10? Нет, потому что мы знаем, как заплатить столько. Значит, $n \geqslant 11$ и $n-3 \geqslant 8$. Поскольку n было наименьшим «плохим» числом (которое нельзя заплатить) среди чисел от 8, то $(n-3)$ заплатить можно. В чём противоречие? Понятно: $(n-3)$ заплатить можно, а n нельзя, хотя видно, что можно (надо добавить трёхкопеечную монету к $(n-3)$).

По существу, это то же самое рассуждение, но только ссылку на принцип индукции мы заменили ссылкой на следующий принцип.

Принцип наименьшего числа. Если есть натуральные числа, обладающие каким-то свойством, то найдётся и наименьшее число с этим свойством.

В приведённом примере мы использовали свойство «неуплачиваемости». Этот принцип равносилен принципу математической индукции[2].

1.4. КАК НЕ НАДО

В жизни всегда есть место ошибкам, и рассуждения по индукции — не исключение. Мы сейчас приведём несколько (намеренно) неверных рассуждений, надеясь, что вы проявите бдительность и скажете: «Какая глупость, здесь же [...]», — указав на ошибку.

Пример 1.5. Докажем, что любое натуральное число n больше 100. В самом деле, принцип индукции позволяет это доказывать, считая известным это утверждение для всех меньших чисел. В частности, мы можем предполагать, что утверждение верно для $n-1$, т. е. $n-1>100$. Тогда $n>101$ и тем более $n>100$, что и требовалось доказать.

Понятно, где тут обман? Вот чуть более сложный пример.

[2] Эта формулировка о равносильности на самом деле требует уточнений. Что значит, что два принципа равносильны, если каждый из них очевиден? Равносильны ли утверждения $2\times 2=4$ и $3\times 3=9$? Уточнение может быть сделано по-разному, один из вариантов мы обсудим в лекции 9.