ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

> В области колебаний особенно отчетливо выступает взаимодействие между физикой и математикой, влияние потребностей физики на развитие математических методов и обратное влияние математики на наши физические знания. Несомненно, что в развитии таких математических проблем, как дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, в частности краевые задачи, разложение произвольных функций по ортогональным функциям и т. п., физические запросы сыграли не последнюю роль. Но и обратно, также несомненно, что только благодаря развитию этих математических дисциплин сделалось возможным углубленное понимание основных физических колебательных явлений.
>
> *Александр Александрович Андронов*[1]

В науке нет области, в которой колебания не играли бы той или иной роли, не говоря уже о том, что ряд областей физики и техники всецело базируется на колебательных явлениях. Установившиеся вынужденные колебания различных строительных и машиностроительных конструкций могут приводить к интенсивным резонансным вибрациям, следствием которых являются повышенные шумы, ускоренное накопление усталостных повреждений, превышение уровней статической прочности и другие негативные проявления.

Многие задачи колебаний балок и пластин решаются в рядах, и в этих случаях для численных расчетов частот, форм колебаний, напряжений и деформаций геометрических объектов с успехом могут использоваться возможности программного продукта MathCAD, который может работать как с действительными, так и с комплексными переменными, а также программный продукт MSC Nastran, нашедший применение при численном исследовании колебаний практически любых изделий методом конечных элементов (МКЭ).

В МКЭ уравнения равновесия статических задач имеют вид

$$[K]\vec{U} = \vec{R} \,, \tag{a}$$

---

[1] **Александр Александрович Андронов** (1901–1952, Горький) — советский физик, механик и математик. Специалист в области электротехники, радиофизики и прикладной механики, создатель нового направления в теории колебаний и динамике систем, талантливый деятель высшей школы. Академик Академии наук СССР с 30 ноября 1946 г. по отделению технических наук. Профессор, заведовавший кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (ныне ННГУ).

а уравнения равновесия динамических задач

$$\left[\mathrm{M}\right]\ddot{\vec{\mathrm{U}}}+\left[\mathrm{C}\right]\dot{\vec{\mathrm{U}}}+\left[\mathrm{K}\right]\vec{\mathrm{U}}=\vec{\mathrm{R}} \tag{б}$$

отличаются от статической системы уравнений наличием двух новых слагаемых, учитывающих силы инерции ($\left[\mathrm{M}\right]\ddot{\vec{\mathrm{U}}}$) и силы демпфирования ($\left[\mathrm{C}\right]\dot{\vec{\mathrm{U}}}$); $\left[\mathrm{M}\right]$ — матрица масс изучаемой конструкции; $\ddot{\vec{\mathrm{U}}}$ — вектор ускорения узловых точек сетки КЭ; $\left[\mathrm{C}\right]$ — матрица демпфирования; $\dot{\vec{\mathrm{U}}}$ — вектор скоростей узловых точек; $\left[\mathrm{K}\right]$ — матрица жесткости упругой системы, $\vec{\mathrm{U}}$ — вектор глобальных смещений системы, а $\vec{\mathrm{R}}$ — вектор сил, действующих в направлении этих смещений.

При динамическом анализе рассматривается статическое равновесие в момент времени t, включающее в себя эффекты зависящих от ускорения сил инерции и от скорости демпфирующих сил.

Решение уравнения (б) осуществляется методами прямого интегрирования либо методами суперпозиции.

В методе прямого интегрирования отрезок времени $[0, T]$ разбивается на n дискретных интервалов времени величиной Δt, в пределах которых равновесие (статическое), включающее эффекты инерции и демпфирующих сил, определяется, по существу, в дискретных временных точках внутри интервала решения. Внутри каждого интервала Δt допускается вариация смещений, скоростей и ускорений, а также что векторы смещения, скорости и ускорения в момент времени $t = 0$ известны. Результатом решения являются векторы смещения, скорости, ускорения в момент времени $t = \Delta t$. Вычисления, выполняемые для построения решения в момент $t + \Delta t$, типичны для расчетов решения в момент, который на Δt позднее рассмотренного до сих пор, и, таким образом, определяют общий алгоритм расчета решений во всех дискретных точках на оси времени.

