

# Оглавление

<b>От автора</b> .....	4
<b>Справочные материалы по математике</b> .....	10
<b>Диагностическая работа</b> .....	15
<b>§ 1. Теоретические сведения и подготовительные задания</b> .....	16
<b>§ 2. Практикум по решению задач</b> .....	42
<b>1. Уравнения, неравенства и их системы</b> .....	42
1.1. Преобразование выражений .....	43
1.2. Уравнения .....	49
1.3. Системы уравнений .....	58
1.4. Неравенства и системы неравенств .....	64
<b>2. Текстовые задачи</b> .....	70
2.1. Задачи на среднюю и относительную скорость	71
2.2. Задачи на движение .....	79
2.3. Движение по реке .....	90
2.4. Работа. Проценты и смеси .....	95
<b>3. Задачи с параметром. Построение графиков</b> .	108
3.1. Дробно-рациональные функции .....	110
3.2. Кусочно-заданные функции .....	116
3.3. Задания с модулем .....	124
<b>Образцы выполнения заданий</b> .....	131
<b>Ответы</b> .....	169

## От автора

### Дорогие девятиклассники!

Пособие, которое вы держите в руках, поможет вам повторить изученный в 5–9-х классах материал и научиться выполнять задания повышенного и высокого уровней сложности по алгебре, успешно выполнять контрольные работы и уверенно сдать ОГЭ в конце учебного года.

#### Как работать с книгой?

Прежде всего выполните диагностическую работу. С частью заданий вы справитесь уверенно и без ошибок, но, скорее всего, найдутся и такие, которые вы не выполните. Повторите теоретический материал, вспомните основные правила математики и решите подготовительные задания по каждой теме. Это поможет вам при выполнении заданий первой части ОГЭ.

После решения подготовительных заданий переходите к отработке более трудных заданий из практикума по решению задач.

Каждой задаче второй части экзамена соответствует отдельный раздел в книге. Задачи в каждом разделе сгруппированы в соответствии с основными темами. Чтобы вам было проще работать с пособием, в начале каждого раздела мы приводим образцы выполнения заданий. Обратите внимание на решения, выполненные девятиклассниками, и комментарии экспертов, которые выставили баллы при проверке.

Затем приводятся задачи для самостоятельного решения, они даны парами: нечётные — с решениями и ответами (решения находятся в конце книги, в разделе «Образцы выполнения заданий»), а подобные им чётные — только с ответами.

Если какую-то задачу вы выполнить не сможете, вернитесь к теории и посмотрите образцы пошаговых решений. Постарайтесь найти ошибку самостоятельно, а если не получится, то вновь обратитесь к теории и образцам выполнения этой или парной ей задачи или попросите помощи у учителя, одноклассников, родителей.

Даже если вам удалось решить задачу легко и быстро, советуем проверить ответ и посмотреть решение. Вы сможете проверить,

верно ли решена задача, и, может быть, освоите другой способ решения.

В книге собраны все известные прототипы задач из открытого банка ОГЭ, размещённого на сайте ФИПИ\*. Если к концу подготовки вы сможете выполнять задания сборника без ошибок, значит, весь материал освоен вами на «отлично»!

*Успехов вам!*

### **Уважаемые учителя и методисты!**

Наше пособие представляет собой сборник тренировочных заданий для формирования устойчивых навыков решения задач повышенного и высокого уровней сложности подобных тем, которые содержатся в открытом банке ОГЭ, размещённом на сайте ФИПИ, и предлагаются непосредственно на экзамене. Кроме того, оно содержит необходимый теоретический материал и задачи базового уровня сложности для закрепления знаний. Пособие поможет вам в организации итогового повторения, в выявлении возможных пробелов в подготовке девятиклассников к ОГЭ по математике и проведении необходимого тренинга, в закреплении и обобщении изученного материала.

Пособие составлено в соответствии с примерной образовательной программой по математике и содержанием учебников, допущенных к использованию в образовательном процессе школ РФ.

В книге приведены решения всех нечётных задач практикума, что позволит упростить работу учителя и эффективно провести дифференцированную и индивидуальную подготовку учащихся к экзамену.

Задачи базового уровня сложности с кратким ответом содержатся в части 1 экзаменационной работы.

Задания с развёрнутым ответом содержатся в части 2 КИМ ОГЭ и направлены на проверку освоения материала повышенного

---

\*[www.fipi.ru](http://www.fipi.ru).

и высокого уровня сложности. Их назначение — дифференцировать уровень подготовки школьников, выявить ту часть выпускников, которая составляет потенциальный контингент профильных классов.

Рекомендуем не решать с девятиклассниками подряд все задачи вариантов (это разумно делать только эпизодически или на завершающем этапе подготовки), а организовывать учебный процесс и тематическое повторение так, чтобы учитывать цели и уровень знаний и умений каждого ученика, формировать так называемое общее поле понятий и законов математики наряду с общими учебными действиями.

Нерационально давать неподготовленному ученику задачи повышенного и тем более высокого уровня сложности, нужно дать ему возможность приобрести базовые знания и умения. Но и предлагать сильному школьнику задания базового уровня, если он их усвоил, тоже не следует. Такой школьник должен получить возможность решать более сложные задачи. Для этого и предназначено наше пособие.

В книге рассматриваются решения и критерии оценивания задач по алгебре из второй части экзаменационной работы, а также систематизируются задачи, прототипы которых использовались в КИМ ОГЭ с 2014 г. Они содержатся в открытом банке ОГЭ, размещённом на сайте ФИПИ.

В пособии представлены задачи для самостоятельного решения, даны ответы ко всем заданиям и образцы выполнения нечётных номеров задач 20, 21 и 22, при этом чётные задания в основном составлены по принципу парности к разобранным. Решения приведены в конце книги.

В первой части излагается теоретический материал за курс алгебры 7–9-х классов, необходимый для решения приведённых задач. Даны также диагностическая работа и подготовительные задания базового уровня для организации итогового повторения.

Во второй части пособия задачи по алгебре расположены в порядке возрастания уровня сложности, что позволит учителю при-

менить принцип дифференцированного подхода при организации подготовки к основному государственному экзамену.

<b>Номер задания</b>	20	21	22
<b>Уровень сложности</b>	П	П	В
<b>Ожидаемый процент выполнения</b>	30–50	15–30	3–15

Задание 20 — алгебраическая задача на преобразование, вычисление и/или решение уравнения, неравенства или системы. Она проверяет основные умения решать простую задачу и грамотно записывать решение.

Задание 21 — текстовая задача повышенного уровня сложности на умение составлять математическую модель; она сложнее как логически, так и технически.

Задание 22 — высокого уровня сложности. Это задача с параметром, связанная с построением и исследованием графика функции. Такие задания требуют свободного владения алгебраическим материалом и рассчитаны на выпускников, которые изучали математику дополнительно к стандартному курсу, например по углублённой программе или в рамках кружков или элективных курсов.

Полное решение любой из задач второй части оценивается двумя баллами.

Согласно рекомендациям ФИПИ основные требования к решению заданий с развёрнутым ответом таковы: понятный ход рассуждений выпускника и математически грамотное решение. При этом учителю нужно нацеливать учащихся на лаконичность и не требовать подробных комментариев и записи алгоритмов.

Если в решении допущена одна ошибка или описка не принципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на её наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащийся засчитывается 1 балл.

К вычислительным ошибкам не относятся ошибки в формулах при решении квадратного уравнения, действиях с числами с разными знаками, упрощении выражений со степенями и корнями и т. д.

В критериях оценивания по каждому конкретному заданию второй части экзаменационной работы общие позиции конкретизируются и дополняются с учётом содержания задания. Критерии разработаны применительно к одному из возможных решений.

Решения учащихся могут содержать недочёты, не отражённые в критериях, но позволяющие оценить результат выполнения задания положительно (со снятием одного балла). В подобных случаях решение о том, как квалифицировать такой недочёт, принимает предметная комиссия.

В рекомендациях ФИПИ по использованию и интерпретации результатов выполнения экзаменационных работ для проведения основного государственного экзамена приводятся максимальные баллы за каждое задание и шкала пересчёта первичного балла в отметку по пятибалльной системе.

За 19 заданий части 1 выставляется по 1 баллу, а за задания части 2 — по 2 балла.

Ниже представлена рекомендованная шкала пересчёта первичного балла в отметку по пятибалльной системе — суммарного балла за выполнение заданий в экзаменационную отметку по математике.

<b>Отметка по пятибалльной шкале</b>	«2»	«3»	«4»	«5»
<b>Суммарный балл за работу в целом</b>	0–7	8–14	15–21	22–31

Рекомендуемый минимальный результат выполнения экзаменационной работы, свидетельствующий об освоении Федерального компонента образовательного стандарта в предметной области «Математика», — 8 баллов, набранных в сумме за выполнение всех заданий при условии, что из них не менее 2 баллов — за решение заданий по геометрии. Преодоление этого минимального ре-

зультата даёт выпускнику право на получение итоговой отметки по математике или по алгебре и геометрии в соответствии с учебным планом образовательного учреждения.

Результаты экзамена могут быть использованы при приёме обучающихся в профильные классы средней школы. Ориентиром при отборе в профильные классы могут быть следующие показатели:

— для естественно-научного профиля: 18 баллов, из них не менее 6 по геометрии;

— для экономического профиля: 18 баллов, из них не менее 5 по геометрии;

— для физико-математического профиля: 19 баллов, из них не менее 7 по геометрии.

Разработанная специалистами ФИПИ шкала перевода первичных баллов в отметки по пятибалльной системе для проведения ОГЭ носит **рекомендательный характер**.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты издательства [legionrus@legionrus.com](mailto:legionrus@legionrus.com).

# Справочные материалы по математике\*

## Алгебра

- Формула корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

- Если квадратный трёхчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет два корня  $x_1$  и  $x_2$ , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

если квадратный трёхчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет единственный корень  $x_0$ , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Абсцисса вершины параболы, заданной уравнением  $y = ax^2 + bx + c$ :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Формула  $n$ -го члена арифметической прогрессии ( $a_n$ ), первый член которой равен  $a_1$  и разность равна  $d$ :

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

- Формула суммы первых  $n$  членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

- Формула  $n$ -го члена геометрической прогрессии ( $b_n$ ), первый член которой равен  $b_1$ , а знаменатель равен  $q$ :

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

- Формула суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{(q^n - 1)b_1}{q - 1}.$$

---

\*Выдаются вместе с текстом экзаменационной работы.

- Формулы сокращённого умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

- Свойства арифметического квадратного корня:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ при } a \geq 0, b \geq 0;$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ при } a \geq 0, b > 0.$$

- Свойства степени при  $a > 0, b > 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m};$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$$

$$(a^n)^m = a^{nm};$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

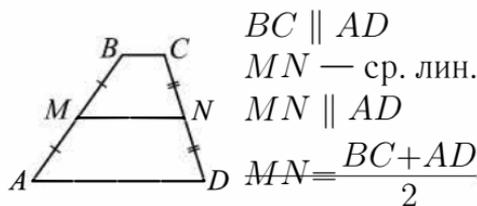
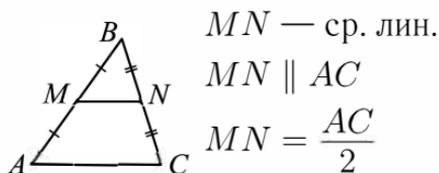
## Таблица квадратов двузначных чисел

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

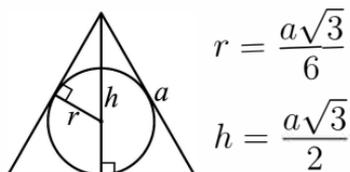
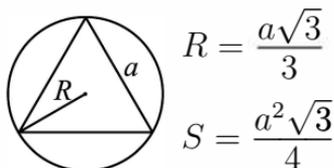
## Геометрия

Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180^\circ(n - 2)$ .

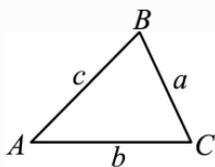
Средняя линия треугольника и трапеции



Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



Для треугольника  $ABC$  со сторонами  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ :

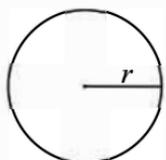


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где  $R$  — радиус описанной окружности.

Для треугольника  $ABC$  со сторонами  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

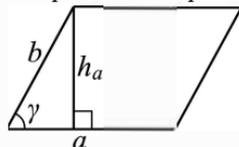


Длина окружности  $C = 2\pi R$

Площадь круга  $S = \pi r^2$

### Площади фигур

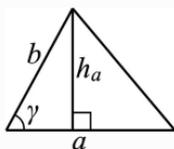
Параллелограмм



$$S = ah_a$$

$$S = ab \sin \gamma$$

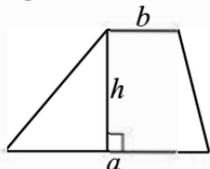
Треугольник



$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

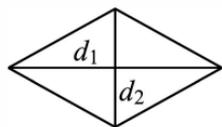
$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

Трапеция



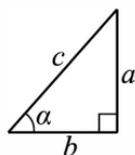
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Ромб

 $d_1, d_2$  — диагонали

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

Прямоугольный треугольник



$$\sin a = \frac{a}{c}$$

$$\cos a = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{a}{b}$$

Теорема Пифагора:  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Некоторые значения тригонометрических функций

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

## Диагностическая работа

1. Найдите значение выражения  $\frac{6,6 \cdot (2,2 + 1)}{9,6}$ .

2. Найдите значение выражения  $\left(\frac{7}{12} + \frac{5}{6}\right) : \frac{17}{24}$ .

3. О числах  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  известно, что  $c > d$ ,  $b > c$ ,  $a = b$ . Сравните числа  $a$  и  $d$ .

4. Найдите значение выражения  $(a + 4)^2 + 2a(3a - 4)$  при  $a = \sqrt{2}$ .

5. Найдите значение выражения  $\frac{3^{-5} \cdot 3^{-6}}{3^{-14}}$ .

6. Найдите значение выражения  $\frac{\sqrt{87} \cdot \sqrt{48}}{\sqrt{116}}$ .

7. Решите уравнение  $x^2 + 4x = 12$ .

8. Решите неравенство  $2 - 6(3 - x) > 8x$ .

9. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 76 км/ч, проезжает мимо идущего параллельно путям со скоростью 5 км/ч навстречу ему пешехода за 16 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

10. В период с октября по март соль дорожала дважды — в первый раз на 8%, во второй — на 5%. Сколько рублей стал стоить мешок соли, если в октябре до подорожания он стоил 500 рублей?

## § 1. Теоретические сведения и подготовительные задания

Обращаем ваше внимание: все приведённые формулы верны на области определения. Например, в знаменателе дроби может находиться только число, не равное нулю, делить на нуль нельзя, под знаком арифметического корня может находиться только неотрицательное число. