Оглавление

Математика – там, где мало определений,
но много следствий

Введение

В части I работы из одного понятия «аргумент монотонной функции» получаем важные частные случаи – понятия «арок» (арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса, арифметического корня, логарифма числа).

В части II из одного понятия «обратная функция» получаем важные частные случаи – функции $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$; $y = \sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$; $y = \log_a x$.

Формальные определения арок, корней, логарифмов мы узнаем в разное время, изолированно и, главное, – без акцента на взаимосвязь между ними. Видимо, в этом одна из причин (кроме объективной сложности) того, что эти определения бывает трудно понять, осознать, запомнить. Между тем все означенные понятия можно рассматривать как частные случаи одного общего понятия «аргумент монотонной функции», а он – результат решения известной обратной задачи, в которой ищется значение аргумента (независимой переменной) по известному значению функции (ее зависимой переменной).

Значению аргумента дается обозначение (например, «arcsin») и название (например, «арксинус»).

Именно так, естественным образом, по *единому плану*, *с графической иллюстрацией* получаем понятия:

а) арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс для тригонометрических функций (главы 2–5 соответственно);

б) арифметический корень для степенной функции (глава 6);

в) логарифм для показательной функции (глава 7).

Изложение, содержание каждой из глав 2–7 идентично, подчинено единому плану:

- *рассматривается* обратная задача для конкретной (в этой главе) монотонной функции;
- ее единственному решению – аргументу исходной функции – *даются* общепринятые обозначения и названия;

- *изучаются* свойства этого аргумента и на их базе;
- *излагаются* методики решения задач разной степени сложности (в том числе задач ЕГЭ по математике).

Таково содержание части I.

В части II также по единому плану вводятся и изучаются *обратные функции*.

В главе 1 излагается общая теория, план введения обратной функции. В следующих главах по этому плану последовательно вводятся и изучаются конкретные обратные функции:

$$y = \arcsin x;\ y = \arccos x;\ y = \operatorname{arctg} x;\ y = \operatorname{arcctg} x;$$
$$y = \sqrt[n]{x},\ n = 2, 3, \ldots;\ y = \log_a x.$$

Изучаются методы решения задач, в том числе метод замены множителя, метод перебора ОДЗ для неравенств.

Решаются разные по сложности задачи.

В заключении констатируется целесообразность принятого здесь единого подхода к введению, изучению и применению в задачах важных понятий:

- аргумент монотонной функции и его частные случаи: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арифметический корень, логарифм числа;
- обратная функция и ее частные случаи:$y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$; $y = \sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$; $y = \log_a x$.

Принятый подход включает наглядный функционально-графический метод, что помогает яснее понять смысл каждого из понятий, а значит, легче и увереннее его освоить. В результате формируются или закрепляются умения и навыки (ключи) для решения задач с арками, корнями, логарифмами, тригонометрическими функциями разной сложности, развивается общая математическая культура.

Изложение начнем с напоминания о том, что же такое *функция* и в чем специфика *монотонной функции*.

ЧАСТЬ I

Аргумент монотонной функции и его частные случаи: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арифметический корень, логарифм числа

Глава 1.
Функция, основные сведения о монотонной функции

1.1. Введение

Повторимся, математика – там, где *мало* определений, понятий, но *много* следствий, других понятий.

В данной работе в части I из *одного понятия* «аргумент монотонной функции» выводятся и изучаются его важнейшие *частные случаи*, а именно «арксинус», «арккосинус», «арктангенс», «арккотангенс», «арифметический корень», «логарифм числа».

Существенно, что все эти понятия вводятся единообразно, по одному плану с использованием наглядного функционально-графического метода: меняются лишь исходные монотонные функции. Но с каждой из них выполняются одни и те же действия, а именно находится и изучается ее аргумент. Именно этот аргумент для каждой конкретной функции носит свое конкретное название: арксинус, логарифм и т. д.

Изложенный подход позволяет не зубрить механически труднозапоминаемые определения и свойства, а получить и изучить их естественным образом в рамках изучения свойств исходных функций с наглядной графической иллюстрацией.

Понятно, что следует вспомнить и обсудить смысл основного для нас понятия «аргумент монотонной функции». Но без понятия «функция» здесь не обойтись. С него и начнем.

1.2. Функция

Понятие «функция» – одно из основных в математике. Напомним и прокомментируем его.

> ***Определение.*** Функцией f называется закон (правило), который каждому допустимому значению независимой переменной, или аргументу, x из множества X сопоставляет единственное значение зависимой переменной y:
>
> $$y = f(x),\ x \in X. \qquad (1)$$

Закон f должен удовлетворять только *одному* требованию – обеспечить *единственность от* x *к* y:

$$x \xrightarrow{f} y.$$

В чем смысл этого требования, откуда оно?

Из жизни. Объект не может находиться одновременно в двух точках пространства.

Пример: поход ученика в школу и обратно; пусть x – время, y – расстояние до дома. График функции $y = f(x)$ схематически дан на рис. 1.1.

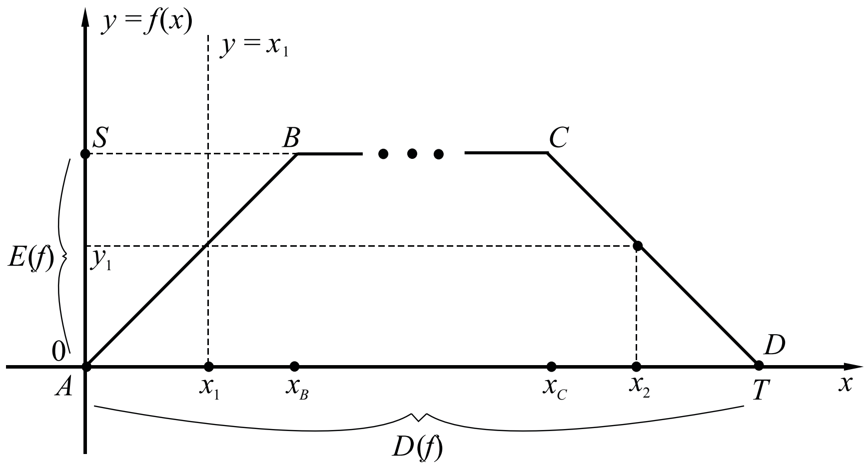

Рис. 1.1

В каждый момент времени расстояние от дома фиксировано, единственно. Например, при $x = x_1$, $y_1 = f(x_1)$. Ученик не может находиться в двух местах одновременно. Но расстояние от дома равно y_1 и в момент времени x_2, когда ученик возвращается домой; расстояние остается постоянным, равным S, при всех $x \in [x_B; x_C]$, пока ученик в школе.

То есть *однозначности от* y *к* x *не требуется*.

Важно. Единственность от x к y графически означает следующее. Любая вертикальная прямая $y = x_1 \in [0; T]$ пересекает график функции в единственной точке $(x_1; f(x_1))$ (см. рис. 1.1).

Выше сформулировано определение функции. Следующей задачей проверим, как мы его поняли.

Задача. Какие кривые из рис. 1.2 являются графиками функций?

Ответ. Кривые на рис. 1.2*б* и 1.2*в*.

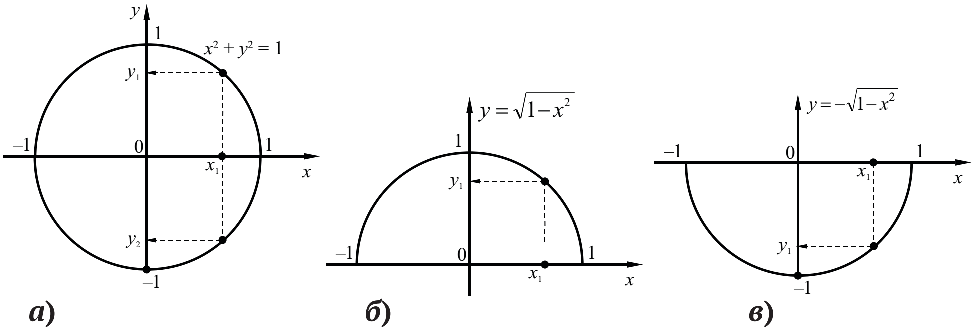

Рис. 1.2

Действительно, здесь обеспечивается единственность от x к y.

На рис. 1.2*а* этой единственности нет:

> Числу x_1 соответствуют *два* числа y_1 и y_2. Здесь изображен *график уравнения* $x^2 + y^2 = 1$ – окружности с центром в точке $O(0; 0)$ радиуса $R = 1$.

На рис. 1.2*б* и 1.2*в* изображены верхняя и нижняя полуокружности – графики функций $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$ соответственно.

Итак, мы вспомнили и обсудили определение функции. Каждую функцию характеризуют *два множества* – область определения $D(f)$ и множество значений $E(f)$. С каждой функцией связаны *две задачи* – прямая и обратная. Обсудим эти важные понятия.

1.3. Область определения функции

Областью определения функции f называют множество *всех* допустимых *значений аргумента*. Ее обозначают символом $D(f)$ и часто называют областью допустимых значений – ОДЗ. Кратко: ОДЗ – это множество всех допустимых значений независимой переменной. Область определения может быть задана явно, как в (1). Здесь $D(f) = X$.

Если множество X не указано, то за область определения $D(f)$ принимается естественная ОДЗ выражения $f(x)$.

Примеры, см. рис. 1.1–1.3.

1) $f(x) = x^2$. Здесь $D(f) = R$ – множество всех действительных чисел.
2) $f(x) = x^2$, $x \in [-1; 2]$. Здесь $D(f) = [-1; 2]$.
3) Область определения функции из рис. 1.1 – отрезок $[0; T]$.
4) Область определения функций из рис. 1.2*б*, 1.2*в* – отрезок $x \in [-1; 1]$.

Графически: область определения $D(f)$ – это проекция графика функции на ось x.

1.4. Множество значений функции

Множеством (или областью) *значений функции* называют множество *всех* возможных *значений зависимой переменной*. Его обозначают символом $E(f)$.

Графически: множество значений $E(f)$ – это проекция графика функции на ось ординат.

Примеры, см. рис. 1.1–1.3.

1) $f(x) = x^2$. Здесь $E(f) = [0; +\infty)$, т. е. зависимая переменная y пробегает множество *всех* неотрицательных чисел.
2) $f(x) = x^2$, $x \in [-1; 2]$. Здесь $E(f) = [0; 4]$, т. е. зависимая переменная y пробегает *все* значения из отрезка $[0; 4]$.
3) Множество значений функции есть:
   а) отрезок $[0; S]$ для функции из рис. 1.1;
   б) отрезок $[0; 1]$ для функции из рис. 1.2*б*;
   в) отрезок $[-1; 0]$ для функции из рис. 1.2*в*.

Фраза «Множество $E(f)$ есть множество значений функции f» означает:

а) при любом $x \in D(f)$ значение $y = f(x)$ существует, единственно и принадлежит множеству $E(f)$, т. е.

$$x \in D(f) \;\Rightarrow\; y = f(x) \in E(f);$$

б) обратно. Любое значение $y \in E(f)$ достигается хотя бы при одном значении x, $x \in D(f)$, т. е. совместна система относительно x (при заданном y):

$$\begin{cases} f(x) = y \\ y \in E(f) \end{cases}.$$

Например, значение $y = \frac{1}{4} \in [0; 4]$ достигается при $x = \pm\frac{1}{2}$, рис. 1.3*б*;

в) если значение $\bar{y}$ не из множества $E(f)$, то оно не достигается ни при каком $x \in D(f)$, т. е. не совместна (относительно x) система

$$\begin{cases} f(x) = \bar{y}, \;\; \bar{y} \notin E(f) \\ x \in D(f) \end{cases}.$$

Например, значение $\bar{y} = 9 \notin [0; 4]$ не достижимо для функции $f(x) = x^2$, $x \in [-1; 2]$, (рис. 1.3*б*), но достижимо для другой функции $f(x) = x^2$ при $x = \pm 3$ (рис. 1.3*а*).

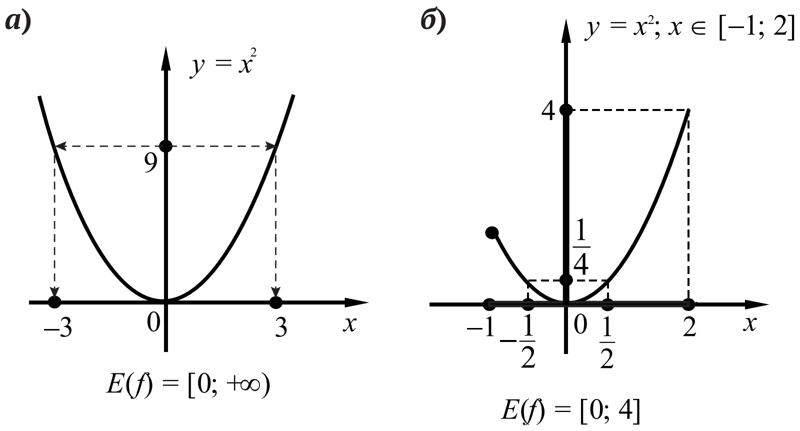

Рис. 1.3

Мы разобрали понятие «множество значений функции». Рассмотрим задачу с параметром на это понятие в общем виде.

> ***Задача.*** Найти все значения параметра «a», при каждом из которых уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение.
>
> *Ответ*: $a \in E(f)$.

Конкретный пример. Пусть $f(x) = x^2$, $x \in [-1; 2]$, рис. 1.3*б*. Тогда зависимая переменная $y = f(x)$ пробегает все значения множества $E(f) = [0; 4]$ и только из него. Значит, уравнение $f(x) = a$ разрешимо лишь при $a \in [0; 4]$.

1.5. Две основные задачи

Мы видели, что в каждой функции $y = f(x)$:

- аргумент, независимая переменная x, пробегает все значения из множества $D(f)$ – области определения функции, $x \in D(f)$;
- зависимая переменная y при этом пробегает все значения из множества $E(f)$ – множества значений функции, $y \in E(f)$;
- закон f каждому значению $x \in D(f)$ сопоставляет единственное значение $y \in E(f)$.

$$x \xrightarrow{f} y.$$

Взаимосвязи зависимой и независимой переменных (y и x) характеризуют две основные задачи.

1) *Прямая задача*. По заданному значению аргумента $x \in D(f)$ найти значение зависимой переменной y.

Задача сводится к вычислению значения y по x:

$$y = f(x), \text{ где } x \in D(f). \tag{2}$$

Значение $f(x)$ существует (может быть вычислено) для любого допустимого значения x, т. е. для x из области определения функции.

Если $x \notin D(f)$, то значение y не существует для данной функции f.

Например, для рис. 1.1 значение зависимой переменной y существует для любого $x \in [0; T]$ и только для такого x.

Итак, в прямой задаче по заданному x требуется вычислить y.

2) *Обратная задача*. Найти все значения аргумента x, при каждом из которых достигается заданное значение зависимой переменной y_0.

Здесь следует решить относительно x уравнение

$$f(x) = y_0 \iff x \in \{x_1, x_2 \ldots\}. \tag{3}$$

Это уравнение разрешимо при любом достижимом значении y_0, т. е. при любом $y_0 \in E(f)$.

Например, значение y_1 на рис. 1.1 достигается при двух значениях x_1, x_2 аргумента.

Важен случай, когда обратная задача (3) имеет *единственное* решение при любом $y_0 \in E(f)$:

$$\begin{cases} f(x) = y_0 \\ y_0 \in E(f) \end{cases} \iff x = x_0.$$

Если исходная функция f монотонна, то указанная единственность имеет место. То есть, если f – монотонная функция, то:

- не только каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y (как для любой функции), но и
- каждое возможное значение y достигается только при одном значении x.

Рассмотрим сказанное подробнее, для чего вспомним определение и свойства монотонной функции.

1.6. Монотонность функции

Рассмотрим функцию (1)

$$y = f(x), x \in X.$$

Определение. *Функция f называется монотонно возрастающей (или просто возрастающей) на множестве X, если для любых двух значений x_1, x_2 аргумента x из этого множества таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$:*

$$\begin{cases} x_2 > x_1 \\ x_1, x_2 \in X \end{cases} \overset{f}{\Rightarrow} f(x_2) > f(x_1). \tag{4}$$

По-иному. Функция f возрастает (или строго возрастает) на множестве X, если большему значению аргумента x на нем соответствует бóльшее значение зависимой переменной y (рис. 1.4).

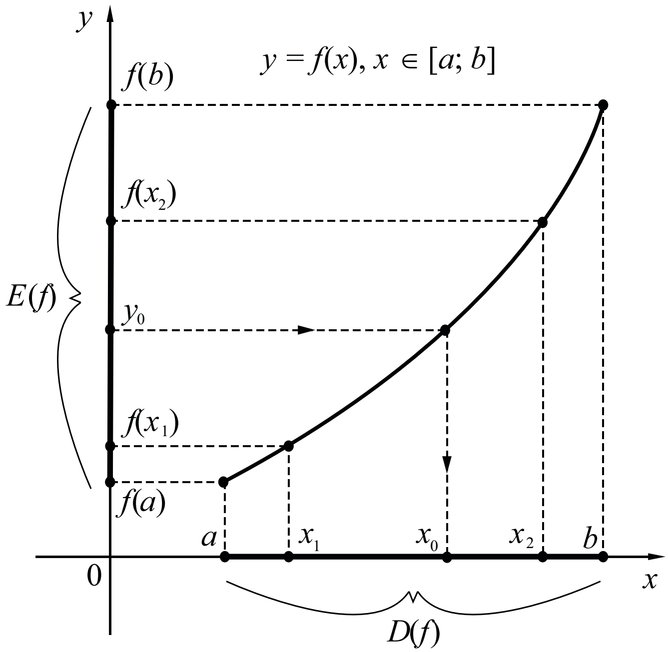

Рис. 1.4

На рис. 1.4 изображен график возрастающей функции

$$y = f(x), \ x \in [a; b].$$

При возрастании аргумента x от «a» до «b» зависимая переменная «y» монотонно возрастает от $f(a)$ до $f(b)$.

Определение. *Функция f называется монотонно убывающей (или просто убывающей) на множестве X, если для любых двух значений x_1, x_2 аргумента x из этого множества таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$:*

$$\begin{cases} x_2 > x_1 \\ x_1, x_2 \in X \end{cases} \overset{f}{\Rightarrow} f(x_2) < f(x_1). \qquad (5)$$

По-иному. Функция f убывает на множестве X, если бóльшему значению аргумента на нем соответствует мéньшее значение зависимой переменной y (рис. 1.5).

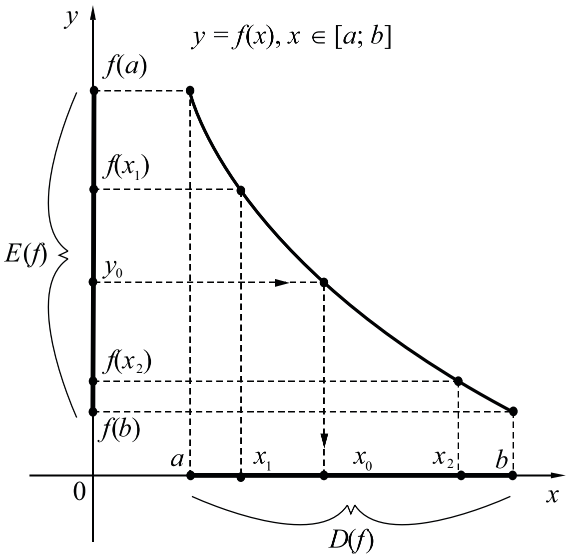

Рис. 1.5

На рис. 1.5 изображен график убывающей функции

$$y = f(x), \; x \in [a; b].$$

При возрастании аргумента «x» от «a» до «b» зависимая переменная «y» убывает от $f(a)$ до $f(b)$, где $f(a) > f(b)$.

Под монотонностью функции везде подразумеваем ее строгую монотонность, т. е. возрастание или убывание.

1.7. Свойство монотонной функции

Рисунки 1.4 и 1.5 иллюстрируют отличительное свойство монотонной функции: каждое значение y_0 из множества значений $E(f)$ достигается ею при единственном значении аргумента x_0. Докажем это.

Теорема. *Пусть $D(f)$ – область определения, $E(f)$ – множество значений функции f. Тогда если функция f монотонна, то уравнение*

$$f(x) = y_0 \qquad (6)$$

имеет единственное решение $x_0 \in D(f)$ для любого $y_0 \in E(f)$.

Доказательство. Уравнение (6) имеет хотя бы одно решение, поскольку $y_0 \in E(f)$ по условию.

Так как f – монотонная функция, то уравнение (6) имеет только одно решение $x_0 \in D(f)$. Действительно, пусть найдется такое $y_0 \in E(f)$, которое достигается хотя бы при двух значениях $x_1 \neq x_2$ аргумента:

$$\begin{cases} f(x_1) = y_0 \\ f(x_2) = y_0 \end{cases}.$$

Тогда $f(x_1) = f(x_2)$, что противоречит монотонности функции: если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$. Теорема доказана. Повторимся: далее будем говорить об аргументе именно строго монотонной функции.

1.8. Аргумент монотонной функции

Итак, если f – монотонная функция, то:

а) каждому значению аргумента x соответствует единственное значение зависимой переменной y, как и для всякой функции; обратно

б) каждое значение $y_0 \in E(f)$ зависимой переменной достигается только при одном значении x_0 аргумента

$$(7) \quad \begin{cases} f(x) = y_0 \\ y_0 \in E(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ x_0 \in D(f) \end{cases}. \quad (8)$$

Подчеркнем. Система (7) имеет единственное решение x_0 при любом $y_0 \in E(f)$. Это значение x_0 аргумента называют по-разному для разных конкретных монотонных функций f.

Перечислим важнейшие названия аргумента (числа) x_0 в нижеследующем общем определении.

Общее определение.

Значение аргумента x_0 строго монотонной функции $y = f(x)$, при котором ее зависимая переменная y достигает значения y_0, называется:

- арксинусом числа y_0 (обозначение $x_0 = \arcsin y_0$) для функции

$$y = f(x), \text{ где } f(x) = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \quad (9)$$

- арккосинусом числа y_0 (обозначение $x_0 = \arccos y_0$) для функции

$$y = f(x), \text{ где } f(x) = \cos x,\ x \in [0; \pi]; \quad (10)$$

- арктангенсом числа y_0 (обозначение $x_0 = \operatorname{arctg} y_0$) для функции

$$y = f(x),\ \text{где}\ f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \tag{11}$$

- арккотангенсом числа y_0 (обозначение $x_0 = \operatorname{arcctg} y_0$) для функции

$$y = f(x),\ \text{где}\ f(x) = \operatorname{ctg} x,\ x \in (0; \pi); \tag{12}$$

- арифметическим корнем n-й степени из числа y_0 (обозначение $x_0 = \sqrt[n]{y_0}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$) для функции

$$y = f(x),\ \text{где}\ f(x) = x^n,\ x \geqslant 0; \tag{13}$$

- логарифмом числа y_0 при основании a (обозначение $x_0 = \log_a y_0$) для функции

$$y = f(x),\ \text{где}\ f(x) = a^x,\ 0 < a \neq 1. \tag{14}$$

Обсуждение. Приведенное общее определение сразу для всех изучаемых понятий, конечно, полезно. Оно констатирует их изначальную суть, схожесть, а именно – их общее свойство быть аргументом своей конкретной функции $y = f(x)$. Но и функции (9–14), а значит, и их аргументы (изучаемые понятия) имеют разные индивидуальные свойства.

Строго определить, изучить и затем использовать в задачах каждое понятие можно единообразно, по одному плану, с использованием наглядного функционально-графического метода.

Далее подробно рассматривается каждый из этих частных случаев, нумерация формул, рисунков в каждой главе начинается заново.

1.9. Выводы

1. *Рассмотрели* важные понятия: функция, ее область определения и множество значений; монотонная функция.
2. *Отметили* важное свойство монотонной функции: каждое ее значение y_0 достигается только при одном значении x_0 аргумента.
3. *Привели* названия и обозначения аргумента x_0 для основных шести монотонных функций. Эти названия и понятия таковы: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арифметический корень, логарифм числа.
4. *Каждое* из приведенных понятий требует отдельного рассмотрения и изучения. В следующей главе изучается арксинус числа.

Глава 2. Арксинус

2.1. Определения

Приведем три равносильных определения арксинуса, чтобы полнее раскрыть суть, а далее и свойства этого важного понятия.

Рассмотрим функцию

$$y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \tag{1}$$

Отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ выбран в качестве *области определения* функции (1) по следующим причинам:

- на нем функция *монотонна*, пробегает все свои значения из отрезка $y \in [-1; 1]$;
- он *содержит* наиболее изученную 1-ю четверть $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

В силу *монотонности* функции (1) ее зависимая переменная *y каждое* свое значение $y_0 \in [-1; 1]$ достигает при *единственном* значении аргумента $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Это *значение аргумента* называется *арксинусом* числа y_0 и обозначается символом $\arcsin y_0$ (рис. 2.1):

$$x_0 = \arcsin y_0.$$

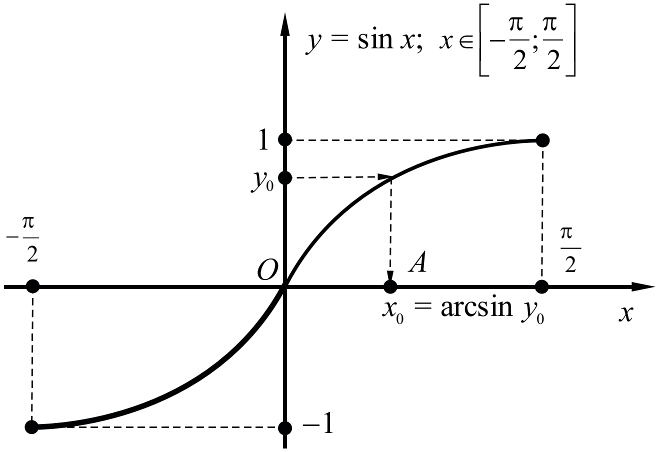

Рис. 2.1

Теперь мы готовы к строгим определениям.

Определение 1. *Значение x_0 аргумента, при котором зависимая переменная у функции*

$$y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

принимает значение y_0, называется арксинусом числа y_0 и обозначается символом arcsin y_0.

Определение 1 означает: число x_0 является арксинусом числа y_0 тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим двум условиям:

$$1)\ \sin x_0 = y_0, \quad 2)\ x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \tag{2}$$

Эти условия:

- дают удобную для решения задач расшифровку довольно сложного понятия «арксинуса числа y_0» и
- позволяют сформулировать еще два равносильных определения арксинуса.

Определение 2. *Арксинусом числа y_0 (обозначение «arcsin y_0») называется такое число x_0 из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен y_0, т. е.:*

$$\begin{cases} \arcsin y_0 = x_0 \\ y_0 \in [-1; 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x_0 = y_0 \\ x_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}. \tag{3}$$

Определение 3. *Арксинусом числа y_0 (обозначение arcsin y_0) называется корень уравнения $\sin x = y_0$ на отрезке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:*

$$\begin{cases} \sin x = y_0 \\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 = \arcsin y_0 \\ y_0 \in [-1; 1] \end{cases}. \tag{4}$$

Итак, мы привели определения арксинуса, прокомментируем их.

2.2. Комментарии

Вводить новое объективно сложное понятие «арксинус» целесообразно именно с *Определения 1* и с иллюстрацией его на графике функции *f*, рис. 2.1. Почему? Да потому, что они (*Определение 1* и график) позволяют ясно понять и увидеть главное: число x_0, при котором $y = f(x_0) = y_0$, существует, его даже можно (приблизительно) измерить, а названия, символа y числа x_0 пока нет. Вот его и назвали *арксинусом числа* y_0 и обозначили символом $x_0 = \arcsin y_0$.

То есть с помощью графика мы естественным образом ощущаем необходимость в новом термине, новом символе и удовлетворяем эту потребность общепринятым образом, но с помощью привычных величин x_0, y_0. Иных, дополнительных букв здесь вводить не требуется. Такова суть *Определения 1*.

С помощью *Определения 1* мы уяснили смысл понятия «арксинус». Это облегчает его дальнейшее изучение, в частности понимание и запоминание других двух важных определений.

Определение 2 позволяет заменить новый и пока непривычный символ «арксинус» старым и более привычным символом «sin». Поэтому оно активно используется в задачах с арксинусом.

Определение 3 дает название и символ единственному корню уравнения $\sin x = y_0$ на отрезке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; т. е. дает название и символ решению обратной задачи для функции f (по значению y_0 найти значение x_0).

В совокупности все три определения достаточно подробно раскрывают суть вводимого понятия «арксинус».

Помогает также следующая расшифровка числа $x_0 = \arcsin y_0$. Это – такая арка, дуга или центральный угол из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен y_0.

Подчеркнем. Символом «$\arcsin y_0$» мы лишь *обозначили* интересующее нас значение x_0 аргумента функции (1), при котором $y = y_0$, или, что то же самое, лишь дали *название*, *обозначение* корню уравнения $\sin x = y_0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Но, конечно, пока еще ничего не вычислили. Найти же численные значения арксинусов можно по графику, тригонометрическому кругу, по специальным методам, а проверить – по условиям (2).

2.3. График функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и значения арксинусов

График этой функции схематично изображен на рис. 2.2. Здесь значения аргумента x_0 (значения арксинусов) кратны $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$. С помощью графика находим значения $\arcsin y_0$ при $y_0 \in \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$ и затем проверяем выполнение двух условий из (2).