ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие не является сборником задач в обычном смысле слова. Как явствует из его структуры, оно преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункта.

В разделе – «Опорный конспект» – вводятся и разъясняются все базисные понятия и методы. Даются иллюстрирующие примеры, вопросы для самопроверки, решаются типовые задачи. Материал располагается в той же последовательности, что и на лекциях, но без доказательств. Даются только определения, формулировки и пояснения теорем, их физическая и геометрическая интерпретация, чертежи, выводы, правила. Второстепенные вопросы опущены.

В разделе «Вопросы для самопроверки» – содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют, то или иное теоретическое положение. Назначение этого пункта – помочь студенту в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать ему возможность самому проконтролировать усвоение основных понятий. Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этой сути. Из этого раздела преподаватель может черпать вопросы для проверки готовности студентов к практическому занятию по той или иной теме.

В разделе «Примеры решения задач» – разобраны типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. При этом большое внимание уделяется обсуждению не только «технических приемов», но и различным «тонким местам», например, условиям применимости той или иной теоремы или формулы.

Назначение раздела «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» – определено его названием. При подборе упражнений были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники. В конце задачи дается ответ и указание.

Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Авторы надеются, что данное пособие поможет студентам в овладении методами линейной алгебры, в их самостоятельной работе над предметом. Они также выражают надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримут все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Опорный конспект

Последовательность точек в n-мерном евклидовом пространстве Понятие мерного евклидова пространства

Совокупность n чисел называется ***упорядоченной***, если указано, какое из этих чисел считается первым, какое – вторым, и т.д.

Произвольную упорядоченную совокупность n чисел часто записывают в виде $(x_1; x_2; \cdots; x_n)$, где x_1 – первое число из ***совокупности*** n чисел, x_2 – второе число, и т.д.

Множество всевозможных ***упорядоченных совокупностей*** n чисел ся n-***мерным координатным пространством*** и **обозначается** $\mathbf{R}^n$.

Каждая ***упорядоченная совокупность*** $(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ называется точкой этого пространства и **обозначается** так $M(x_1; x_2; \cdots; x_n)$.

При этом числа $x_1; x_2; \cdots; x_n$ называются координатами точки M.

Расстоянием между двумя ***произвольными*** точками

$$M_1(x_1; x_2; \cdots; x_n) \text{ и } M_2(y_1; y_2; \cdots; y_n)$$

координатного пространства $\mathbf{R}^n$ называется число $\rho(M_1; M_2)$, определяемое формулой

$$\rho(M_1; M_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}. \qquad (1)$$

Определение. ***Координатное*** пространство $\mathbf{R}^n$ с введенным по формуле (1) расстоянием между точками называется $\boldsymbol{n}$-***мепрным евклидовым*** пространством и **обозначается** $\mathbf{E}^n$.

- Отметим, что ***евклидово*** пространство $\mathbf{E}^1$ представляет собой числовую прямую (т.е. ***множество*** всех вещественных чисел) и геометрически изображается ***координатной*** прямой.
- Аналогично евклидовы пространства $\mathbf{E}^2$ и $\mathbf{E}^3$ геометрически представляют собой соответственно плоскость и трёхмерное пространство. В этих пространствах введены ***прямоугольные*** системы координат.

Формула (1) обобщает известную из ***аналитической геометрии*** формулу расстояния между точками на случай -***мерного*** пространства.

Множество точек пространства $\mathbf{E}^n$

Пусть точка$C \in \mathbf{E}^n$, R – некоторое ***положительное*** число.

Множество точек $\{\boldsymbol{M}: \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{C}) \leq \boldsymbol{R}\}$ (т.е. *множество* всех точек *евклидова* пространства $\mathbf{E}^{\boldsymbol{n}}$**,** удовлетворяющих условию $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{C}) \leq \boldsymbol{R}$**),** называется $\boldsymbol{n}$-*мерным шаром* радиуса $\boldsymbol{R}$ с центром в точке $\boldsymbol{C}$**.**

Множество точек $\{M: \rho(M; C) \leq R\}$ называется ***открытым*** $\boldsymbol{n}$-***мерным шаром*** радиуса R с центром в точке C.

Множество точек $\{M: \rho(M; C) = R\}$ называется $\boldsymbol{n}$-***мерной сферой*** радиуса R с центром в точке C.

Отметим, что при $n = 2$ (т.е. на ***евклидовой*** плоскости) эти ***множества*** представляют собой соответственно ***круг***, ***открытый круг*** и ***окружность*** радиуса R с центром в точке C.

Открытый шар радиуса ε с центром в точке C называется ε-окрестностью точки C.

Пусть точка C имеет координаты$(c_1; c_2; \cdots; c_n)$, а $d_1; d_2; \cdots; d_n$ – ***положительные*** числа.

Множество точек

$$\{M(x_1; x_2; \cdots; x_n): |x_1 - c_1| < d_1, |x_2 - c_2| < d_2, \cdots, |x_n - c_n| < d_n\}$$

называется ***n-мерным параллелепипедом***.

При $n = 2$ это ***множество*** представляет собой прямоугольник.

Пусть $\{M\}$ – некоторое ***множество*** точек пространства $\mathbf{E}^n$.

Определение. Точка C называется ***внутренней*** тоской ***множества*** $\{M\}$, если существует ε-окрестность точки C, целиком принадлежащая ***множеству*** $\{M\}$, (т.е. все точки этой ε-окрестности принадлежат ***множеству*** $\{M\}$; рис.1)

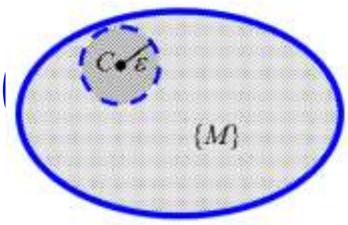

Рис.1

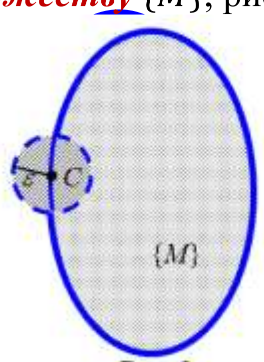

Рис.2

Определение. Точка C называется ***граничной*** точкой ***множества*** $\{M\}$, если в любой ε-окрестности точки C содержатся точки, как принадлежащие ***множеству*** $\{M\}$, так и не принадлежащие ему (рис.2).

Отметим, что ***граничная*** точка ***множества*** может, как принадлежать этому ***множеству***, так и не принадлежать ему.

Определение. ***Множество*** {M} называется ***открытым***, если все его точки – ***внутренние***.

Определение. ***Множество*** {M} называется ***замкнутым***, если оно содержит все свои ***граничные*** точки. ***Множество*** всех ***граничных*** точек ***множества*** {M} называется его ***границей***.

Определение. Точка C называется ***предельной*** точкой ***множества*** {M}, если в любой ε-окрестности точки C содержатся точки ***множества*** {M}, отличные от C.

Образно говоря, точка C называется ***предельной*** точкой ***множества*** $\{M\}$, если «к точке C можно подойти сколь угодно близко, идя по точкам ***ства*** $\{M\}$ и не наступая на саму точку C». Отметим, что ***предельная*** точка ***множества*** может принадлежать, а может и не принадлежать этому ***множеству***.

Множество $\{M\}$ называется ***ограниченным***, если все его точки содержатся в некотором ***шаре***.

Множество

$$L = \{M(x_1; x_2; \cdots; x_n): x_1 = \varphi_1(t); x_2 = \varphi_2(t); \cdots; x_n = \varphi_n(t); \alpha \le t \le \beta\},$$

где $\varphi_1(t);\cdots;\varphi_n(t)$ – непрерывные функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, называется непрерывной кривой в пространстве $\mathbf{E}^n$.

Точки $A\big(\varphi_1(\alpha);\cdots;\varphi_n(\alpha)\big)$ и $B\big(\varphi_1(\beta);\cdots;\varphi_n(\beta)\big)$ называются концами кривой L. Говорят, также, что непрерывная кривая L соединяет точки A и B.

