

# ПРЕДСЛОВИЕ

Эта книга рассчитана на читателя, желающего за весьма короткое время сформировать правильное понимание линейной алгебры.

Наибольшую пользу от «Линейной алгебры» могут получить:

- студенты университетов, желающие освоить линейную алгебру или уже находящиеся в процессе ее изучения и нуждающиеся в пояснениях;
- учащиеся, которые «проходили» линейную алгебру ранее, но так и не поняли, о чем она;
- учащиеся старших классов и колледжей, готовящихся к поступлению в технические вузы;
- и все те, кто ценит чувство юмора и питает интерес к математике!

Книга состоит из следующих разделов:

- глава 1 «Что такое линейная алгебра?»;
- глава 2 «Основы»;
- глава 3 и 4 «Матрицы»;
- глава 5 и 6 «Векторы»;
- глава 7 «Линейные преобразования»;
- глава 8 «Собственные числа и собственные векторы».

Большинство глав включают в себя раздел-мангу и раздел с текстом.

Если читать только мангу и пропускать текст, то получишь краткий обзор каждой темы, но я рекомендую прочитать все составные части, а затем для максимального результата рассмотреть каждую тему подробнее. Эта книга представляет собой дополнение к другой, более сложной и углубленной литературе, но не ее замену.

Я хотел бы выразить благодарность моему издателю и всему издательству Омша за предоставленную возможность опубликовать эту книгу, а также иллюстратору Ирохе Иноуэ. Также хочу выразить признательность `re_akino`, написавшему сценарий, и всему персоналу Trend Pro, работавшему над превращением моей рукописи в эту мангу. Также я получил много полезных советов от Кадзуюки Хираока и Сидзуки Хори. Спасибо всем.

*Ноябрь 2008 года  
Син Такахаси*

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	v
<b>Пролог. ЗАНЯТИЯ НАЧИНАЮТСЯ!</b> .....	1
<b>Глава 1. ЧТО ТАКОЕ ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА?</b> .....	9
1.1. Краткий обзор курса линейной алгебры .....	14
1.2. Темы, которые важны для науки, и темы, которые попадают на экзаменах .....	21
1.3. Линейная алгебра с точки зрения математиков .....	22
1.3.1. Линейное пространство, как его видят математики .....	22
1.3.2. Линейная алгебра и аксиомы .....	24
<b>Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ</b> .....	25
2.1. Классификация систем чисел.....	29
2.2. Импликация и равенство.....	31
2.2.1. Положения.....	31
2.2.2. Импликация.....	32
2.2.3. Эквивалентность .....	33
2.3. Теория множеств.....	34
2.3.1. Множества .....	34
2.3.2. Символы множеств.....	36
2.3.3. Подмножества.....	37
2.4. Функции.....	39
2.4.1. Обозначение функций .....	39
2.4.2. Образы .....	44
2.4.3. Домен и кодомен .....	48
2.4.4. Сюръекция и биекция.....	50
2.4.5. Обратные функции .....	52
2.4.6. Линейные преобразования.....	54
2.5. Греческий алфавит .....	59
2.6. Научные выражения .....	61
2.7. Сочетания и перестановки.....	62
2.8. Не все "команды к выполнению" являются функциями .....	68

<b>Глава 3. ПОЗНАКОМИМСЯ С МАТРИЦАМИ</b> .....	69
3.1. Что такое матрица? .....	72
3.2. Вычисление матриц .....	76
3.2.1. Сложение .....	76
3.2.2. Вычитание .....	77
3.2.3. Скалярное умножение .....	78
3.2.4. Умножение матриц.....	79
3.3. Специальные матрицы .....	83
3.3.1. Нулевые матрицы.....	83
3.3.2. Транспонированные матрицы .....	84
3.3.3. Симметричные матрицы .....	85
3.3.4. Верхние треугольные и нижние треугольные матрицы.....	85
3.3.5. Диагональные матрицы .....	86
3.3.6. Тождественные матрицы.....	88
<b>Глава 4. И СНОВА МАТРИЦЫ</b> .....	91
4.1. Обратные матрицы .....	92
Обратные матрицы .....	92
4.2. Вычисление обратных матриц .....	94
4.3. Определители .....	101
4.4. Вычисление определителей.....	102
4.5. Вычисление обратных матриц с помощью алгебраических дополнений .....	114
4.5.1. $M_{ij}$ .....	114
4.5.2. $C_{ij}$ .....	115
4.5.3. Вычисление обратных матриц.....	116
4.6. Применение определителей.....	117
4.7. Решение линейных систем уравнений с помощью правила Крамера.....	117
<b>Глава 5. ПОЗНАКОМИМСЯ С ВЕКТОРАМИ</b> .....	119
5.1. Что такое векторы? .....	122
5.2. Вычисление векторов .....	131
5.3. Геометрические интерпретации.....	133
<b>Глава 6. ЕЩЕ О ВЕКТОРАХ</b> .....	137
6.1. Линейная независимость .....	138
6.2. Базисы .....	146