Для аппроксимации ускорений и скоростей в пределах временного интервала Δt используются конечно-разностные выражения (метод сеток).

Число операций, требуемое при решении системы дифференциальных уравнений (б) с помощью прямого интегрирования, прямо пропорционально числу шагов по времени. Поэтому использование прямого интегрирования эффективно, только если требуется определить реакцию на сравнительно коротком временном интервале.

Если же интегрирование должно выполняться на многих шагах по времени, то могут оказаться более эффективными методы суперпозиции, базирующиеся на уравнениях равновесия, которые соответствуют модальным обобщенным смещениям. Однако при этом могут возникать заметные ошибки, связанные с неполнотой используемого в разложении набора форм собственных колебаний.

Динамический анализ конструкций обычно разделяют на несколько частных видов анализа, в которых принимаются допущения, позволяющие получать результаты в определенной форме:

- *анализ собственных форм колебаний* без демпфирования;
- *линейный динамический анализ переходных процессов* (исследуется сравнительно короткий промежуток времени, когда движение не является установившимся);
- *линейный гармонический анализ* (анализ установившегося отклика на внешнюю нагрузку, в зависимости от частоты приложенного гармонического воздействия);
- *анализ спектра отклика на ударную нагрузку* (исследуется спектр неустановившегося отклика по перемещениям в заданных точках конструкции);
- *нелинейный динамический анализ переходных процессов* (при нелинейном поведении конструкции численный анализ собственных форм, гармонический и спектральный анализ теряют смысл, поскольку суперпозиция становится невозможной).

Динамический анализ существенно труднее и сложнее статического анализа. Физические процессы, охватываемые им, значительно сложнее и разнообразнее линейных процессов, являющихся лишь весьма узким частным случаем.

Для успешного освоения материала пособия потребуется начальное знание основ сопротивления материалов [16, 22, 29, 51], векторной и матричной алгебры [8–10, 21, 35, 36, 43, 48, 55], теории рядов (рядов Фурье) [13, 40, 41, 44, 46, 49], элементарных знаний теории функций комплексного переменного и методов решения дифференциальных уравнений в частных производных [2, 5, 6], теории колебаний [1, 4, 7, 11, 12, 14, 15, 24–28, 30, 32–34, 38, 39, 42, 43, 46–47, 50, 52–54].

Пособие знакомит читателя с технологиями компьютерного проектирования и расчета струн, стержней, балок и пластин:

- в программном продукте MathCAD вычисляются силовые и деформационные характеристики конструкции на основе известных теоретических решений, т. е. MathCAD работает как мощный калькулятор [16–18];
- в системе инженерного анализа и оптимизации MSC Nastran с пре- и постпроцессором MSC Patran выполняется конечно-элементное (КЭ) моделирование и расчет изделий произвольной сложности, загруженных всеми известными типами нагрузок [3, 19–25, 27, 34, 40, 41].

Для отработки практических навыков работы с программными продуктами в пособии подробно рассматриваются решения эталонных задач для следующих конструкционных элементов:

- стержней (трехстержневая ферма);
- консольных балок;
- шарнирно-опертых балок;
- прямоугольных пластин при произвольных граничных условиях, загруженных постоянной или импульсной нагрузкой.

Приводится решение двух оптимизационных задач:

- минимизация веса трехстержневой фермы при ограничениях на частоту колебаний стержней фермы;
- оптимизация толщины и собственных частот свободных колебаний пластины с отверстием, находящейся в плоском напряженном состоянии.

Представленный в книге материал может использоваться при подготовке инженеров (специалистов) машиностроительных специальностей, начиная с первого курса, с постепенным усложнением решаемых задач. Цель настоящего пособия — в доступной форме для студентов технических вузов изложить приемы моделирования свободных и вынужденных колебаний простейших инженерных конструкций в программных комплексах MSC Nastran-Patran и MathCAD.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов технических вузов и научных работников, специализирующихся в области проектирования и строительства машиностроительных изделий.

Глава 1
КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

1.1. Комплексные числа

Комплексные числа ($z = x + i \cdot y$, где $i = \sqrt{-1}$ — *мнимая единица)* начали появляться в работах отдельных математиков, связанных с решением кубических уравнений, начиная с XVI в.

Сципион дель Ферро[2] после многолетних усилий сумел найти формулу решения кубического уравнения вида $x^3 + ax = b$, где $a, b > 0$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} .$$

Дель Ферро нигде не опубликовал свой метод решения, но сообщил его своему ученику Антонио Марио Фиоре; последний с успехом применял новый алгоритм на популярных тогда математических турнирах, на одном из которых в 1535 г., уже после смерти дель Ферро, Фиоре встретился с талантливым математиком-самоучкой Никколо из Брешии, по прозвищу **Тарталья** (заика). В 1539 г. Тарталья передал описание этого метода Дж. Кардано[3], который поклялся не публиковать его без разрешения Тартальи. Несмотря на обещание, в 1545 г. Кардано опубликовал этот алгоритм в работе «*Великое искусство*», и по этой причине метод вошёл в историю математики как формула Кардано.

---

[2] **Сципион дель Ферро** (1465–1526) — итальянский математик, открывший общий метод решения неполного кубического уравнения. Дель Ферро окончил Болонский университет, после чего (с 1496 г. и до конца жизни) работал там профессором математики.
Открытие дель Ферро произвело грандиозное впечатление на весь научный мир. Впервые учёный новой Европы решил задачу, которая много веков не поддавалась лучшим математикам Древней Греции и стран ислама. Это стало показателем зрелости европейской математики и воодушевило учёных на новые открытия, которые не замедлили последовать.

[3] **Джероламо Кардано** (1501–1576) — итальянский математик, инженер, философ, врач, астролог. Опубликовал фундаментальные труды по алгебре, теории вероятностей и механике, оказавшие огромное влияние на развитие науки. Кардано обнаружил, что кубическое уравнение может иметь три вещественных корня, причём сумма этих корней всегда равна коэффициенту при x^2 с противоположным знаком (одна из формул Виета).

Первый, кто оценил пользу комплексных чисел, в частности для решения уравнений третьей степени по формулам Кардано, был Рафаэль Бомбелли[4]. Например, уравнение $x^3 = 15x + 4$ имеет вещественный корень $x = 4$, однако по формулам Кардано получаем: $x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$. Бомбелли обнаружил, что $\sqrt[3]{2 \pm 11i} = 2 \pm i$, откуда сразу получается нужный вещественный корень. Он подчеркнул, что в подобных (*неприводимых*) случаях комплексные слагаемые в формуле Кардано всегда сопряжены, поэтому при их сложении получается вещественный корень. Данное уравнение имеет ещё два вещественных корня $\left(-2 \pm \sqrt{3}\right)$, однако *отрицательные значения в тот период ещё не рассматривались как допустимые*. Разъяснения Бомбелли положили начало успешному применению в математике комплексных чисел.

Исчерпывающее исследование неприводимого случая требовало умения извлекать корни из комплексных чисел, а этого умения у Бомбелли ещё не было. Полностью проблему решили Виет и де Муавр.

Но широкое признание и распространение комплексные числа получили лишь в XIX в. после того, как на рубеже XVIII–XIX вв. одновременно и независимо друг от друга К. Гауссом (1797–1799), К. Весселем (1798–1799) и Ж.-Арганом (в 1806 г.) была дана геометрическая интерпретация комплексных чисел как точек числовой плоскости, и после того, как при помощи комплексных чисел удалось решить ряд практически важных задач, неразрешимых в области действительных чисел.

До тех пор к комплексным числам, как это имело место при каждом расширении понятия числа, относились с большим недоверием и не понимали их сути даже многие крупные математики. Например, Лейбниц (1646–1716) — один из основоположников анализа бесконечно малых — писал: «Комплексное число — это тонкое и поразительное средство божественного духа, почти амфибия между бытием и небытием».

Иерархия основных числовых множеств чисел представлена на рисунке 1.0[5].

<u>Натуральные числа</u> ($\mathbb{N}$) — числа, получаемые при естественном счёте: $\mathbb{N} = \left\{1, 2, 3, \ldots\right\}$. *Для натуральных чисел всегда выполнимы только сложение и умножение* (т. е. в результате этих действий снова получаются натуральные числа). Вычитание уже может дать числа отрицательные, а деление — дробные.

[4] **Рафаэль Бомбелли** (1526–1572) — итальянский математик, инженер-гидротехник. Известен тем, что ввёл в математику *комплексные числа* как легальный объект и разработал базовые правила действий с ними. Первый в Европе свободно оперировал с отрицательными числами, разработал правила работы с ними, включая *правило знаков* для умножения.

[5] https://ru.wikipedia.org/wiki/число.

Целые числа ($\mathbb{Z}$) — числа, получаемые объединением натуральных чисел со множеством чисел, противоположных натуральным, и нулём $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Рациональные числа ($\mathbb{Q}$) — числа, представимые в виде дроби m/n ($n \neq 0$), где m — целое число, а n — натуральное число. *Для рациональных чисел всегда выполнимы все четыре действия арифметики, но действие извлечения корня не всегда возможно.*

Действительные (вещественные) числа ($\mathbb{R}$) — числа, представляющие собой расширение множества рациональных чисел, замкнутое относительно некоторых (важных для математического анализа) операций предельного перехода. В области действительных чисел возникшая трудность снята лишь частично: *извлечение корня возможно, за исключением извлечения корней четной степени из отрицательных чисел*.

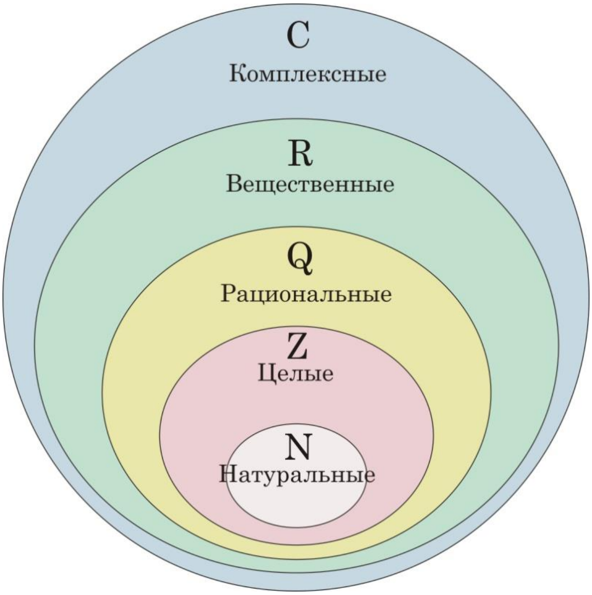

Рис. 1.0

В области **комплексных чисел** ($\mathbb{C}$) *выполнимы все четыре действия арифметики и извлечение корня любой степени из любого комплексного числа*. В результате выполнения этих действий над комплексными числами снова получаем комплексные числа. Для комплексных чисел остаются справедливыми все основные законы арифметики и алгебры, и в качестве значения функции от комплексного аргумента мы получаем снова комплексное число.

Кроме того, целый ряд вопросов, которые в области действительного переменного не могли быть решены и часто рассматривались как парадоксы, получил простое и естественное объяснение в области комплексного переменного.

Например, в области комплексного переменного алгебраическое уравнение n-й степени всегда имеет точно n корней, а в области действительного переменного оно может иметь и меньшее число корней и даже ни одного.

Математические операции над комплексными числами не выводят из области комплексных чисел. Введение комплексных чисел и функций комплексной переменной удобно также при интегрировании элементарных функций, при решении дифференциальных уравнений и т. д., где часто приходится выходить в область комплексных чисел. Комплексная форма записи оказывается удобной и при математической формулировке многих физических положений (например, в электротехнике, электродинамике, теории упругости и т. д.).

Методы теории функций комплексной переменной нашли весьма широкое и эффективное применение при решении большого круга задач гидро- и аэродинамики, теории упругости, электродинамики и других естественных наук.

1.1.1. Определение комплексного числа

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{1.1}$$

где x и y — вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Число x называется *вещественной частью* комплексного числа $x + iy$, а число y — *мнимой* и обозначается: $x = \operatorname{Re} z$ (от *лат.* realizes — действительный), $y = \operatorname{Im} z$ (от *лат.* imaginaries — мнимый, воображаемый). Форма записи комплексного числа $z = x + iy$ называется *алгебраической*.

Арифметическое значение $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1.2}$$

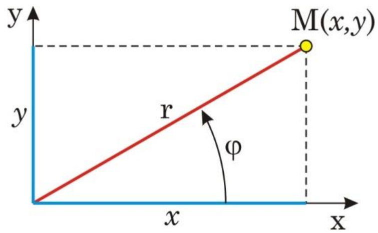

Рис. 1.1

На плоскости в декартовой системе координат пара вещественных чисел (x, y) определяет единственную вполне определенную точку $M(x, y)$. Эту точку M условились считать геометрическим изображением комплексного числа $z = x + iy$, которое геометрически удобно интерпретировать как радиус-вектор на плоскости с координатами x и y, а плоскость называть *комплексной* плоскостью (рис. 1.1).

Вещественные числа, для которых $y = 0$, изобразятся в этой плоскости точками оси Ox; чисто мнимые числа, для которых $x = 0$, $y \neq 0$, изобразятся точками оси Oy. Поэтому ось Ox называется действительной осью, а ось Oy — мнимой осью. Число нуль, для которого $x = y = 0$, является началом координат. Таким образом, и действительные, и чисто мнимые числа являются лишь частными случаями комплексных чисел.

Внимание! *Знак «плюс» в обозначении $x + iy$ — не знак алгебраического действия! Выражение $x + iy$ надо рассматривать как единый символ для обозначения комплексного числа.*

Положение точки $M(x, y)$ на плоскости может быть определено также ее полярными координатами r, φ, т. е. длиной вектора $\vec{r}$ (или, что то же самое, радиус-вектором $\vec{z}$) и величиной угла φ, который этот вектор образует с положительным направлением оси Ox. Числа r и φ называются соответственно *модулем* и *аргументом* комплексного числа z и обозначаются:

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Внимание! *Для числа $z = 0$ понятие аргумента смысла не имеет!*

Из определения модуля и аргумента следует, что если $z = x + iy$, то

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi = |z|\cos\operatorname{Arg} z, \quad y = r\sin\varphi = |z|\sin\operatorname{Arg} z, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tgArg} z = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \quad \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

Величина $\operatorname{Arg} z$ многозначна и определена лишь с точностью до целого кратного числа 2π. В качестве *главного* значения величины $\operatorname{Arg} z$ обычно выбирают значение, определенное неравенствами $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

Главное значение аргумента z обозначают $\arg z$. Если z — действительное положительное число, то $\arg z = 0$; если z — действительное отрицательное число, то $\arg z = \pi$; если z — чисто мнимое число с положительной мнимой частью, то $\arg z = \pi/2$, если z — чисто мнимое с отрицательной мнимой частью, то $\arg z = -\pi/2$.

Следовательно,

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.4}$$

Пользуясь формулами (1.3), можно всякое комплексное число, отличное от нуля, представить в так называемой *тригонометрической форме*:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \qquad (1.5)$$

Например,

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right); \qquad 1 = \left(\cos 0 + i\sin 0\right);$$

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right); \qquad -2 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right);$$

$$-3i = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

С помощью формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ можно перейти от тригонометрической формы (1.5) к *показательной*:

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i\varphi}. \qquad (1.6)$$

Например,

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4};\; 1 = e^{i0};\;\; i = e^{i\pi/2};\;\; -2 = 2e^{i\pi};\;\; -3i = 3e^{-i\pi/2}.$$

1.1.2. Равенство комплексных чисел

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если равны порознь их вещественные и мнимые части, т. е. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Замечание. Если комплексные числа z_1 и z_2 представлены в тригонометрической форме, то равенство $z_1 = z_2$ означает, что равны модули этих чисел, а аргументы отличаются на $2k\pi$, где k — целое число.

Говорят, что комплексное число $z = x + iy$ равно нулю, если одновременно $x = 0$ и $y = 0$.

Понятие «неравенство» для комплексных чисел вводится лишь *в смысле отрицания равенства.*

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru