Оглавление

Введение

Современное понятие об аксиоматическом методе построения научных теорий было сформировано в первой половине XX века в трудах Давида Гильберта (начиная с его «Оснований геометрии» 1899 года [1], [2]) и его последователей. В России пионером нового аксиоматического метода был Вениамин Федорович Каган (1869–1953), защитивший в 1907 году в Одесском университете магистерскую диссертацию на тему «Задача обоснования геометрии в современной постановке» [3], [4]. Наряду с Готлобом Фреге и Бертраном Расселом Давида Гильберта можно с полным правом назвать отцом-основателем нового формального математического подхода в логике, который определил облик этой дисциплины в XX веке и привел к ее бурному развитию, продолжающемуся вплоть до наших дней.

Давид Гильберт не был логиком в узком смысле: его работы в области логики и оснований математики вошли в более широкий научный контекст, который включает в себя чистую и прикладную математику, а также математическую физику. Именно поэтому восходящее к Гильберту современное представление об аксиоматическом методе построения теорий включает в себя не только формально-логическую технику, но и общий подход к применению этой логической техники в данной области научного знания, а также эпистемологически фундированный взгляд на роль и место аксиоматизированных теорий в практике научных исследований и в научном образовании.

Широкую философскую дискуссию, которая продолжается и сегодня, вызвали полученные в 1930-е годы Куртом Гёделем ограничительные теоремы («теоремы о неполноте»), которые показали неосуществимость так называемой «программы Гильберта», то есть программы формальной аксиоматизации математики и использующих математику научных дисциплин в ее первоначальном виде. Не ставя под сомнение важное философское значение этой дискуссии, мы хотим подчеркнуть, что она не касается ряда существенных эпистемологических вопросов, связанных с аксиоматическим методом. Теоремы о неполноте Гёделя и подобные ограничительные результаты — это в первую очередь математические утверждения; общие эпистемологические следствия они имеют только потому, что математические конструкции, о которых делаются эти утверждения, интерпретируются как универсальные математические модели математических и научных теорий. Основной эпистемологический вопрос, остающийся в стороне при обсуждении ограничений геделевского типа, — это вопрос о том, в какой мере формальные аксиоматические теории, построенные по рецепту Гильберта и его последователей, можно считать адекватными моделями содержательных математических и научных теорий, с которыми имеют дело работающие математики, специально не занимающиеся проблемами оснований, а также ученые любых других специальностей. Именно этот вопрос находится в центре настоящего исследования.

Как это обычно делается в философии науки, говоря об адекватности формальной модели теории содержательным прототипам, мы намеренно смешиваем нормативные и описательные аспекты. С одной стороны, мы вслед за Гильбертом допускаем, что логически и эпистемологически фундированное понятие формальной аксиоматической теории способно выполнять нормативную функцию, то есть предъявлять формальную структуру правильно построенной содержательной теории, с другой стороны, мы считаем, что нормативное понятие правильно построенной теории не может быть фундировано только с помощью философской спекуляции, но должно опираться на лучшие и наиболее прогрессивные образцы современной науки. Суждение о том, какие именно образцы современной науки можно назвать наиболее подходящими для того, чтобы придать им нормативный статус, не является совершенно очевидным, опирается на неформальные соображения и в конечном счете остается в поле совместной ответственности ученого сообщества и философа-эпистемолога.

Популярный ответ на вопрос об адекватности стандартного аксиоматического метода современному состоянию науки состоит в следующем. Разумеется, формальные аксиоматические теории представляют собой идеализированные схематические модели реальных теорий, которые не учитывают многие неформальные аспекты реальных теорий, имеющие важное значение для научной практики. Формальный аксиоматический подход играет ключевую роль в анализе логических оснований законченных теорий, но не приспособлен для решения любых других научных задач. Неформальные аспекты научной практики наряду с формальными аспектами научных теорий могут быть предметом философской рефлексии и эпистемологического исследования. Но любое смешение этих двух аспектов неправомерно и порождает понятийную путаницу.

