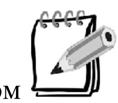
# ПРЕДИСЛОВИЕ

Тетрадь-тренажёр представляет собой пособие по решению задач, предназначеное помочь учащимся освоить углублённую школьную программу по математике. Задачи разбиты на пять разделов в соответствии с программой: элементы тригонометрии в геометрии; векторный метод; метод координат; правильные многоугольники, длина окружности и площадь круга; преобразования плоскости. В каждом разделе предложены задачи для отработки навыков решения основных типов задач. Задачи носят скорее технический, чем качественный характер, но владение техническими навыками очень часто помогает в решении качественных задач. Кроме того, в пособии предлагаются и вопросы качественного характера, но таких задач меньше. Для достижения устойчивого результата почти в каждом задании предлагается несколько однотипных задач или несколько разных задач, обыгрывающих один и тот же вопрос.

Данная тетрадь-тренажёр является продолжением аналогичного пособия для 7 и 8 классов, а также серии тетрадей-тренажёров для базовой программы по математике. Это пособие не заменяет учебник (с большим количеством объяснений теоретических аспектов) и сборники задач, ориентированных на учебники, но гармонично дополняет их. Некоторые задания обучающимся по углублённой программе могут показаться простыми. Но для успешного решения более сложных задач навык решения основных типов «простых» задач должен быть доведён почти до автоматизма.

Для удобства оформления решений задачи сгруппированы в таблицы. При этом предполагается, что решения будут выполняться непосредственно в этой тетради. Такое оформление упрощает проверку результатов учителем и обучающимся.

Каждый раздел содержит теоретические сведения, которые отмечены знаком , задания для отработки навыков и задания «Проверьте себя» для проверки степени усвоения материала (к последним в конце пособия в основном приведены ответы и подсказки к решению). В некоторых заданиях приведены примеры решения задач (такие примеры выделены серым цветом). Задания предполагается выполнять последовательно, что способствует достижению лучшего результата.

При выполнении заданий обучающиеся выполняют большую работу, но при этом предложенный способ оформления решений упрощает учителю проверку результатов. Легко организовывать перекрёстную проверку учениками.

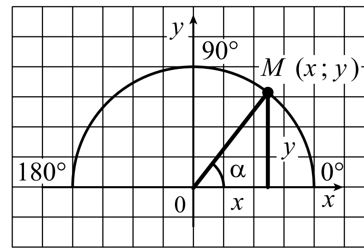
Тетрадь-тренажёр удобна в использовании на уроках, для выполнения домашних заданий, для отработки материала учащимися, вынужденно пропустившими занятия. Она также поможет повторить материал 9-го класса при подготовке к экзаменам.

# ТРИГОНОМЕТРИЯ

## Определение тригонометрических функций углов треугольника

*Важно знать:*

*В прямоугольной системе координат Oxy на единичной полуокружности (радиус равен 1) выберем точку M (x; y). Для любого угла α из промежутка* $0° \le \alpha \le 180°$*:*




• ***синусом угла*** *α называется ордината точки M;*

$$0 \le \sin\alpha \le 1.$$

• ***косинусом угла*** *α называется абсцисса точки M;*

$$-1 \le \cos\alpha \le 1\text{; } \cos\alpha \ge 0 \text{ при } 0° \le \alpha \le 90°\text{;}$$

$$\cos\alpha \le 0 \text{ при } 90° \le \alpha \le 180°.$$

• ***тангенсом угла*** *α (* $\alpha \ne 90°$ *) называется отношение синуса угла α к косинусу угла α;*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}0° = 0,\ \operatorname{tg}90° \text{ не определён, } \operatorname{tg}180° = 0.$$

• ***котангенсом угла*** *α называется отношение косинуса угла α к синусу угла α;*

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}0° \text{ не определён, } \operatorname{ctg}90° = 0,\ \operatorname{ctg}180° \text{ не определён.}$$

***Основное тригонометрическое тождество*** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

*Значит, для допустимых углов* $1 + \sin^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$; $1 + \cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

***Формулы приведения:***

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha, \text{ при } 0° \le \alpha \le 90°;$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha, \text{ при } 0° \le \alpha \le 180°.$$

**Задание 1**

Заполните таблицу, если известно, что $\alpha < 90°$.

| $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
|---|---|---|---|
| | $\frac{8}{17}$ | | |
| $\frac{1}{5}$ | | | |
| | | $\frac{4}{3}$ | |
| | | | $\frac{5}{12}$ |
| | 1 | | |

**Задание 2**

Заполните таблицу, указав неизвестные величины, если известно, что $\alpha \geq 90°$.

| **sin α** | **cos α** | **tg α** | **ctg α** |
|---|---|---|---|
| | $-\frac{3}{5}$ | | |
| $\frac{5}{13}$ | | | |
| | | $-\frac{2}{3}$ | |
| | | | $-\frac{5}{4}$ |
| 0 | | | |

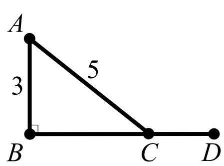
**Задание 3**

Найдите указанную величину, записав решение.