Множество

$$\{M(x_1;x_2;\cdots;x_n): x_1 = x_1^0 + \alpha_1 t; x_2 = x_1^0 + \alpha_2 t;\cdots; x_n = x_n^0 + \alpha_n t; -\infty < t < \infty\},$$

где $x_1^0;\cdots;x_n^0, \alpha_1;\cdots;\alpha_n$ – числа, называется прямой в пространстве $\mathbf{E}^n$. Очевидно, эта прямая проходит через точку $M_0(x_1^0;x_2^0;\cdots;x_n^0)$ (точка M_0 соответствует $t=0$).

Множество $\{M\}$ называется ***связным***, если любые две точки этого ***множества*** можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому ***множеству***.

Окрестностью точки C называется любое ***открытое связное множество***, содержащее точку C.

Открытое связное множество называют также областью, а объединение области и её границы – ***замкнутой*** областью.

1. Понятие функции нескольких переменных

Пусть $\mathbf{E}$ есть область изменения независимых переменных x и y.

Переменная z называется функцией независимых переменных x и y на ***множестве*** $\mathbf{E}$, если каждой ***упорядоченной паре*** чисел $(x;y)\in\mathbf{E}$ соответствует определенное значение z.

Множество $\mathbf{E}$ пар чисел $(x;y)$, на котором определена функция, называется областью определения, или областью существования функции.

Символически функция двух переменных **записывается** в виде одного из равенств $z=f(x;y), z=F(x;y), z=z(x;y)$ и т.д.

В первом из этих равенств f обозначает ***закон соответствия***. Этот ***закон*** может быть задан ***аналитически*** (формулой), с помощью ***таблицы*** или ***графика***. Так как всякое уравнение $z=f(x;y)$ определяет, вообще говоря, в пространстве, в котором введена, ***декартова*** система координат $Oxyz$, некоторую поверхность, то под ***графиком*** функции двух переменных будем понимать поверхность, образованную ***множеством*** точек $M(x;y;z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $z=f(x;y)$.

Геометрически область определения функции $\mathbf{E}$ обычно представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область $\mathbf{E}$ называется ***замкнутой*** и обозначается $\overline{\mathbf{E}}$, во втором – ***открытой***.

Частное значение функции $z=f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ **ся** $f(x_0;y_0)$ или $f(M_0)$.

Определение функции двух переменных легко обобщается на случай трех и большего числа переменных.

Переменная величина u называется функцией трех переменных величин $x; y; z$, если каждой ***упорядоченной тройке*** значений $x; y; z$ соответствует определенное значение u. **Обозначение** $u = f(x; y; z)$, $u = u(x; y; z)$ и т. д.

Величина y называется функцией ***упорядоченных*** переменных $x_1; x_2; \cdots; x_n$, если каждой ***совокупности*** $(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ переменных $x_1; x_2; \cdots; x_n$ из некоторой области ***n-мерного*** пространства соответствует определенное значение y, что ***символически* записывается** в виде $y = f(x_1; x_2; \cdots; x_n)$.

Так как ***совокупность*** значений независимых переменных $x_1; x_2; \cdots; x_n$ определяет точку ***n-мерного*** пространства $M(x_1; x_2; \cdots; x_n)$, то всякую функцию нескольких переменных обычно рассматривают как функцию точек M пространства соответствующей размерности $y = f(M)$.

Линией уровня функции $z = f(x; y)$ называется ***множество*** точек сти Oxy, для которых данная функция имеет одно и то же значение.

Уравнение ***линии уровня*** есть $\boxed{f(x; y) = C}$.

Поверхностью уровня функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ называется ***множество*** точек пространства $Oxyz$, для которых данная функция имеет одно и то же значение, то есть $\boxed{f(x; y; z) = C}$.

2. Частное и полное приращение

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области **E** на сти Oxy. Одной из основных задач теории функций нескольких переменных является ***задача исследования*** данной функции.

Возьмем ***внутреннюю*** точку $(x; y)$ из области **E** и дадим x приращение Δx такое, чтобы точка $(x + \Delta x; y) \in$ **E**.

Величина $\boxed{\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}$ называется частным приращением функции z по переменной x.

Возьмем ***внутреннюю*** точку $(x; y)$ из области **E** и дадим y приращение Δy, такое, чтобы точка $(x + \Delta x; y) \in$ **E**.

Величина $\boxed{\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}$ называется частным приращением функции z по переменной y.

Возьмем ***внутреннюю*** точку $(x; y)$ из области **E** и дадим переменным x и y соответственно приращения Δx и Δy, такие, чтобы точка $(x + \Delta x; y + \Delta y) \in$ **E**

Величина $\boxed{\Delta z = (x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)}$ называется полным приращением функции z.

Частные приращения функции $u = f(x; y; z)$ определяются формулами:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x; y; z) - f(x; y; z); \ \Delta_y u = f(x; y + \Delta y; z) - f(x; y; z);$$

$$\Delta_z u = (x; y; z + \Delta z) - f(x; y; z).$$

Полное приращение функции $u = f(x; y; z)$:

$$\Delta u = f(x+\Delta x; y+\Delta y; z+\Delta z) - f(x;y;z).$$

Аналогично определяются частные приращения функции n переменных.
Например, $\Delta_x u = f(x+\Delta x; y; z; \cdots; t) - f(x;y;z;\cdots;t)$.
Полное приращение функции n переменных:

$$\Delta u = f(x+\Delta x; y+\Delta y; z+\Delta z; \cdots t+\Delta t) - f(x;y;z;\cdots;t).$$

3. Предел функции нескольких переменных
Непрерывность

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности Ω точки $M_0(x_0;y_0)$, кроме, может быть, самой точки M_0.

Число называется пределом функции $f(M)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M(x;y) \in \Omega$, отличных от точки $M_0(x_0;y_0)$ и удовлетворяющих условию $0 < \rho(M;\ M_0) < \delta$, верно неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Обозначения $A = \lim_{M \to M_0} f(M)$ или $A = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$.

Предполагается, что точка M может стремиться к точке M_0 по любому закону, по любому направлению, и все соответствующие предельные значения существуют и равны числу A.

1. Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0;y_0)$, если
$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0) \text{ или } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$
2. Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0;y_0)$ если для го $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M \in \Omega$, таких, что $\rho(M;\ M_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.
3. Обозначая через Δx и Δy приращения независимых переменных x и y при переходе от точки $M_0(x_0;y_0)$ к точке $M(x;y)$, получим, что ство $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$ будет равносильно равенству $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \Delta z = 0$, которое означает, что ***бесконечно малому*** расстоянию между точками M
4. и M_0 соответствует ***бесконечно малое*** приращение функции.

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке области **E**, то она называется непрерывной в области **E**. Точки, в которых функция $f(M)$ не является непрерывной, называются точками ***разрыва*** этой функции. Точки ***разрыва*** функции $f(x;y)$ могут быть изолированными и могут заполнять целые линии.

4. Частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных

Частной производной функции $z = f(x; y)$ по переменной x в точке $(x; y)$ называется предел (если он существует) отношения соответствующего частного приращения функции $\Delta_x z$ к вызвавшему его приращению независимой ной Δx, когда Δx стремится к нулю.

Обозначение: Обозначается частная производная любым из символов

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x, f'_x(x; y).$$

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \text{ или, что есть то же самое } f'_x(x; y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная функции по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \text{ или, что есть то же самое } f'_y(x; y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Если $u = f(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ — функция n независимых переменных, то

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1; x_2; \cdots; x_{k-1}; x_k + \Delta x_k; \cdots; x_n) - f(x_1; x_2; \cdots; x_{k-1}; x_k; \cdots; x_n)}{\Delta x_k}.$$

Заметив, что $\Delta_x z$ вычисляется при постоянном значении y, а $\Delta_y z$ — при неизменном значении переменой x, определения частных производных можно сформулировать так:

частной производной по переменной x функции $z = f(x; y)$ называется обычная производная этой функции по x, вычисленная в предположении, что y — постоянная;

частной производной по переменной y функции $z = f(x; y)$ называется обычная производная этой функции по y, вычисленная в предположении, что x — постоянная.

Отсюда следует, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами, доказанными для функции одной переменной.

Замечание. Отметим одну особенность **обозначения** $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Надо помнить, что это есть ***цельный символ*** для z'_x, а никак не дробь. Чем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и отличается от обозначения $\frac{dz}{dx}$ для производной функции одного аргумента $y = f(x)$.

Действительно, $\frac{dz}{dx}$ и в самом деле есть самая настоящая дробь. Нелишне заметить, что (в отличие от dx и dz) символы ∂x и ∂z сами по себе не имеют смысла.

4.1. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Пусть в трехмерном пространстве поверхность S задана уравнение $z = f(x;y)$, где $f(x;y) -$ функция, непрерывная в некоторой области **E** и имеющая там частные производные по x и по y. Выясним геометрический смысл этих производных в точке $M_0(x_0;y_0) \in \mathbf{E}$, которой на поверхности $z = f(x;y)$ соответствует ка $N_0\big(x_0;y_0;f(x_0;y_0)\big)$.

Частная производная $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Big|_{M_0}$ равна тангенсу угла α между осью Ox и касательной в точке N_0 к кривой, полученной в сечении поверхности $z = f(x;y)$ стью $y = y_0$, то есть $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Big|_{M_0} = \operatorname{tg}\alpha$. Аналогично получаем, что $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Big|_{M_0} \operatorname{tg}\beta$, где $\beta -$ угол между осью Oy и касательной в точке N_0 к кривой, полученной в сечении поверхности $z = f(x;y)$ плоскостью $x = x_0$.

4.2. Дифференцируемость функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой области **E** на плоскости Oxy. Возьмем точку $(x;y) \in \mathbf{E}$ и выбранным значениям x и y дадим любые ния Δx и Δy, но такие, чтобы точка $(x+\Delta x; y+\Delta y) \in \mathbf{E}$.

Функция $z = f(x;y)$ называется дифференцируемой в точке $(x;y) \in \mathbf{E}$, если полное приращение $\boxed{\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)}$ этой функции, отвечающее приращениям $\Delta x, \Delta y$ аргументов, можно представить виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x;\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x;\Delta y)\Delta y,$$

где A и B не зависят от Δx и Δy (но вообще зависят от x и y), а $\alpha(\Delta x;\Delta y)$ и $\beta(\Delta x;\Delta y)$ стремятся к нулю при стремлении к нулю Δx и Δy.

Понятие дифференцируемости для функций трех и более переменных вводится аналогично случаю функции трех переменных.

4.3. Полный дифференциал. Частные дифференциалы

Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $(x;y)$, то часть $A\Delta x + B\Delta y$ приращения функции, линейная относительно Δx и Δy, называется полным дифференциалом этой функции в точке $(x;y)$ и **обозначается** символом dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

Замечая, что $A = \frac{\partial z}{\partial x}, B = \frac{\partial z}{\partial y}$, запишем полный дифференциал функции в следующем виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

где $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

Выражение

$$d_x z = f'_x(x;y)dx$$

называется частным дифференциалом функции $z = f(x;y)$ по переменной x; выражение

$$d_y z = f'_y(x;y)dy$$

называется частным дифференциалом функции $z = f(x;y)$ по переменной y.

Полный дифференциал функции трех переменных $u = f(x;y;z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Аналогично, если $u = f(x_1;x_2;\cdots;x_n)$ есть дифференцируемая функция n независимых переменных, то

$$du = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k \ (dx_k = \Delta x_k).$$

5. Техника дифференцирования функции нескольких переменных

5.1. Дифференцирование простых функций

Чтобы определить частную производную по одному из аргументов, нужно при дифференцировании считать все остальные аргументы постоянными.

5.2. Дифференцирование сложных функций

I. Пусть $z = f(x;y), x = x(t), y = y(t)$.

Тогда $z = f\big(x(t);y(t)\big)$ есть ***сложная*** функция независимой переменной t. Если функции f, x, y дифференцируемы каждая в своей области, то производную ***сложной*** функции находят по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

II. Пусть $z = f(x;y), x = x(\xi;\eta), y = y(\xi;\eta)$.

Тогда $z = f\big(x(\xi;\eta);y(\xi;\eta)\big)$ есть ***сложная*** функция независимых ных ξ и η. Если функции f, x, y дифференцируемы каждая в своей области, то частные производные сложной функции находят по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{d\xi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{d\eta}.$$

Полный дифференциал этой функции сохраняет свою форму и в случае, когда переменные x и y являются функциями независимых переменных ξ, η, а именно:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(***инвариантность*** формы).

Если ***сложная*** функция u задана формулами

$$u = f(x;y;z), x = x(\xi;\eta), y = y(\xi;\eta), z = z(\xi;\eta) \text{ так что } u = u(\xi;\eta),$$

то при выполнении соответствующих условий имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\eta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Переменные x, y, z называются ***промежуточными*** аргументами.

5.3. *Дифференцирование неявных функций*

Если уравнение $F(x;y) = 0$ задает некоторую функцию $y(x)$ в неявном виде и $F'_y(x;y) \neq 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}.$$

Если уравнение $F(x;y;z) = 0$ задает функцию двух переменных $z(x;y)$ в неявном виде и $F'_z(x;y;z) \neq 0$, то справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}.$$

5.4. *Частные производные высших порядков*

Частными производными второго порядка функции $z = f(x;y)$ называют частные производные от ее частных производных первого порядка.

Они **обозначаются** следующим образом:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{xx}(x;y) = \left(f'_x(x;y)\right)'_x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{yy}(x;y) = \left(f'_y(x;y)\right)'_y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{yx}(x;y) = \left(f'_y(x;y)\right)'_x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{xy}(x;y) = \left(f'_x(x;y)\right)'_y.$$

Если ***смешанные*** частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ непрерывны в рассматриваемой точке $M(x;y)$, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ (результат не зависит от порядка дифференцирования).

Аналогично определяются и обозначаются частные производные более высокого порядка, например, смешанная частная производная третьего порядка: сначала два раза по x, а затем один раз по переменной y:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right).$$

Запись $\frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ означает, что функция z продифференцирована k раз по переменной x и $n-k$ раз по переменной y.

6. Применение дифференциального исчисления функций многих переменных в геометрии

6.1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в данной ее точке M (точке касания) называется плоскость, в которой лежат касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным на данной поверхности через ***указанную*** точку.

Нормалью к поверхности называется ***перпендикуляр*** к ***касательной*** плоскости в точке касания.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x;y)$ и $M_0(x_0;y_0;z_0)$ − точка на поверхности, то уравнение ***касательной*** плоскости к поверхности в этой точке имеет вид $z - z_0 = f'_x(x_0;y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)$, а ***нормаль*** к поверхности в точке M_0 определяется уравнением

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Если поверхность *задана* уравнением $F(x;y;z) = 0$ в ***неявной*** форме, а ка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ лежит на поверхности, то уравнение ***касательной*** плоскости имеет вид

$$F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0) = 0,$$

а ***нормаль*** к поверхности в той же точке определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}.$$

7. Экстремум функции двух переменных

Если существует такое число $\delta > 0$, что для всех Δx и Δy, удовлетворяющих условиям $|\Delta x| < \delta$ и $|\Delta y| < \delta$, верно неравенство

$$\boxed{\Delta f(x_0; y_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) < 0},$$

то точка $M_0(x_0; y_0)$ называется точкой ***локального максимума*** функции $f(x; y)$; если же для всех Δx и Δy, удовлетворяющих условиям $|\Delta x| < \delta$ и $|\Delta y| < \delta$,

$$\boxed{\Delta f(x_0; y_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) > 0},$$

то точка $M_0(x_0; y_0)$ называется точкой ***локального минимума***.

Иными словами, точка $M_0(x_0; y_0)$ есть точка ***максимума*** или ***минимума*** ции $f(x; y)$, если существует δ-окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$ такая, что во всех точках $M(x; y)$ этой окрестности приращение функции $\Delta f = f(x; y) - f(x_0; y_0)$ сохраняет знак.

Значение функции в точке ***максимума*** называется ***максимумом***, а значение функции в точке ***минимума*** – ***минимумом*** этой функции.

Точки ***максимума*** и точки ***минимума*** функции называются точками ***экстремума*** функции, а сами ***максимумы*** и ***минимумы*** функции – ее ***экстремумами***.

Необходимое условие существования ***локального экстремума***: если ция $f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет ***локальный экстремум***, то в этой точке обе частные производные, если они существуют, равны нулю или хотя бы одна из них в этой точке не существует (***критические*** точки функции $f(x; y)$).

Сформулируем достаточные условия существования ***локального экстремума***. Пусть

$$A = f''_{xx}(M_0), B = f''_{xy}(M_0), C = f''_{yy}(M_0); D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2, \text{тогда}$$

1) если $D > 0$, то имеет в точке M_0 ***локальный экстремум***
   при $A > 0$ минимум
   при $A > 0$ максимум;
2) если $D < 0$, ***экстремума*** в точке M_0 нет;
3) если $D = 0$, функция может иметь, а может и не иметь ***локальный экстремум*** (требуются дополнительные исследования)
4)

7.1. Отыскание наибольших и наименьших значений функции двух независимых переменных в замкнутой области

По теореме Вейерштрасса, если функция $f(M)$ непрерывна в ограниченной области $\overline{G}$, то

1) функция $f(M)$ ограничена в области $\overline{G}$;
2) функция $f(M)$ принимает в области $\overline{G}$ ***наибольшее*** и ***наименьшее*** значения.

Замечание 1. В данном случае нет необходимости исследовать функцию на ***экстремум*** с помощью частных производных второго порядка. Требуется найти ***стационарные*** точки и значения функции в них.
Замечание 2. Для функции $z = f(x;y)$ граница области состоит из нескольких дуг (отрезков), уравнения которых $y = y(x)$, где $a \le x \le b$ или $x = x(y)$, где $c \le y \le d$, поэтому на соответствующих дугах границы данная функция является функцией одной переменной:

$$z = f\big(x;y(x)\big) = z(x) \text{ или } z = f(x(y);y) = z(y).$$

Если граница задана ***параметрическими*** уравнениями

$$x = x(t), y = y\,(t)\ (\alpha \le t \le \beta),$$

то данная функция также превращается в функцию одной переменной

$$z = f(x;y) = f\big(x(t);y(t)\big) = z(t).$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения: а) ***упорядоченной совокупности*** n чисел; б) ***n-мерного координатного*** пространства; в) ***n-мерного евклидова*** пространства.
2. Дайте определения: а) ***n-мерного шара***; б) ***открытого n-мерного шара***; в) ***n-мерной сферы***; г) ***n-мерного параллелепипеда***; д) ε - окрестности точки.
3. Дайте определение ***внутренней*** точки ***множества***. Может ли ***внутренняя*** точка ***множества*** не принадлежать этому ***множеству***?
4. Дайте определение граничной точки ***множества***. Может ли точка быть одновременно ***внутренней*** и граничной точкой какого-то ***множества***? Может ли точка ***множества*** быть одновременно ***не внутренней*** и не граничной точкой этого ***множества***?
5. Дайте определение ***открытого множества***. Являются ли ***открытыми*** следующие ***множества***: а) ***n-мерный шар***; б) ***n-мерная сфера***; в) ε - окрестности точки?
6. Дайте определение ***замкнутого множества***. Может ли **множество** быть одновременно: а) ***открытым*** и ***замкнутым***; б) ***не открытым*** и ***не замкнутым***? Являются ли ***замкнутыми*** следующие ***множества***: а) ***n-мерный шар***; б) ***n-мерная сфера***; в) ε - окрестности точки; г) ***n-мерный параллелепипед***?
7. Что представляет собой граница: а) ***n-мерного шара***; б) ***открытого n-мерного шара***; в) ***n-мерной сферы***?
8. Дайте определение ***предельной*** точки ***множества***. Может ди граничная точка ***множества***: а) быть ***предельной*** точкой этого ***множества***; б) не быть ***предельной*** точкой этого ***множества***.
9. Дайте определение ***связного множества***. Являются ли ***связными*** следующие ***множества***: а) ***n-мерный шар***; б) ***n-мерная сфера***; в) прямая в пространстве $\mathbf{E}^n$?
10. Дайте определение окрестности точки.
11. Какое ***множество*** точек называют: областью; ***замкнутой*** областью?
12. Что называется функцией двух переменных, ее ***областью определения***? Дайте геометрическое истолкование этих понятий.