На наш взгляд, такой ответ не может быть удовлетворительным, поскольку он предполагает, что понятие формальной аксиоматической теории и отношение формальных теорий к содержательным являются раз и навсегда фиксированными. Однако такое предположение безосновательно. Новый аксиоматический подход, предложенный в первой половине XX века Гильбертом, опирался на логические и эпистемологические идеи своего времени, которые, в свою очередь, были тесно связаны с современной научной практикой, в первую очередь в области чистой математики. Этот новый подход к построению аксиоматических теорий существенно отличается от более ранних исторических форм аксиоматики, включая аксиоматику Евклида. Однако в XX веке логика и математика не стояли на месте, а напротив, очень бурно развивались. Нет никаких причин считать, что пересмотр формальной архитектуры научных теорий в начале XX века является окончательным и допускает только чисто технические доработки. На сегодняшний день предложенная Гильбертом и усовершенствованная его последователями формальная аксиоматическая архитектура теорий уже не является единственной, но имеет интересные альтернативы, которые подробно рассмотрены в настоящей работе. Таким образом, актуальность данного исследования определяется необходимостью включить в поле философской рефлексии и эпистемологического анализа новые достижения аксиоматического мышления, которые, с нашей точки зрения, являются философски значимыми, но на сегодняшний день остаются в основном вне поля зрения философов науки. Цель автора данной работы состоит в том, чтобы на основе анализа новых аксиоматических подходов в современной математике и логике (аксиоматическая теория топосов и гомотопическая теория типов) эксплицировать и эпистемологически фундировать адекватное передовой научной практике последних десятилетий понятие об аксиоматической архитектуре научной теории, а также предложить перспективу более широкого использования новых аксиоматических подходов в современной науке и технике, включая цифровые информационные технологии представления знаний.

В главе 1 мы демонстрируем и анализируем отличия аксиоматического метода Гильберта от более традиционных аксиоматических подходов в математике. Для этой цели мы сравниваем аксиоматические теории элементарной геометрии Евклида (раздел 1.1) и Гильберта (раздел 1.2) и показываем, что эти теории существенно различаются по своей формальной архитектуре, несмотря на то что они имеют общее интуитивное содержание. Специальное внимание мы уделяем аккуратной исторической реконструкции аксиоматической архитектуры геометрической теории «Начал» Евклида. Этот исторический пример является для нас одной из мотивировок появления понятия конструктивной аксиоматической теории наряду с примерами математических теорий, созданных в наши дни. В этой главе мы также вслед за Владимиром Александровичем Смирновым [5] рассматриваем в исторической и теоретической перспективе понятие *генетического* метода построения теорий и сравниваем генетический метод со стандартным аксиоматическим методом в стиле Гильберта (раздел 1.3).

В главе 2 представлен критический обзор практики использования стандартного аксиоматического метода в науке XX века, включая чистую математику, естественные и компьютерные науки. Мы начинаем обзор с анализа использования стандартного аксиоматического подхода в теории множеств, где этот подход реализован в более полной мере, чем в любой другой области математики (раздел 2.1). Затем мы подробно разбираем попытку Никола Бурбаки (коллективный псевдоним группы французских математиков) внедрить аксиоматический метод в широкую математическую практику, делая при этом акцент на специфическом теоретико-модельном характере аксиоматического подхода Бурбаки (раздел 2.2). В подразделе 2.3 мы анализируем попытки использования аксиоматического метода в стиле Гильберта в естественных науках и показываем, что на сегодняшний день они не привели к убедительному успеху.

В главе 3 рассмотрены некоторые альтернативные аксиоматические подходы в математике в XX и начале XXI века.

В разделе 3.1 мы анализируем философские мотивации и понятийные основания категорной логики и категорных оснований математики в работах Уильяма Ловера; в этом контексте мы обращаемся к аксиоматической теории топоса (которую также называют теорией элементарного топоса), впервые опубликованной Ловером в 1970 году [6]. Аксиоматизация теории топосов на основе общей теории категорий, выполненная Ловером, позволила существенно упростить эту теорию, а также дала толчок для ее последующего развития. Хотя Ловер не ставил своей целью пересмотр восходящего к Гильберту стандартного понятия аксиоматической теории, мы показываем, что аксиоматический подход Ловера существенно отличается от стандартного.

Раздел 3.2 посвящен гомотопической теории типов и связанной с этой теорией программе построения новых оснований математики, которые, по предложению Владимира Воеводского, называют сегодня *унивалентными* основаниями [7]. Здесь мы также уделяем внимание философским мотивациям и эпистемологическим следствиям программы Воеводского. Стандартная версия унивалентных оснований включает в себя конструктивную теорию типов Мартина-Лёфа (с зависимыми типами), которой дается интуитивная пространственная (и именно гомотопическая) семантика и которая допускает вычислительную имплементацию и таким образом позволяет проводить компьютерную проверку доказательств. Основанная на правилах формальная архитектура этих теорий (то есть архитектура генценовского типа) и ее теоретико-доказательная семантика мотивируют (наряду с упомянутыми выше историческими примерами) описанное в заключительной главе понятие *конструктивного* аксиоматического метода, которое расширяет и обобщает стандартное современное понятие об аксиоматическом методе, связанное с именем Гильберта.

В заключительной главе мы подводим итоги и намечаем планы дальнейших исследований. Здесь мы приводим краткую сводку результатов (раздел 4.1), систематически описываем предлагаемые нами понятия конструктивной аксиоматической теории и конструктивного аксиоматического метода (раздел 4.2), формулируем конструктивный подход к формальной реконструкции научных теорий и намечаем стратегию дальнейшего развития этого подхода (раздел 4.3).

Если не указано иное, все иностранные источники цитируются на русском языке в переводе автора. Данная монография представляет собой авторизованный вариант докторской диссертации автора, которая была успешно защищена в Санкт-Петербургском государственном университете 23 декабря 2020 года.

Благодарности. Я благодарю Наума Яковлевича Виленкина, Александра Павловича Огурцова и Владимира Александровича Смирнова, а также Алексея Георгиевича Барабашева, Сергея Сергеевича Демидова и Василия Яковлевича Перминова, которые на раннем этапе моей карьеры поддержали мой интерес к философским проблемами математики и ее истории; Пьера Картье (Pierre Cartier), Уильяма Ловера (William Lawvere), Юрия Ивановича Манина, Виталия Валентиновича Целищева и Жан-Жака Щециньярца (Jean-Jacques Szczeciniarz), которые помогали мне развивать этот интерес в последующие годы; Сергея Николаевича Артёмова, Владимира Леонидовича Васюкова, Елену Григорьевну Драгалину-Чёрную, Пера Мартина-Лёфа (Per Martin-Löf), Дага Правица (Dag Prawitz) и Якко Хинтикку (Jaakko Hintikka), которые помогли мне войти в круг проблем современной философской логики; Владимира Ивановича Аршинова, Владислава Александровича Лекторского, Еле-

ну Аркадьевну Мамчур, Александра Александровича Печёнкина, Бориса Исаевича Пружинина и Баса ван Фраасена (Bas van Fraassen), которые ввели меня в проблематику общей философии науки. Я также благодарю за многочисленные плодотворные дискуссии Джозефа Альмога (Joseph Almog), Андрея Баэра (Andrej Bauer), Джона Балдвина (John Boldwin), Евгения Васильевича Борисова, Николая Александровича Вавилова, Владимира Александровича Воеводского, Никиту Владимировича Головко, Артема Гуреева, Дебору Кант (Deborah Kant), Алексея Геннадьевича Кислова, Анатолия Николаевича Кричевца, Дэвида Корфилда (David Corfield), Сергея Протасовича Ковалёва, Джеймса Лэдимана (James Ladyman), Елену Николаевну Лисанюк, Клауса Майнцера (Klaus Mainzer), Ивана Борисовича Микиртумова, Игоря Феликсовича Михайлова, Альберта Найбо (Alberto Naibo), Неми Пелгром (Nemi Pelgrom), Давида Рабуэна (David Rabouin), Даниила Дмитриевича Рогозина, Юху Райка (Juha Räikkä), Дениса Сарикая (Deniz Sarikaya), Юлию Вадимовну Синеокую, Станислава Олеговича Сперанского, Сергея Михайловича Титова, Мишель Френд (Michele Friend), Георгия Борисовича Шабата, Владимира Ивановича Шалака, Владислава Алексеевича Шапошникова и Нозона Яновского (Noson Yanofsky). Я искренне признателен моей жене Марине и нашим детям Агате и Аглае за их терпение и неоценимую помощь во время моей работы над этой книгой.

Также благодарю Ольгу Владимировну Филиппову за ее неоценимую помощь в редактировании рукописи.

Глава 1
От Евклида до Гильберта[1]

Во введении к «Основаниям геометрии» [1], [2] Гильберт пишет:

> Геометрия, так же как и арифметика, нуждается для своего построения в немногих и простых основных положениях. Эти основные положения называются аксиомами геометрии. Установление аксиом геометрии и исследование их взаимоотношений — это задача, которая со времени Евклида являлась темой многочисленных прекрасных произведений математической литературы. Задача эта сводится к логическому анализу нашего пространственного представления [2, с. 55].

Имя Евклида появляется не случайно. Очевидно, при подготовке «Оснований геометрии» Гильберт имел в виду труд Евклида «Начала» [41], [42], который пытался воспроизвести на полностью обновленной понятийной базе. В этом смысле работу Гильберта 1899 года можно считать поворотной. Впрочем, не нужно забывать, что переложение глав «Начал» в новых понятиях — это старая и почтенная традиция математической мысли, а гильбертовы «Основания геометрии», так же как и незавершенные «Элементы математики» Бурбаки, принадлежащие уже XX веку [43], [44], — это новые звенья в длинной цепи подобных более ранних работ. В этом ряду можно упомянуть, например, книгу Борелли «Евклид восстановленный» (1658) [45], «Новые начала геометрии» Арно (1667) [46], «Евклид, очищенный от всех пятен» Саккери (1733) [47]. Так что Гильбертов переворот в геометрии, влияние которого на современную математику все еще остается значительным, — это не первый в истории математики подобный поворот и, можно надеяться, что не последний.

[1]Эта глава использует материал из [8], [20], [19, ch. 2–3] и [32].

1.1. Евклид: делать и доказывать

Чтение математических работ прошлого приводит к герменевтической дилемме. Одна возможность состоит в том, чтобы излагать старые математические работы в современных математических понятиях. Другая — в том, чтобы последовательно избегать анахронизмов и подчеркнуть разницу между современным и изучаемым подходом [48]. Всякий, кто берется за такое чтение, должен проскользнуть между Сциллой антикваризма, который заставляет читателя почувствовать себя человеком иной эпохи, и Харибдой презентизма, который превращает читаемый труд в малый фрагмент современного общедоступного математического знания, из-за чего особенности мышления математиков прошлого остаются незамеченными [49].

Мы попытаемся пройти этот «пролив» следующим образом. Будем следовать букве Евклида (в греческой редакции Гейберга [42] и русском переводе Мордухай-Болтовского [41]), но при этом использовать современные интерпретации «Начал», включая явно анахронистические и подвергать некоторые из них критике. Чтобы не потерять за деревьями леса, мы сразу сформулируем основной вывод. Вопреки распространенному мнению, геометрия Евклида — это не набор высказываний, состоящий из аксиом и теорем, которые выводятся из аксиом по правилам логики. Скорее, эту теорию вслед за Фридманом [50, p. 94] можно называть «формой рационального рассуждения», в котором важную роль играют непропозициональные принципы. Мы согласны с мнением Яна Мюллера, который в 1974 году утверждал, что никакая система современной логики не позволяет адекватно реконструировать геометрические доказательства «Начал» Евклида [51], [52]. Однако ниже (в разделе 3.2) мы описываем некоторые черты новой аксиоматической архитектуры, используемой в рамках проекта построения унивалентных оснований математики, которые имеют общие черты с аксиоматической архитектурой «Начал» Евклида.

1.1.1. Доказательство и «показательство»

Все Предложения «Начал», кроме небольшого числа легко объяснимых исключений, укладываются в схему, описанную Проклом в его «Комментарии к первой книге Начал Евклида» [53]:

> Всякая совершенная проблема и теорема должна содержать в себе следующие разделы: *предложение*, *экспозиция*, *спецификация*, *построение*, *доказательство*, *заключение*. Предложение говорит о том, что дано и что является искомым. И совершенное предложение состоит из обеих этих частей. Выстав-

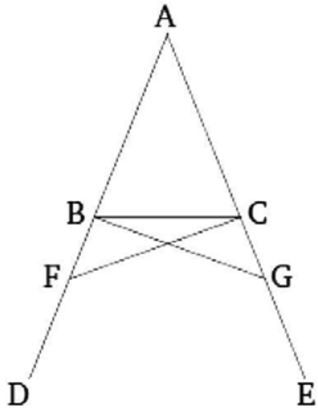

Рис. 1. Теорема 1.5
из «Начал» Евклида

ление берет сами данные и готовит их для поиска. Ограничение отделяет искомое и выясняет, каково оно. Построение добавляет к данным то, чего в них не хватает для того, чтобы найти искомое. Доказательство научным образом собирает наличное из принятых допущений. Заключение возвращается к предложению, подтверждая то, что требовалось доказать [53, с. 185–186] (перевод скорректирован).