*Важно помнить*: в прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $B$

$$\sin A = \frac{BC}{AC}\,;\ \cos A = \frac{AB}{AC}\,;\ \mathrm{tg}A = \frac{BC}{AB}\,;\ \mathrm{ctg}A = \frac{AB}{BC}\,.$$

1) $\cos ACB$



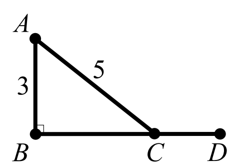

По теореме Пифагора для прямоугольного $\Delta ABC$

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{25-9} = 4$.

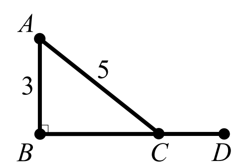
Тогда $\cos ACB = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$.

**Ответ**: $\frac{4}{5}$ (или 0,8).

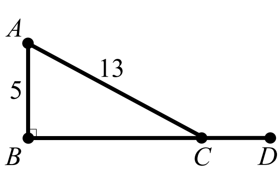
2) $\cos CAB$



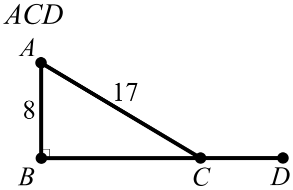

3) $\sin DCA$



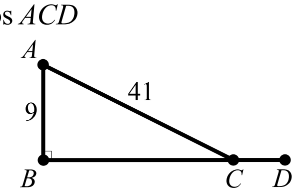

4) tg $CAB$



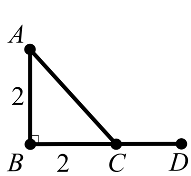

5) ctg $ACD$



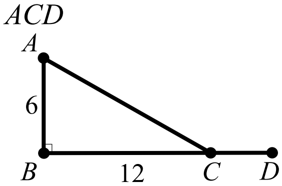

6) $\cos ACD$



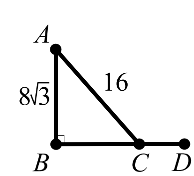

7) $\sin ACB$




8) $\cos ACD$




9) tg $ACD$

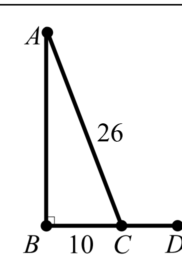


**Задание 4**
Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

| | |
|---|---|
| 1) В прямоугольном треугольнике синус острого угла равен отношению длины катета, противолежащего данному углу, к длине гипотенузы | |
| 2) В прямоугольном треугольнике котангенс острого угла равен отношению длины катета, противолежащего данному углу, к длине катета, прилежащего данному углу. | |
| 3) Для допустимых углов верна формула $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ | |
| 4) Котангенс угла $90^\circ$ не определён | |
| 5) Синус угла треугольника может быть равен –0,5 | |
| 6) Тангенс угла треугольника может быть равен $\frac{145}{13}$ | |
| 7) Синус угла $37^\circ$ равен косинусу угла $53^\circ$ | |
| 8) Косинус угла $42^\circ$ равен синусу угла $132^\circ$ | |
| 9) Существует тупой угол, тангенс и котангенс которого равны | |
| 10) Существует тупой угол, синус и косинус которого равны | |
| 11) $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}$ | |
| 12) $\operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3}$ | |

Б) Найдите неизвестные величины.

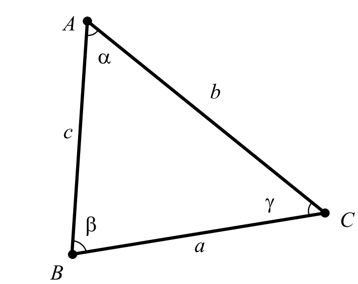
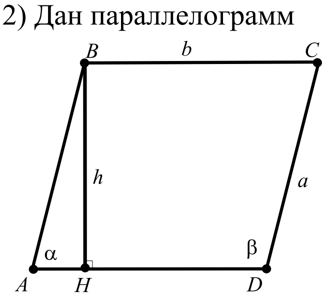
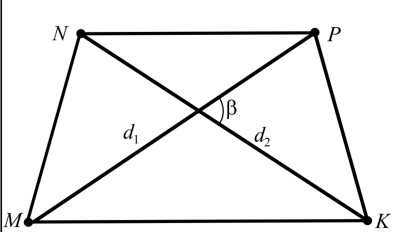
| | | |
|---|---|---|
| 1) $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$<br>$\sin\alpha = ?;\ \operatorname{tg}\alpha = ?$<br><br>**Ответ:** ________________ | 2) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$<br>$\sin\alpha = ?;\ \cos\alpha = ?$<br><br>**Ответ:** ________________ | 3) $\sin DCA$<br><br><br><br>**Ответ:** ________________ |

## Тригонометрия в вычислении площадей

*Важно знать:*

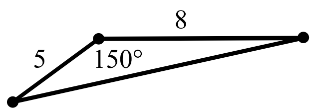
- *Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними:* $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$.
- *Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними:* $S = ab \cdot \sin\alpha$
- *Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними:* $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$

**Задание 5**
Заполните пропуски в таблице.

<table>
<tr><td rowspan="6">1) Дан треугольник<br></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>S</td><td>sinα</td><td>sinγ</td></tr>
<tr><td>8</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td>0,4</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td></td><td>33</td><td>–</td><td>0,6</td></tr>
<tr><td>–</td><td>15</td><td>7</td><td></td><td>2/3</td><td>–</td></tr>
<tr><td>–</td><td>12</td><td>21</td><td>84</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>–</td><td>24</td><td></td><td>1/3</td><td>8/15</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2) Дан параллелограмм<br></td><td>a</td><td>b</td><td>S</td><td>sinα</td><td>sinβ</td><td>h</td></tr>
<tr><td>6</td><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>8</td><td></td><td>0,3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>8</td><td>48</td><td></td><td>0,2</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="5">3) Дан четырёхугольник<br></td><td>d<sub></sub>$d_1$</td><td>$d_2$</td><td colspan="2">sinβ</td><td colspan="2">S</td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td colspan="2">$\frac{1}{3}$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td colspan="2">$\frac{2}{3}$</td><td colspan="2">30</td></tr>
<tr><td>7</td><td>12</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">21</td></tr>
<tr><td></td><td>14</td><td colspan="2">$\frac{1}{4}$</td><td colspan="2">56</td></tr>
</table>

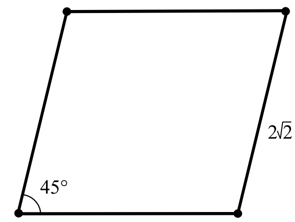
**Задание 6**
Найдите площадь данной фигуры.

1) Дан треугольник.
Найдите $S$



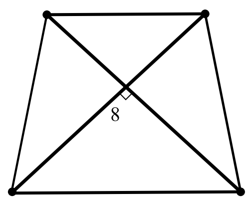

**Ответ:** ____________________

2) Дан ромб.
Найдите $S$



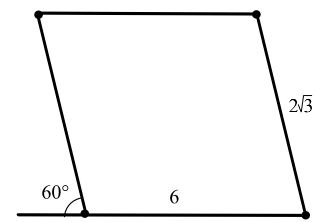

**Ответ:** ____________________

3) Дана трапеция.
Найдите $S$




**Ответ:** ____________________

4) Дан параллелограмм.
Найдите $S$

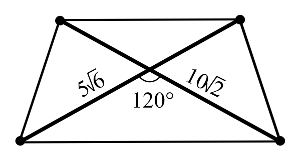



**Ответ:** ____________________

5) Дан равносторонний треугольник.
Найдите $S$

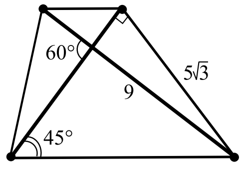

**Ответ:** ____________________

6) Дана трапеция с диагоналями $5\sqrt{6}$ и $10\sqrt{2}$ .
Найдите $S$



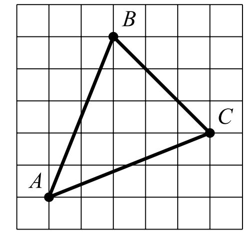

**Ответ:** ____________________

**7)** Дана трапеция.
Найдите $S$




**Ответ:** ____________________

8) Дан треугольник.
Сторона клетки равна 1.
Найдите $\sin ACB$




**Ответ:** ____________________

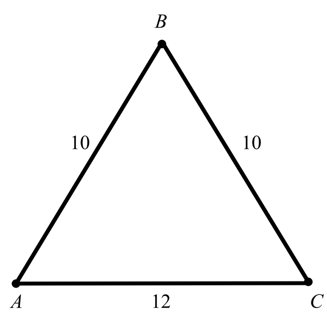
**Задание 7**
Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

| | |
|---|---|
| 1) Существует параллелограмм, площадь которого равна половине произведения его диагоналей | |
| 2) Биссектриса треугольника делит его на два треугольника, площади которых пропорциональны сторонам треугольника | |
| 3) При фиксированных значениях длин диагоналей четырёхугольника площадь этого четырёхугольника будет наибольшей, если диагонали перпендикулярны | |
| 4) При фиксированных длинах двух сторон треугольника его площадь будет увеличиваться при увеличении угла между этими сторонами | |

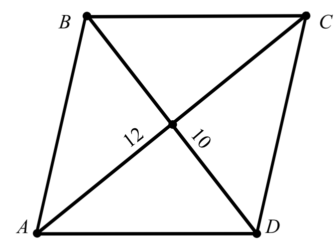
Б) Выполните задания.

1) Дан треугольник. По данным чертежа найдите $\sin ABC$



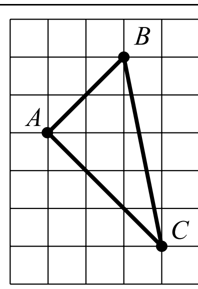

**Ответ:** ____________________

2) Дан ромб с диагоналями 10 и 12.
Найдите $\sin BAD$



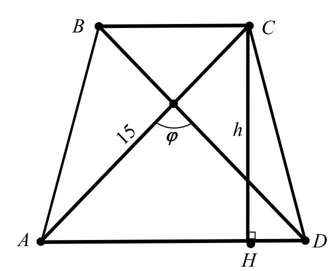

**Ответ:** ____________________

3) Сторона клетки равна 1.
Найдите $\sin ACB$




**Ответ:** ____________________

4) Дана равнобедренная трапеция, $\sin \varphi = \dfrac{24}{25}$.
Найдите $h$

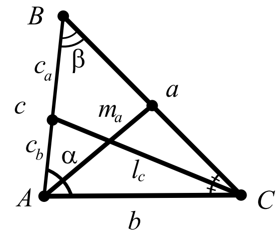



**Ответ:** ____________________

## ТЕОРЕМА СИНУСОВ И КОСИНУСОВ

*Важно знать:*

*В треугольнике ABC*:




- $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ *(теорема синусов со следствием, $R$ – радиус описанной около треугольника окружности)*, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{abc}{4R}$;
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ *(теорема косинусов)*;
- $m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}$ *(формула вычисления длины медианы, длины биссектрисы)*;
- $l_c = \sqrt{ab - c_a c_b}$ *(формула вычисления биссектрисы)*; $a : b = c_a : c_b$ .

*В параллелограмме:*

- $2\left(a^2 + b^2\right) = d_1^2 + d_2^2$ *(a, b – стороны параллелограмма, $d_1$, $d_2$ – его диагонали)*

**Задание 8**

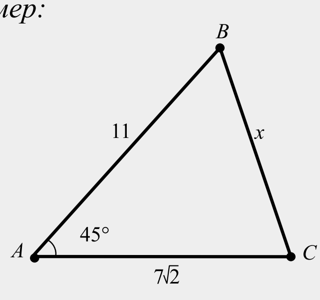
Заполните пустые клетки таблицы, используя теорему синусов.

| ***a*** | ***c*** | α | β | γ | ***R*** |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | $45^\circ$ | | $30^\circ$ | $30^\circ$ |
| 6 | | $135^\circ$ | | | |
| | 10 | $45^\circ$ | $105^\circ$ | | |
| | 12 | | $15^\circ$ | $45^\circ$ | |
| | | | $30^\circ$ | $120^\circ$ | |
| | | $60^\circ$ | $45^\circ$ | | 8 |

**Задание 9**

Вычислите *x*, используя теорему косинусов.

*Пример:*



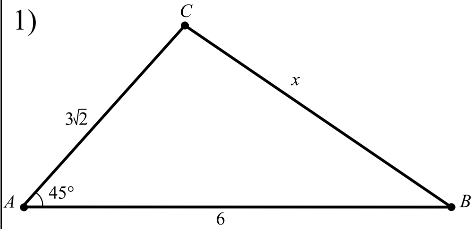
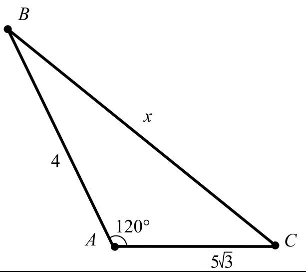
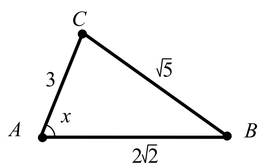
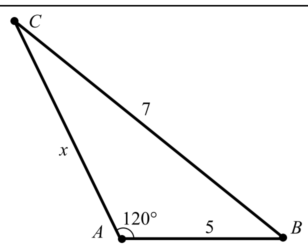
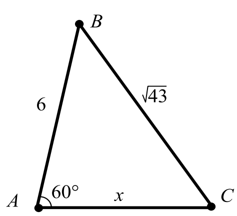
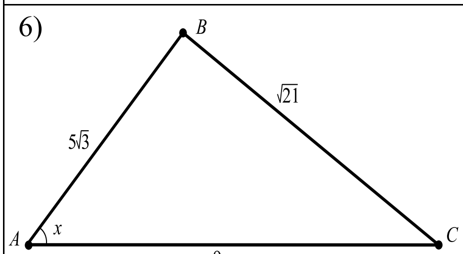
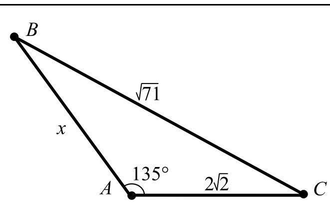
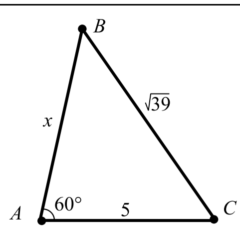

По теореме косинусов выполнено:

$x^2 = 11^2 + \left(7\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 11 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ$ ;

$x^2 = 121 + 98 - 154 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 65$ ;

$x = \sqrt{65}$ .

**Ответ**: $\sqrt{65}$

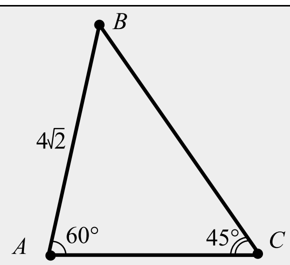
| | |
|---|---|
| 1)  | **Ответ**: ______________ |
| 2)  | **Ответ**: ______________ |
| 3)  | **Ответ**: ______________ |
| 4)  | **Ответ**: ______________ |
| 5)  | **Ответ**: ______________ |
| 6)  | **Ответ**: ______________ |
| 7)  | **Ответ**: ______________ |
| 8)  | **Ответ**: ______________ |

**Задание 10**
Определите вид треугольника по длинам его сторон.

| | | |
|---|---|---|
| *Пример*: $a=5;\ b=4;\ c=2\sqrt{2}$<br>*Решение*.<br>Самая большая сторона – $a$ ;<br>$a^2=25;\ b^2+c^2=24$ .<br>Получаем $a^2>b^2+c^2$ , значит, $\cos\alpha<0$ , тогда $\alpha>90^\circ$ , то есть треугольник – тупоугольный.<br><br>**Ответ**: тупоугольный | 1) $a=11;\ b=8;\ c=9$<br><br>**Ответ**: ____________________ | 2) $a=11;\ b=8;\ c=15$<br><br>**Ответ**: ____________________ |
| 3) $a=11;\ b=8;\ c=5$<br><br>**Ответ**: ____________________ | 4) $a=40;\ b=9;\ c=41$<br><br>**Ответ**: ____________________ | 5) $a=13;\ b=19;\ c=15$<br><br>**Ответ**: ____________________ |

**Задание 11**
Вычислите неизвестные величины по данным чертежа.

*Пример*.
Найдите:
1. $BC$;
2. $R$;
3. $h_c$.




*Решение*:

1. $\dfrac{BC}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$,

откуда $BC=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot\sqrt{2}}=4\sqrt{3}$ ;

2. $R=\dfrac{AC}{2\sin 45^\circ}=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot 2}{2\sqrt{2}}=4$ ;

3. $h_c=BC\cdot\sin 45^\circ=4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$

1) Найдите:
1. $AB$;
2. $R$;
3. $S$;
4. $\sin A$