6.3. Размерность .....	155
6.3.1. Подпространства .....	156
6.3.2. Базис и размерность.....	162
6.4. Координаты .....	167

## **Глава 7. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ..... 169**

7.1. Что такое линейное преобразование? .....	172
7.2. Почему мы изучаем линейные преобразования .....	179
7.3. Специальные преобразования .....	184
7.3.1. Масштабирование .....	185
7.3.2. Вращение.....	186
7.3.3. Перенос .....	188
7.3.4. 3D-проекция.....	191
7.4. Некоторые предварительные подсказки .....	194
7.5. Ядро, образ и теорема размерности для линейных преобразований .....	195
7.6. Ранг.....	199
7.6.1. Ранг.....	200
7.6.2. Вычисление ранга матрицы.....	204
7.7. Отношения между линейными преобразованиями и матрицами .....	212

## **Глава 8. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ..... 213**

8.1. Что такое собственные числа и собственные векторы.....	219
8.2. Вычисление собственных чисел и собственных векторов .....	224
8.3. Вычисление степени $p$ матрицы $n \times n$ .....	227
8.4. Повторяемость и приведение к диагональному виду.....	232
8.4.1. Матрица простой структуры с собственным числом, имеющая повторяемость $2$ .....	233
8.4.2. Недиагонализированная матрица с собственным числом, имеющая повторяемость $2$ .....	235

## **Эпилог..... 238**

## **Приложение. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ..... 251**

## **ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ..... 261**

ПРОЛОГ

ЗАНЯТИЯ НАЧИНАЮТСЯ!







Университет  
Ханамичи



КИ-ЦУ-ЦУ!

А-ЦЕ-Е!



НИЧЕГО НЕ БОЙСЯ...