Термин «предложение», который обычно используется в современных переводах Евклида как общее название проблем и теорем (в разделе 1.4), у Евклида отсутствует. Евклид просто нумерует их, не называя никаким общим именем. Чуть дальше мы объясним, почему это замечание важно, а пока проанализируем по схеме Прокла предложение 5 первой книги «Начал» — известную теорему о равенстве углов в равнобедренном треугольнике, обозначив ее как теорему 1.5 (*рис. 1*). Текст Евклида цитируется в переводе Мордухая-Болтовского [41] с немногочисленными, но важными в данном контексте исправлениями. Приведенные в круглых скобках внутренние ссылки добавлены переводчиком. Слова в угловых скобках отсутствуют в оригинальном тексте и добавлены переводчиком в целях лучшего соответствия перевода нормам русского языка. В угловые скобки также заключены термины Прокла, относящиеся к описанной им схеме геометрических предложений. Здесь и далее эти термины выделены курсивом в тех случаях, когда они используются в указанном Проклом специальном значении. Другие цитаты из «Начал» Евклида, которые мы приводим ниже в этой главе, заимствованы из того же источника [41].

<***Предложение***>
У равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой, и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой.

<***Экспозиция***>
Пусть ABC будет равнобедренный треугольник, имеющий сторону, равную стороне, и пусть по прямым будут продолжены прямые BD, CE.

<***Спецификация***>
Я утверждаю, что угол ABC равен углу ACB, а угол CBD — углу BCE.

<***Построение***>
Действительно, на BD возьмем произвольную точку F, от большей AE отнимем AG, равную меньшей AF (предложение 1.3), и соединим прямыми FC, GB.

<***Доказательство***>
Поскольку теперь AF равна AG, а AB равна AC, то вот две <прямые> FA, AC равны двум AG, AB каждая каждой; и они содержат общий угол FAG; значит, основание FC равно основанию GB и треугольник AFC будет равен треугольнику AGB и оставльные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому, а именно, угол ACF углу ABG, а угол AFC углу AGB (предложение 1.4). И поскольку вся AF равна всей AG и у них AB равна AC, то, значит, и остаток BF равен остатку CG (аксиома 3). Но доказано, что и FC равна GB; вот две прямые BF, FC равны двум прямым CG и GB каждая каждой; и угол BFC равен углу CGB, и основание у них общее BC. Значит, и треугольник BFC равен треугольнику CGB и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, равны каждый каждому (предложение 1.4); значит, угол BFC равен углу GCB, а угол BCF — углу CBG. Поскольку теперь доказано, что весь угол ABG равен всему углу ACF и у них CBG равен BCF, то, следовательно, и остаток ABC равен остатку ACB (аксиома 3) и они находятся при основании треугольника ABC. Доказано же, что и угол FBC равен GCB и оба они под основанием.

<***Заключение***>
Значит, у равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой. Это и требовалось показать.

Очевидная разница между анализом этой теоремы, который предлагает Прокл, и обычным современным анализом состоит в следующем. Для современного читателя доказательство этой теоремы начинается с прокловой *экспозиции* и включает в себя также *спецификацию*, *построение* и, наконец, проклово *доказательство* в качестве составных частей. Прокл же называет доказательством лишь одну из только что упомянутых четырех частей. Завершается теорема словами «что и требовалось показать», а не словами «что и требовалось доказать», как неточно переводит Мордухай-Болтовской. Так же неточен и общепринятый латинский перевод выражения — quod erat demonstrandum. Во всех этих случаях смешиваются греческие глаголы ἀποδείκνυμι (доказать, по-латински demonstrare) и δείκνυμι (показать, по-латински monstrare). Разницу между логическими значениями этих двух глаголов можно уверенно реконструировать по «Аналитикам» Аристотеля: этот автор употребляет глагол ἀποδείκνυμι и производный от него термин ἀπόδειξις при описании формальной силлогистики, используя при этом глагол δείκνυμι в более широком и содержательном смысле при обсуждении эпистемологических вопросов (в основном во «Второй Аналитике»). Можно предположить, что Аристотель использует глаголы ἀποδείκνυμι и δείκνυμι так же, как Евклид и Прокл. Одного этого свидетельства, на наш взгляд, достаточно чтобы не пренебрегать разницей между значениями этих греческих глаголов. Поэтому в такого рода контекстах *доказательство* в узком смысле слова нужно отличать от более широкого понятия «показательства».

Логический статус *экспозиции*, *спецификации* и *построений* в геометрической теории Евклида обсуждался историками и философами математики неоднократно. Ниже мы представим критический обзор основных точек зрения по этому вопросу. Однако прежде всего нужно заметить, что сама постановка вопроса о логическом статусе этих операций включает в себя (или, по крайней мере, должна включать) более общий вопрос о смысле и содержании понятия об аксиоматической теории и о месте и роли логики в таких теориях. Если предположить, что теория «Начал» Евклида является теорией в современном смысле, то есть системой высказываний, связанных отношением логического следствия, то *экспозиция*, *спецификация* и *построение* станут частями доказательства автоматически. Поэтому в последующем анализе мы не будем пользоваться предпосылкой о том, что теория Евклида является аксиоматической в обычном смысле, но будем пытаться реконструировать доказательства Евклида в их оригинальном виде, а уже потом решать вопрос о том, можно ли считать эти доказательства корректными с логической точки зрения.

1.1.2. Являются ли евклидовы доказательства логическими?

Вернемся к теореме 1.5. *Доказательство* этой теоремы использует следующие предпосылки.

Аксиома (общее понятие) 2 (A2):
Если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

Аксиома 3 (A3):
Если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

Теорема 1.4 (равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними):
Если два треугольника имеют по две стороны, равные каждая каждой, и по

равному углу, содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию, и один треугольник будет равен другому, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому.

Мы ограничимся здесь анализом того, как в *доказательстве* теоремы 1.5 используется аксиома 3, воспользовавшись при этом современными обозначениями. Поскольку равенство в евклидовом смысле отличается от тождества, эти два отношения будут здесь обозначаться по-разному: равенство по Евклиду мы будем обозначать обычным знаком $=$, а тождество — знаком $\equiv$. Знаки $+$ и $-$ будем использовать в очевидном смысле[2].

По *построению* мы имеем:
$Con1 : BF \equiv AF - AB$;
$Con2 : CG \equiv AG - AC$,
что эквивалентно утверждению о том, что точка B лежит между точками A, F, а точка C лежит между точками A, G. По условию теоремы мы также имеем:
$Hyp : AB = AC$.
Кроме того, снова по *построению*
$Con3 : AF = AG$.
Таким образом, мы получили условие аксиомы 3: равное отнимается от равного. По этой аксиоме заключаем, что $BF = CG$.

Аксиома 3 приложима к предметам (математическим сущностям), если только для них определены отношение равенства и операция разности. У Евклида под эти условия подходят не только числа и отрезки, но и разнообразные геометрические фигуры, включая кривые, углы и области. Оставшиеся четыре аксиомы Евклида (не путать с постулатами!) обладают тем же свойством. Это отличает аксиомы Евклида от посылок вроде $Con3$ и Hyp, так что возникает вопрос, правомерно ли считать аксиомы (общие понятия) в теории Евклида логическими посылками в обычном смысле. Мы сталкиваемся здесь с выбором между следующими двумя возможными логическими интерпретациями аксиомы 3.

Во-первых, эту аксиому можно реконструировать в виде импликации:

$$((a \equiv b - c)\&(d \equiv e - f)\&(b = d)\&(c = f)) \to (a = b)$$

[2] *Разность* $A - B$ фигур A, B — это фигура, полученная в результате «отрезания» B от A; аналогичным образом *сумма* $A + B$ — это результат прикладывания (конкатенации) A и B. Эти операции не определены у Евклида с точностью до конгруэнтности, поскольку отрезать B от A и приложить B к A можно, вообще говоря, многими разными способами. Таким образом, равенство в евклидовом смысле слабее конгруэнтности: по аксиоме 4 конгруэнтные объекты равны, но обратное общее утверждение неверно. В случае плоских фигур равенство в евклидовом смысле эквивалентно равенству (в современном смысле) площадей этих фигур.