ГЛАВА I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 1.1. Простейшие тригонометрические неравенства

📖 Неравенство (т.е. соотношение, в записи которого используется один из знаков $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\neq$) называется *тригонометрическим*, если неизвестная величина находится под знаком одной (или нескольких) тригонометрических функций.

Все тригонометрические неравенства можно разделить на две группы:

1) простейшие тригонометрические неравенства;
2) неравенства, сводящиеся к простейшим.

При решении простейших тригонометрических неравенств обычно используют следующие приемы:

1) с помощью тригонометрической окружности;
2) с помощью графиков тригонометрических функций.

1.1.1. Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие синус

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию синус, т.е. неравенства вида:

$$\sin x > a,\ \sin x < a,\ \sin x \geq a,\ \sin x \leq a,\ \sin x \neq a.$$

Представим далее алгоритм решения лишь одного из неравенств этой группы.

При решении неравенств вида

$$\sin x \geq a, \tag{1.1.1}$$

например, с помощью единичной окружности поступают следующим образом:

Сразу используют тот факт, что синус – это ордината точки тригонометрической окружности.

Далее рисуется декартова система координат и тригонометрическая окружность в ней. На оси ординат откладывается число, равное a (берётся из условия $\sin x > a$). Через полученную точку строится прямая, параллельная оси абсцисс. По отношению к имеющейся тригонометрической окружности эта прямая может занять одно из следующих трёх положений:

А) иметь с ней две общие точки (т.е. пересекать её в двух точках, расположенных симметрично относительно оси ординат). Заметим, что в этом случае число a будет удовлетворять условию $a \in (-1; 1)$.

Б) иметь только одну общую точку с ней (т.е. прямая касается тригонометрической окружности). В таком случае число a может быть равно 1 или -1.

В) не иметь общих точек с окружностью. Здесь либо $a \in (-\infty;-1)$, либо $a \in (1;+\infty)$.

В зависимости от того с каким случаем будем иметь дело, мы получим различные варианты ответа.

Если $a > 1$ (случай В), то неравенство (1.1.1) не имеет решений.

Если $a \leq -1$ (сюда входят две ситуации: $a \in (-\infty;-1)$ (случай В) и $a = -1$ (Случай Б)), то неравенству (1.1.1) удовлетворяет любое значение x.

Если $a \in (0;1)$ (случай А), то прямая АВ (см. Рис. 1) разрежет окружность на две дуги.

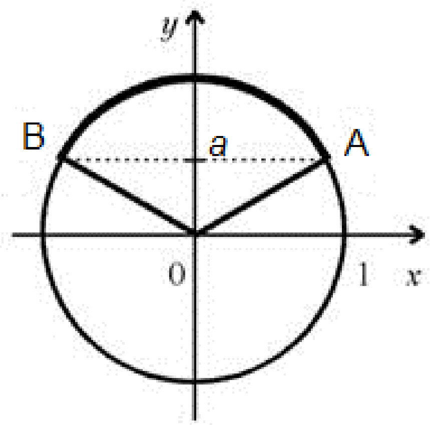

Рис. 1

Кроме того из Рис. 1 видно, что данному неравенству будут удовлетворять лишь те точки, которые расположены на дуге AB, проходимой в положительном направлении (т.к. ординаты точек, расположенных на ней больше или равны a). Для удобства восприятия информации дугу AB выделяют либо штриховкой по внутреннему контуру окружности, либо линией большей толщины.

Известно, что в таком случае точке A на тригонометрической окружности соответствуют числа $x_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, в свою очередь точке B – числа $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Окончательное решение можно записать следующим образом:

$$x \in \left[2\pi n + \arcsin a; (2n+1)\pi - arc\sin a\right], n \in \mathbf{Z}.$$

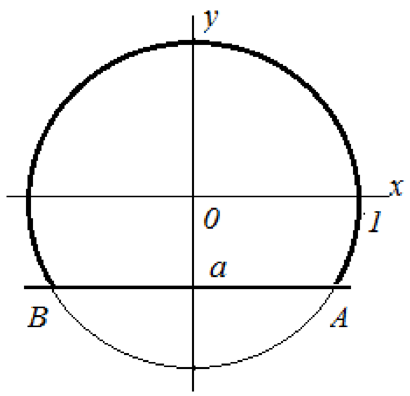

Рис. 2

Если $a = 1$(случай В), то, как известно, прямая будет иметь только одну общую точку с тригонометрической окружностью. Ордината этой точки будет равна 1, поэтому решением неравенства (1.1.1) будет $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right\}, n \in \mathbf{Z}$.

Если $a \in (-1;0)$ (случай А), то прямая, параллельная оси абсцисс, разделит окружность на две дуги (см. Рис. 2).

В таком случае решением неравенства будет:

$$x \in \left[2\pi n - \arcsin a; (2n+1)\pi + arc\sin a\right], n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 1.1.1.1. Решить неравенство $\sin x \geq 0{,}5$.

Решение. На тригонометрической окружности отмечаем точки, служащие концами радиус-векторов, ординаты которых равны 0,5 (см. Рис. 3). Таких радиус-векторов окажется два. Один из них образует с положительным направлением оси абсцисс угол, равный $\frac{\pi}{6}$, а другой, соответственно, $\frac{5\pi}{6}$ (их синусы равны 0,5). Принимая во внимание периодичность синуса (его наименьший положительный период равен 2π), имеем:

$$2\pi n + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2\pi n + \frac{5\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$.

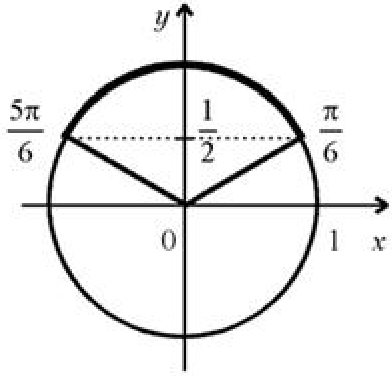

Рис. 3

Завершая рассмотрение этого вопроса, представляем сводную таблицу различных случаев простейших тригонометрических неравенств, содержащих синус, и предлагаем самостоятельно вписать варианты ответов к ним.

Неравенство	$\sin x > a$	$\sin x < a$	$\sin x \geq a$	$\sin x \leq a$
$a \in (-\infty; -1)$				
$a = -1$				
$a \in (-1; 0)$				
$a = 0$				
$a \in (0; 1)$				
$a = 1$				
$a \in (1; +\infty)$				

Ещё одним эффективным способом решения простейших тригонометрических неравенств является использование графического метода. Рассмотрим на примере, как он работает.

Пример 1.1.1.2. Решить неравенство $\sin x > -\frac{1}{2}$.

Решение. Строим график функции $y = \sin x$. В той же системе координат проводим прямую $y = -\frac{1}{2}$. Так как данное неравенство является строгим, то точки пересечения двух построенных графиков отметим проколами (см. Рис. 4).

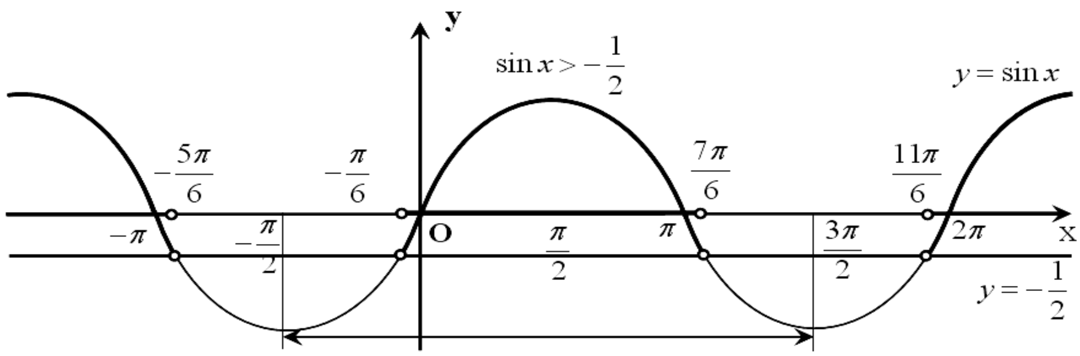

Рис. 4

Далее выделим фрагменты графика функции $y = \sin x$, которые оказались выше прямой $y = -\frac{1}{2}$. Заметим, что выделенные участки периодически повторяются. Возьмём участок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси *Ox*. Видим, что на нём располагается один из выделенных нами фрагментов. Определим концевые точки этого фрагмента. Очевидно, ими будут $x = -\frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{7\pi}{6}$, так как в этих точках $\sin x = -\frac{1}{2}$. Учитывая периодичность функции $y = \sin x$, можем записать решение исходного неравенства

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

1.1.2. Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие косинус

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию косинус, т.е. неравенства вида:

$$\cos x > a,\ \cos x < a,\ \cos x \geq a,\ \cos x \leq a,\ \cos x \neq a.$$

Представим далее алгоритм решения лишь одного из неравенств этой группы.

Рассмотрим, как решается неравенство вида

$$\cos x < a. \tag{1.1.2}$$

Исходим из того, что косинус – это абсцисса точки тригонометрической окружности.

Далее изображается декартова система координат, в которую помещаем тригонометрическую окружность с центром в начале координат. На оси абсцисс отмечаем число, равное *a* (берётся из условия $\cos x < a$). Через полученную точку строим прямую, параллельную оси ординат. По отношению к имеющейся тригонометрической окружности эта прямая может занять одно из следующих трёх положений:

1) иметь с ней две общие точки (т.е. пересекать её в двух точках, расположенных симметрично относительно оси ординат). Заметим, что в этом случае число *a* будет удовлетворять условию $a \in (-1; 1)$.

2) иметь только одну общую точку с ней (т.е. прямая касается тригонометрической окружности). В таком случае число *a* может быть равно 1 или –1.

3) не иметь общих точек с окружностью. Здесь либо $a \in (-\infty; -1)$, либо $a \in (1; +\infty)$.

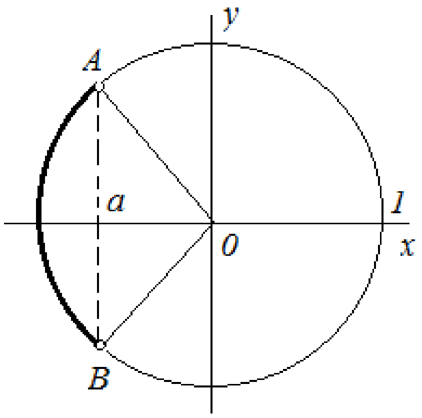

Рис. 5

Если $a \in (-\infty; -1]$, то неравенство (1.1.2) не имеет решений.

Если $a \in (-1; 0)$, то прямая, параллельная оси ординат, разделит тригонометрическую окружность на две дуги (только на одной из этих дуг содержится множество точек, абсцисса которых меньше *a*). Выбираем дугу *AB*, которая идет по ходу от *A* к *B* в положительном направлении (см. Рис. 5) и выделяем её более толстой линией.

Точке *A* соответствуют углы $\pi - arc\cos|a| + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, а точке *B*, в свою очередь – углы $\pi + arc\cos|a| + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Таким образом, окончательное решение для этого случая можно записать в виде:

$$x \in \big((2n+1)\pi - \arccos|a|; (2n+1)\pi + \arccos|a|\big), n \in \mathbf{Z}.$$

Если $a \in (0; 1)$, то в таком случае, прямая, параллельная оси ординат, будет находиться правее начала координат. Этот случай весьма близок к предыдущему, но окончательное решение будет выглядеть несколько иначе:

$$x \in \big(2\pi n + \arccos \mathrm{a}; (2n+1)\pi - \arccos a\big), n \in \mathbf{Z}.$$

Если $a = 1$, то в этом случае прямая коснётся тригонометрической окружности. В этом случае неравенству (1.1.2) будут удовлетворять все значения переменной *x*, кроме $2\pi n$. Т.е. решение неравенства может быть записано в виде $\{x \mid x \neq 2\pi n\},\ n \in \mathbf{Z}$.

Если $a \in (1;+\infty)$, то в качестве решения неравенства (1.1.2) может выступать любой x.

Пример 1.1.2.1. Решить неравенство $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. На тригонометрической окружности откладываем точки, служащие концами радиус-векторов, абсциссы которых равны $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. Рис. 6). Таких радиус-векторов окажется два. Одной из полученных точек соответствует угол, равный $\frac{5\pi}{6}$, а

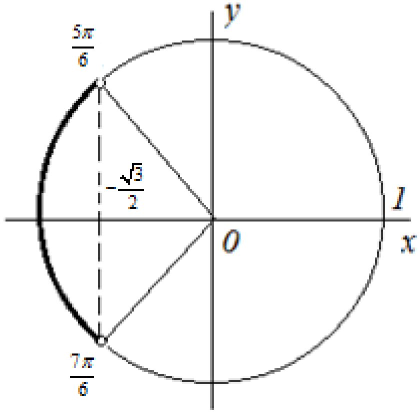

Рис. 6

другой, соответственно, $\frac{7\pi}{6}$. Принимая во внимание периодичность косинуса (его наименьший положительный период равен 2π), получаем:

$$2\pi n + \frac{5\pi}{6} < x < 2\pi n + \frac{7\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 1.1.2.2. Решить неравенство $|\cos x| > \frac{1}{2}$.

Решение. Отметим, что данное неравенство не совсем уместно относить к простейшим тригонометрическим неравенствам, но для иллюстрации графического метода наличие модуля не является серьёзным отягощением. Построим графики функций $y = |\cos x|$ и $y = \frac{1}{2}$ (см. Рис. 7).

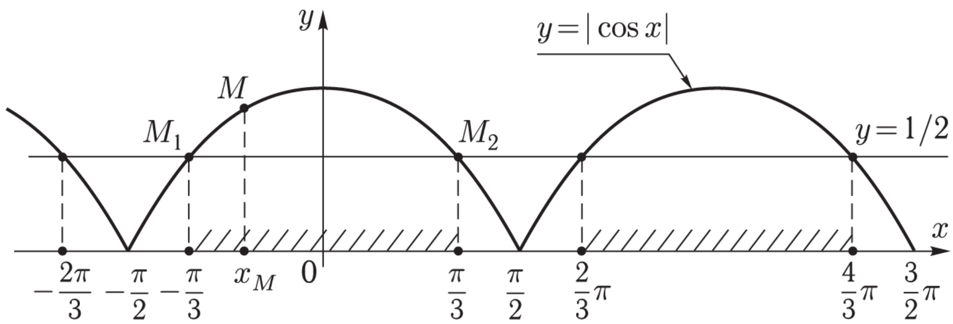

Рис. 7

Функция $y = |\cos x|$ является непрерывной и периодической функцией, с наименьшим положительным периодом, равным π. Поэтому достаточно взять промежуток, длина которого будет равна π, например,

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, затем отобрать множество точек на графике функции $y=|\cos x|$, ординаты которых будут строго больше числа $\frac{1}{2}$, спроецировать это множество на выбранный промежуток и с учетом периода записать окончательный ответ. Из Рис. 7 видим, что нас устраивает множество точек, расположенных между точками M_1 и M_2, выше прямой $y=\frac{1}{2}$. Проекция этого множества на промежуток $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ даст интервал $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$. Тогда с учетом периодичности функции $y=|\cos x|$ получаем:

$$-\frac{\pi}{3}+\pi n< x<\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right),\ n\in \mathbf{Z}$.

Далее снова предлагаем заполнить сводную таблицу различных случаев простейших тригонометрических неравенств, только теперь содержащих косинус.

Неравенство	$\cos x>a$	$\cos x<a$	$\cos x\geq a$	$\cos x\leq a$
$a\in(-\infty;-1)$				
$a=-1$				
$a\in(-1;0)$				
$a=0$				
$a\in(0;1)$				
$a=1$				
$a\in(1;+\infty)$				

1.1.3. Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие тангенс

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию тангенс, т.е. неравенства вида:

$$tg\,x>a,\ tg\,x<a,\ tg\,x\geq a,\ tg\,x\leq a,\ tg\,x\neq a.$$

Представим далее алгоритм решения только одного из неравенств этой группы.

Рассмотрим, как решается неравенство вида

$$tg\,x<a. \qquad (1.1.3)$$

Известно, что выражения, содержащие $tg\,x$, имеют смысл лишь при условии, что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$. Поэтому для соответствующих точек тригонометрической окружности сразу нужно сделать проколы. Проведем к правой полуокружности касательную (*ось тангенсов*) в точке A (1; 0), на которой отметим точку (1;a). Построим радиус-вектор, соединив точку A с центром окружности. Отрезок [OA] пересечёт единичную окружность в точке M. Значение угла x_0, соответствующего этой точке, будет равно $x_0 = arctg\,a$. Любое действительное значение x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$, будет удовлетворять неравенству (1.1.3) при условии, что принадлежит лучу $(-\infty; a)$, которому соответствует дуга $\left(-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} a\right)$. Учитывая периодичность тангенса (наименьший положительный период равен π), окончательно получаем: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

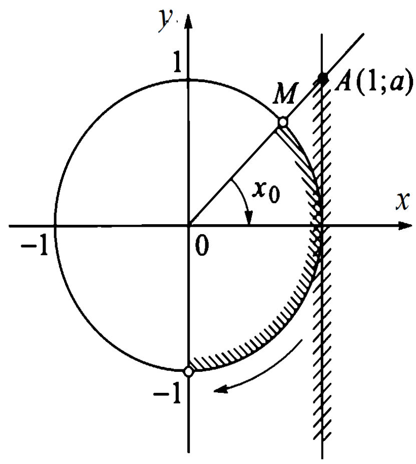

Рис. 8

Графическое решение неравенства (1.1.3) происходит следующим образом. Строится график функции $y = tg\,x$ и прямая $y = a$, где a – любое действительное число (см. Рис. 9). На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, на котором функция $y = tg\,x$ возрастает, находится точка пересечения графиков этих двух функций $x_0 = arctg\,a$.

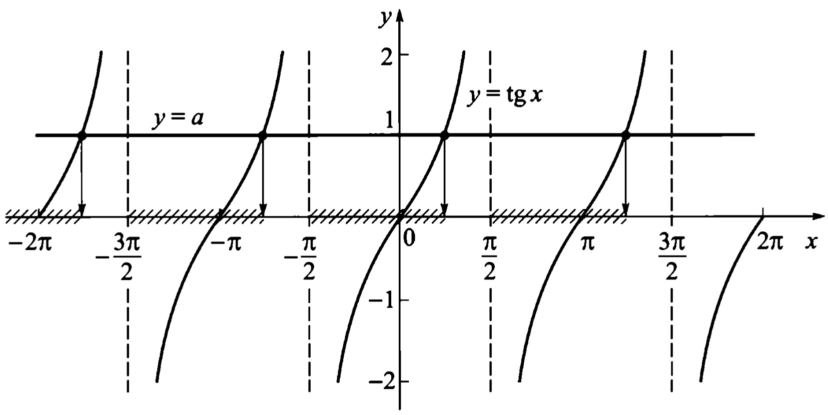

Рис. 9

Поскольку для любого $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, такого, что $x < x_0$, выполняется условие $tg\,x < tg\,x_0$ или $tg\,x < a$, решением неравенства (1.1.3) на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ будет множество $\left(-\frac{\pi}{2};x_0\right)$ или $\left(-\frac{\pi}{2};\operatorname{arctg} a\right)$. На всей числовой оси, кроме точек $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, решением этого неравенства при любом а будет множество: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

<u>Пример 1.1.3.1.</u> Решите неравенство $tg\,x \le 1$.

Решение. Так как ранее мы описали метод решения схожего неравенства (различие состоит лишь в том, что у нас нестрогое неравенство, а там был знак «< »), то можно воспользоваться заготовкой для ответа, заменив в ней лишь круглую скобку, на квадратную, т.е.

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right], n \in \mathbf{Z}.$$

Кроме того, заметим, что $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, поэтому окончательно будем иметь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.

1.1.4. Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие котангенс

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию котангенс, т.е. неравенства вида:

$$ctgx > a,\ ctgx < a,\ ctgx \ge a,\ ctgx \le a,\ ctgx \ne a.$$

Представим далее алгоритм решения только одного из неравенств этой группы.

Рассмотрим, как решается неравенство вида

$$ctg\,x > a. \tag{1.1.4}$$

Так как мы имеем дело с котангенсом, то следует помнить, что выражения, содержащие $ctg\,x$, имеют смысл лишь при условии, что $x \ne \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Проиллюстрируем решение неравенства (1.1.4) с помощью тригонометрической окружности. Через точку окружности, имеющую координаты

(0; 1), проведем касательную, которую называют *осью котангенсов*. На этой линии отметим точку $A(a;\ 1)$, абсцисса которой будет равна произвольному числу a. Соединим точку A с началом координат (см. Рис. 10), получим радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$, который пересекает тригонометрическую окружность в точке M. Угол, соответствующий точке M, обозначим символом x_0. Причём по определению $x_0 = arcctg\, a$. Взяв любое значение $x \in (0;\pi)$, такое, что $x < x_0$, на оси котангенсов получим множество точек, образующих луч $(a;+\infty)$. Этому лучу на единичной окружности соответствует дуга $X_0 = (0;\ arcctg\, a)$, которая и определяет множество решений искомого неравенства на интервале $(0;\pi)$. На любом другом промежутке $(\pi k;\pi+\pi k), k \in \mathbf{Z}$, решение неравенства (1.1.4) находят с учётом периодичности функции $y = ctg\, x$, т.е.

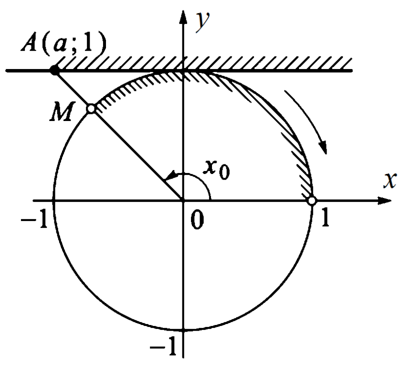

Рис. 10

$$x \in (\pi k; \operatorname{arcctg} a + \pi k), k \in \mathbf{Z}.$$

Теперь посмотрим, как происходит решение неравенства (1.1.4) графическим методом. Известно, что $D(ctg\, x)$ включает в себя все действительные числа, кроме $x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. Областью значений функции $y = ctg\, x$, на множестве $D(ctg\, x)$ является множество $E(ctg\, x)$ = $(-\infty;+\infty)$. Следовательно, при любом a неравенство (1.1.4) всегда имеет решение. Используя графики функций y = $ctg\, x$ и y = a, сначала находим решение этого неравенства на интервале $(0;\pi)$ (см. Рис. 11).

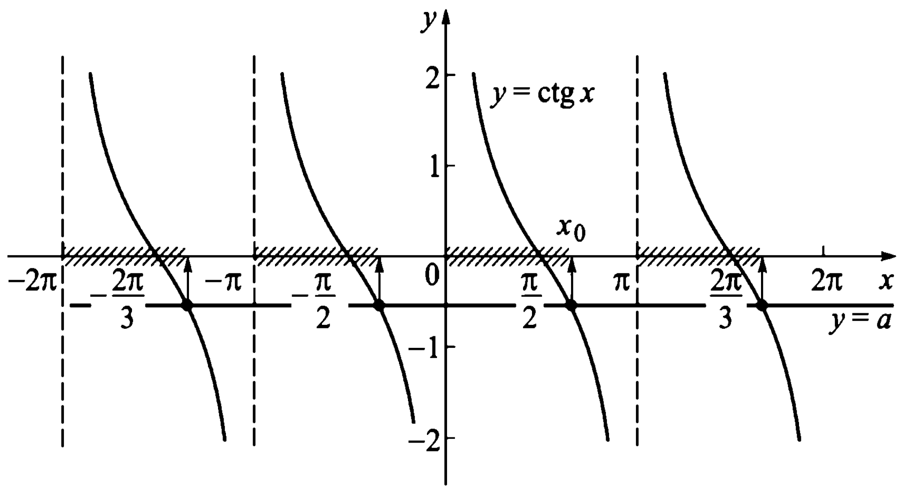

Рис. 11

Так как на этом промежутке функция $y = ctg\, x$ убывает, то для любого значения $x \in (0;\pi)$, такого, что $x < x_0$, $x_0 = arcctg\, a$, справедливо неравенство $ctg\, x > ctg\, x_0$ или $ctg\, x > a$. Это означает, что на промежутке $(0;\pi)$ решением неравенства (1.1.4) является множество X_0 = (0; $arcctg\, a$), и, учитывая периодичность функции $y = ctg\, x$, находим решение этого неравенства на свей области определения:

$$x \in (\pi k; \operatorname{arcctg} a + \pi k),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 1.1.4.1. Решить неравенство $ctg\, x > 2$.

Решение. Это неравенство полностью соответствует типажу неравенства (1.1.4), поэтому можем воспользоваться шаблоном для записи ответа: $x \in (\pi k; \operatorname{arcctg} a + \pi k),\ k \in \mathbf{Z}$. В нашем случае a=2, это означает, что множеством значений x, удовлетворяющих условию $ctg\, x > 2$, будет:
$x \in (\pi k; \operatorname{arcctg} 2 + \pi k),\ k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x \in (\pi k; \operatorname{arcctg} 2 + \pi k),\ k \in \mathbf{Z}$.

§ 1.2. Тригонометрические неравенства, сводящиеся к простейшим

При решении неравенств, не являющихся простейшими, разными путями стараются прийти к простейшим тригонометрическим неравенствам, либо их системам и совокупностям. Основным методом решения неравенств является *метод подстановки*.

Его суть легко уяснить из следующих примеров.

✍ К первой группе неравенств, решаемых этим способом, отнесем тригонометрические неравенства «*со смещённым аргументом*».

Пример 1.2.1. Решить неравенство $\sin\left(\frac{5x}{3} - \frac{\pi}{8}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Ясно, что данное неравенство примет простейший вид, если сделать замену $t = \frac{5x}{3} - \frac{\pi}{8}$, тогда исходное неравенство запишется в виде $\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Откуда $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{9\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Сделав обратную замену, получим

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < \frac{5x}{3} - \frac{\pi}{8} < \frac{9\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Остается лишь в центральной части этого двойного неравенства получить x. Для этого сначала прибавим ко всем частям этого неравенства дробь $\frac{\pi}{8}$, будем иметь

$$\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n < \frac{5x}{3} < \frac{\pi}{8} + \frac{9\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Выполняя сложение дробей, получаем

$$\frac{7\pi}{8}+2\pi n<\frac{5x}{3}<\frac{19\pi}{8}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Умножим теперь все части этого неравенства на дробь $\frac{3}{5}$

$$\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{7\pi}{8}+2\pi n\right)<x<\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{19\pi}{8}+2\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}.$$

В итоге имеем

$$\frac{21\pi}{40}+\frac{6\pi n}{5}<x<\frac{57\pi}{40}+\frac{6\pi n}{5},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $x\in\left(\frac{21\pi}{40}+\frac{6\pi n}{5};\frac{57\pi}{40}+\frac{6\pi n}{5}\right),\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 1.2.2. Решить неравенство $tg\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)>2$.

Решение. Произведём замену переменной, сделав обозначение $2x-\frac{\pi}{5}=t$. Исходное неравенство примет вид $tg\,t>2$. Будем решать полученное простейшее неравенство на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ с помощью графика $y=tg\,t$ (см. Рис. 12). Построив прямую $y=2$, видим, что неравенству $tg\,t>2$ удовлетворяют лишь числа $t\in\left(arctg\,2;\frac{\pi}{2}\right)$. Так как функция $y=tg\,t$ имеет период, равный π, то множеством всех решений этого неравенства будет

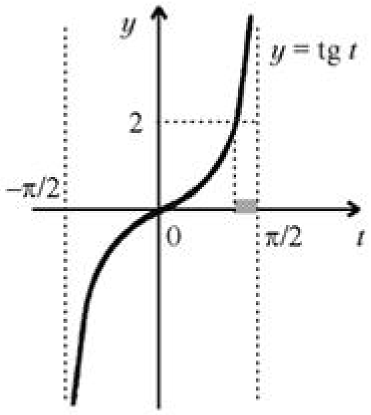

Рис. 12

$$t\in\left(arctg\,2+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in\mathbf{Z}.$$

Делая обратную замену с помощью формулы $t=2x-\frac{\pi}{5}$, получаем

$$arctg\,2+\pi n<2x-\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbf{Z}.$$

Далее имеем

$$\frac{\pi}{5}+arctg\,2+\pi n<2x<\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbf{Z},$$

$$\frac{\pi}{10}+\frac{arctg\,2}{2}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{7\pi}{20}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{10} + \frac{arctg\,2}{2} + \frac{\pi n}{2}; \frac{7\pi}{20} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbf{Z}$.

✍ Ко второй группе неравенств, решаемых этим способом, отнесём тригонометрические неравенства, «*сводящиеся к алгебраическим*».

Пример 1.2.3. Решить неравенство $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$.

Решение. Введём новую переменную $\sin x = t$, получим квадратичное неравенство $2t^2 - 7t + 3 > 0$. Найдем дискриминант: $D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25$. Тогда $t_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4}$; $t_1 = 3$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Применяя метод интервалов, получим $t \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \right) \cup (3; +\infty)$. Таким образом, имеем совокупность из двух простейших неравенств, содержащих функцию синус

$$\left[\begin{array}{l} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > 3. \end{array} \right.$$

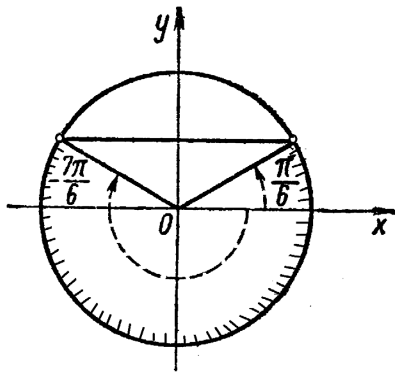

Рис. 13

Ясно, что неравенство $\sin x > 3$ не имеет решений, так как $\sin x \in [-1; 1]$.

Что касается первого неравенства совокупности, то его решение изображено на Рис. 13.

Значит,

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbf{Z}$.

✍ К третьей группе неравенств, решаемых этим способом, отнесём тригонометрические неравенства, «*решаемые с помощью универсальной подстановки*».

Пример 1.2.4. Решить неравенство $2\cos 2x + \sin 2x > tg\,x$.

Решение. Воспользуемся рассмотренной нами для решения тригонометрических уравнений (см. Часть 5) универсальной подстановкой. Введём новую переменную, положив $tg\,x = t$. Тогда, как известно,

$$sin\,2x = \frac{2t}{1+t^2};\ cos\,2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

После чего исходное неравенство примет вид

$$2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}-t>0.$$

Приводя выражение в левой части последнего неравенства к общему знаменателю, получаем

$$\frac{2-2t^2+2t-t-t^3}{1+t^2}>0.$$

Последнее равносильно неравенству $t^3+2t^2-t-2<0$.

Разложим теперь левую часть этого неравенства на множители

$$\left(t^3+2t^2\right)-\left(t+2\right)<0,$$

$$t^2\left(t+2\right)-\left(t+2\right)<0,$$

$$\left(t+2\right)\cdot\left(t^2-1\right)<0,$$

$$\left(t+2\right)\cdot\left(t-1\right)\cdot\left(t+1\right)<0.$$

Далее применим метод интервалов

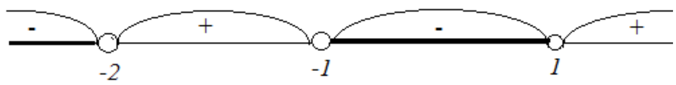

Рис. 14

Из Рис. 14 видно, что $t\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-1;1\right)$. Запишем это в виде совокупности неравенства и системы двух неравенств

$$\left[\begin{array}{l} t<-2, \\ \begin{cases} t>-1, \\ t<1; \end{cases} \end{array}\right.$$

Или

$$\left[\begin{array}{l} tg\,x<-2, \\ \begin{cases} tg\,x>-1, \\ tg\,x<1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для простейшего неравенства $tg\,x<-2$ множеством решений будет множество

$$x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-arctg2+\pi n\right),n\in\mathbf{Z}.$$

Далее получаем решение системы простейших тригонометрических неравенств

$$x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right),n\in\mathbf{Z}.$$

Выполняя объединение двух полученных множеств, имеем решение исходного неравенства