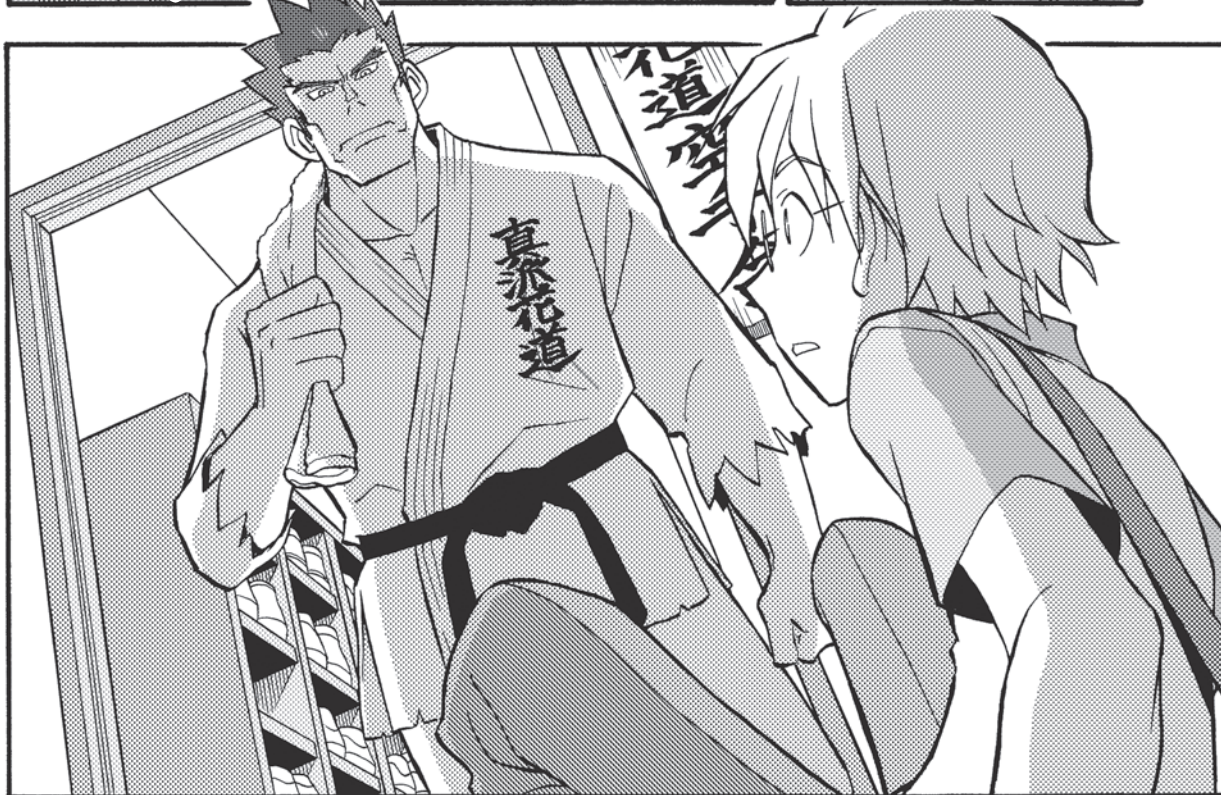
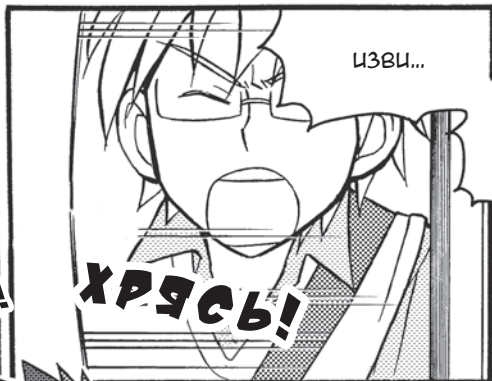


ЛАДНО!

真流花道空手会\*

СЕЙЧАС ИЛИ НИКОГДА!







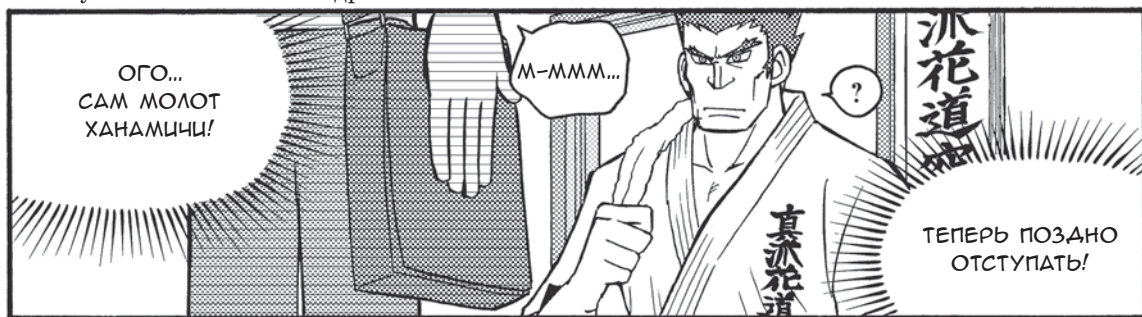
Я...  
Я НОВЕНЬКИЙ...  
МЕНЯ ЗОВУТ  
РЕЙХИ ЮУРИНО.

ВЫ СЛУЧАЙНО  
НЕ КАПИТАН КЛУБА  
ТЭТСУО\* ИЧИНОСЭ?



ОН САМЫЙ.

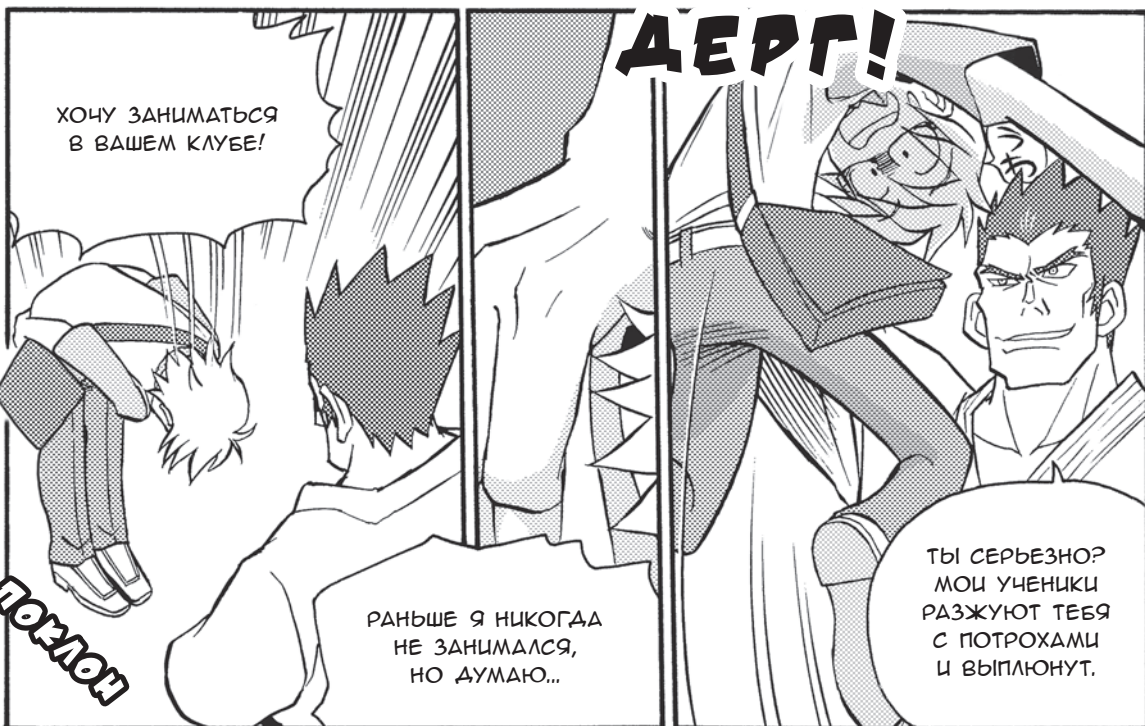
\* Тэтсуо означает «человек дракона».



ОГО...  
САМ МОЛОТ  
ХАНАМИЧИ!

М-МММ...

ТЕПЕРЬ ПОЗНО  
ОТСТУПАТЬ!




ХОЧУ ЗАНИМАТЬСЯ  
В ВАШЕМ КЛУБЕ!

РАНЬШЕ Я НИКОГДА  
НЕ ЗАНИМАЛСЯ,  
НО ДУМАЮ...

ТЫ СЕРЬЕЗНО?  
МОИ УЧЕНИКИ  
РАЗЖУЮТ ТЕБЯ  
С ПОТРОХАМИ  
И ВЫПЛЮНУТ.







НЕ ТОТ ЛИ ТЫ ПАРЕНЬ  
С ОБЛОЖКИ УЧЕБНИКА  
ПО МАТЕМАТИКЕ  
МОЕЙ СЕСТРЫ?



О, ВЫ ВИДЕЛИ  
МОЙ УЧЕБНИК?



ЗНАЧИТ, ЭТО ТЫ!



А-АА.

МОЖЕТ,  
Я ФИЗИЧЕСКИ  
И НЕ ТАК СИЛЕН...



...НО ВСЕГДА  
С ЛЕГКОСТЬЮ  
СПРАВЛЯЛСЯ  
С ЧИСЛАМИ.

ПОНЯТНО...



ВОЗМОЖНО,  
Я И ВОЗЬМУ ТЕБЯ  
В КЛУБ...



ААА





...НО ПРИ ОДНОМ УСЛОВИИ!

БУДЕШЬ УЧИТЬ  
МОЮ СЕСТРЕНКУ  
МАТЕМАТИКЕ.

ОНА-ТО ВОТ  
НИКОГДА  
НЕ БЫЛА  
СЛЫШНА  
В ЧИСЛАХ...



*И только вчера  
жаловалась, что у нее  
проблемы на занятиях  
по линейной алгебре...*

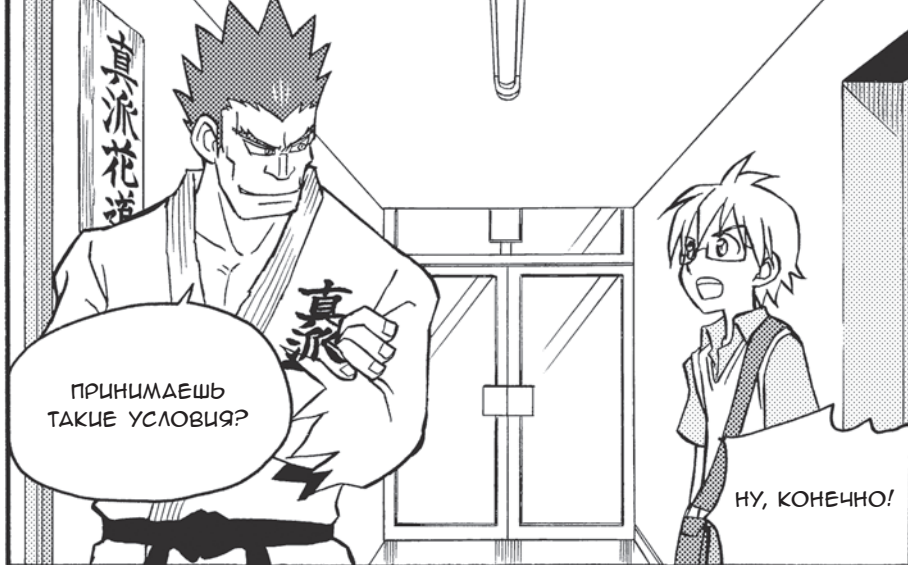


эээ.



ЗНАЧИТ,  
ЕСЛИ Я ПОМОГУ  
ВАШЕЙ СЕСТРЕ,  
ВЫ ВОЗЬМЕТЕ  
МЕНЯ В КЛУБ?





ПРИНИМАЕШЬ  
ТАКИЕ УСЛОВИЯ?

НУ, КОНЕЧНО!

НО ДОЛЖЕН  
ТЕБЯ  
ПРЕДУПРЕДИТЬ...



ПОПРОБУЕШЬ  
К НЕЙ ПОДКАТИТЬ...

ХОТЬ РАЗ...

И НЕ  
ПОДУМАЮ!

**ХРУСТЬ!**

**ЩЕЛК!**



В ТАКОМ  
СЛУЧАЕ...  
ЦАИ ЗА МНОЙ.



С ТОВОЙ ТУТ  
ЦЕРЕМОНИТЬСЯ  
НЕ БУДУТ.

ЯСНОЕ  
ДЕЛО!

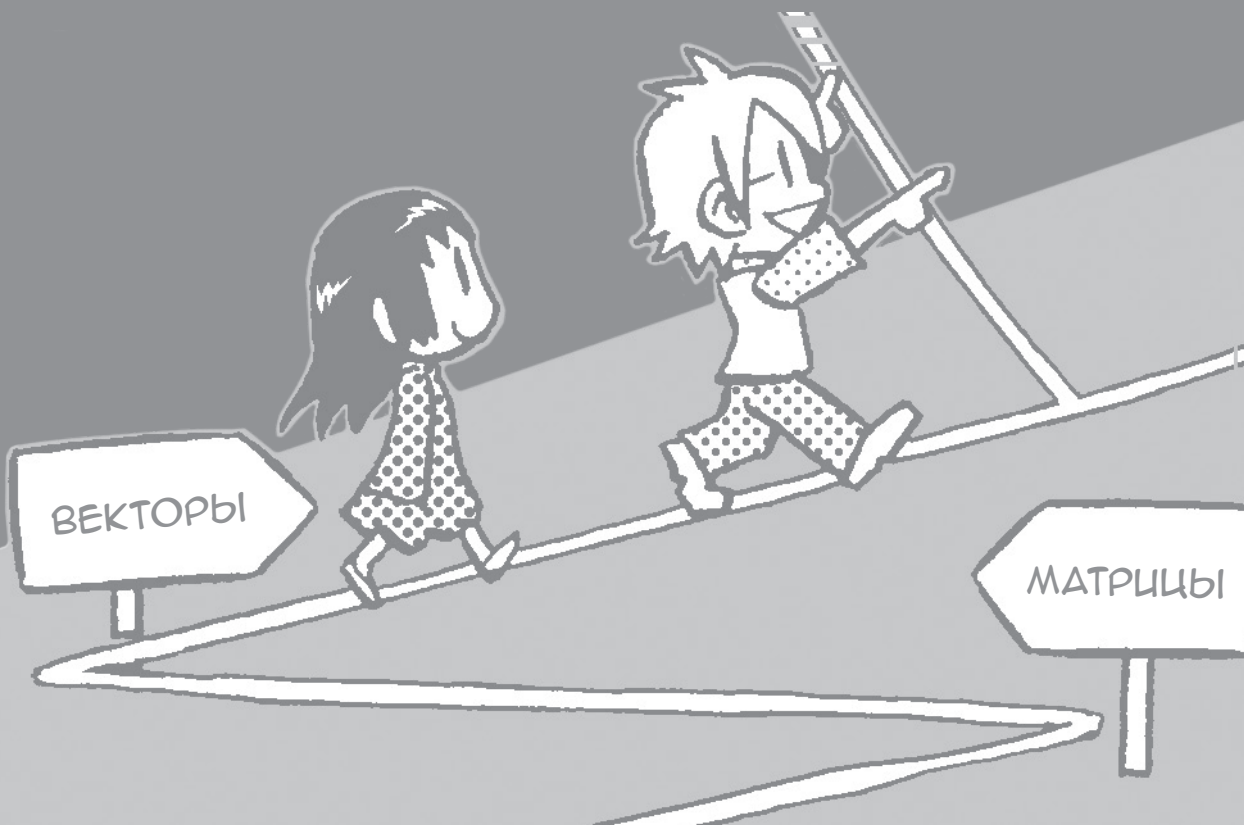


ПРЯМО СЕЙЧАС  
И НАЧНЕМ!

МЕНЯ ПРИНЯЛ!

## ГЛАВА 1

# ЧТО ТАКОЕ ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА?



НУ, ЧТО!  
НА СЕГОДНЯ ВСЁ!

ОССУ!\*

ПЫХ!  
ПЫХ!

\* Оссу – междометие, которое часто используется в японских единоборствах, чтобы повысить концентрацию и силу удара.

ПОКЛОН!

ОССУ!  
СПАСИБО!

ЮУРИНООО!

живой?

О-ОССУ...

ХВАТЬ!

真  
МОЖЕШЬ НАЧИНАТЬ  
ЗАНЯТИЯ С МОЕЙ СЕСТРОЙ,  
НО СНАЧАЛА УБЕРИ ЗАЛ  
И РАЗЛОЖИ ВСЕ КАК НАДО,  
ПОНЯЛ?

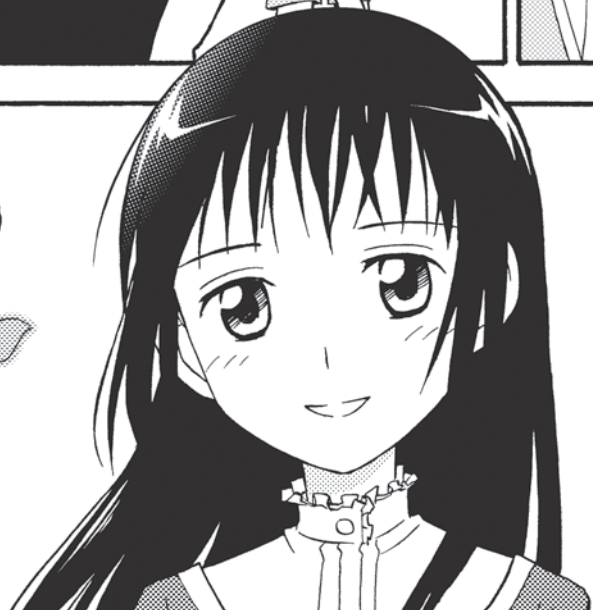
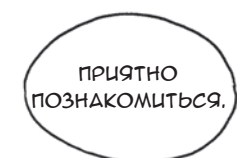
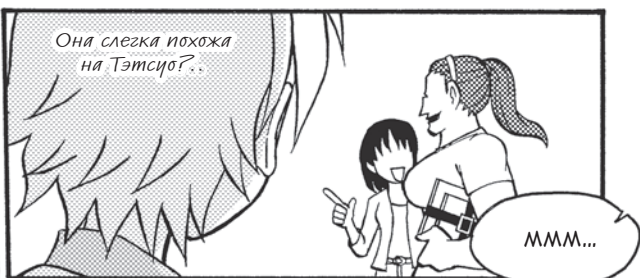
Она тоже новичок  
и нас, но так как  
вас тут что-то  
много в этом году,  
сомневаюсь,  
что вы знакомы

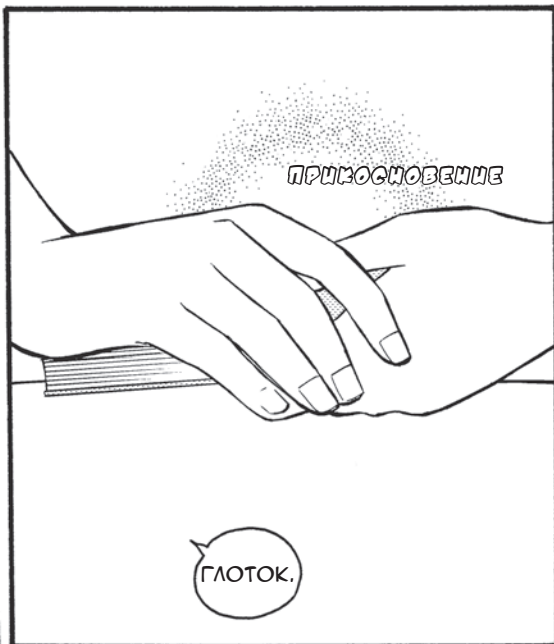
ДРОЖЬ

ТРЯСКА

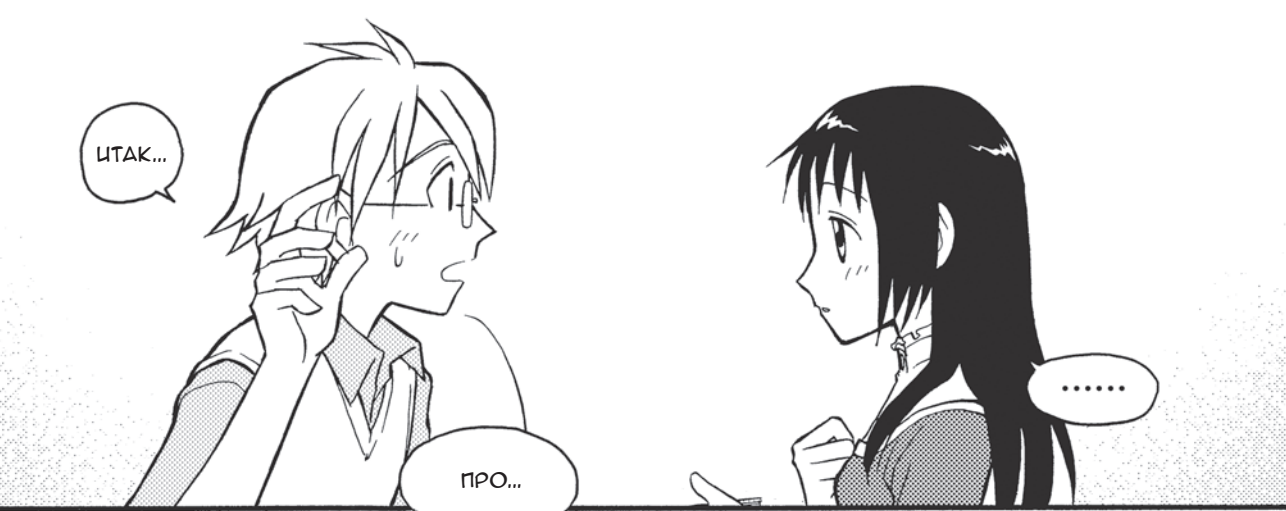
Я ей сказал,  
чтобы ждала тебя в...







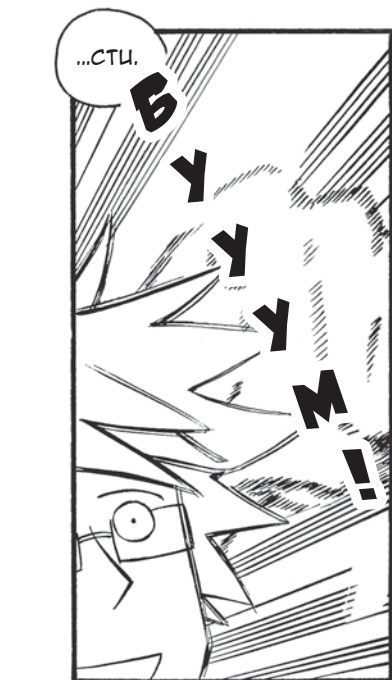




ИТАК...

ПРО...

.....



...СТИ.

**Б  
У  
У  
У  
М!**



ИЗВИНИ, МИСА,  
НО Я, НАВЕРНОЕ,  
ПОЕДУ ДОМОЙ  
СЕГОДНЯ РАНЬШЕ.

О... БРАТЕЦ!



**ЮРИНООО!**

**ПОМНИШЬ НАШ УГОВОР?**

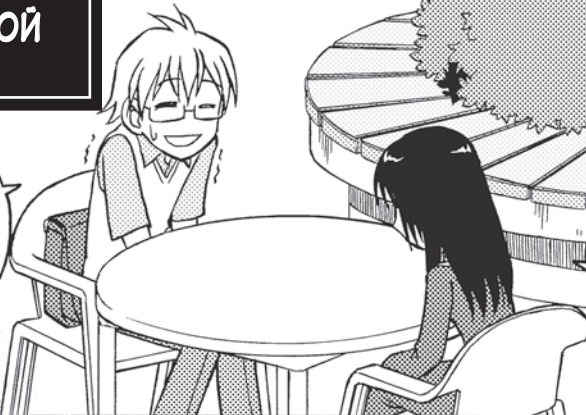


АГА!



# 1.1. КРАТКИЙ ОБЗОР КУРСА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

НУ ЧТО,  
КОГДА ТЫ  
ХОЧЕШЬ НАЧАТЬ?



МОЖЕТ,  
ПРЯМО  
СЕЙЧАС?

ТАК...

ТВОЙ БРАТ СКАЗАЛ,  
ЧТО У ТЕБЯ ПРОБЛЕМЫ  
С ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРОЙ?

ДА.

МНЕ НЕПОНЯТЕН  
СМЫСЛ ВСЕГО  
ЭТОГО...

И ВООБЩЕ,  
ВЫЧИСЛЕНИЯ МНЕ  
НЕ ДАЮТСЯ.

ЭТО ПРАВАА...  
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА -  
НЕСКОЛЬКО  
АБСТРАКТНАЯ  
ДИСЦИПЛИНА,  
И ЕСТЬ НЕКОТОРЫЕ  
ВЕЩИ, КОТОРЫЕ  
ТРУДНО ПОНЯТЬ...

ЛИНЕЙНАЯ  
НЕЗАВИСИМОСТЬ

ПОДПРОСТРАНСТВО

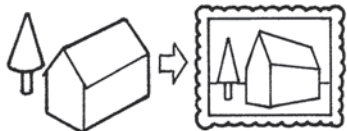
БАЗИС

НО!

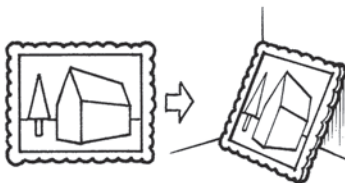




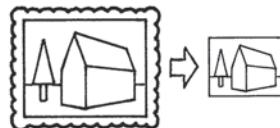
От трех  
к двум измерениям



От двух  
к трем измерениям



От двух к тем же  
двум измерениям



В ШИРОКОМ ПОНИМАНИИ  
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА - ЭТО О ТОМ,  
КАК ЧТО-ТО, ЗАДАННОЕ В ПРОСТРАНСТВЕ  
 $m$ -ГО ИЗМЕРЕНИЯ, ПЕРЕВЕСТИ  
В ПРОСТРАНСТВО  $n$ -ГО ИЗМЕРЕНИЯ,  
СОХРАНИВ ЕГО ФОРМУ.

ОХ!

МЫ БУДЕМ  
УЧИТЬСЯ  
РАБОТАТЬ  
С МАТРИЦАМИ...

Матрицы

Векторы

...И ВЕКТОРАМИ.

С ТЕМ, ЧТОБЫ ОСВОИТЬ  
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ,  
ТАКИЕ КАК:

- ЛИНЕЙНЫЕ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ;
- СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА  
И СОБСТВЕННЫЕ  
ВЕКТОРЫ.

Линейные  
преобразования

Собственные числа и  
собственные векторы

Векторы

Матрицы

ПОНЯТНО...

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)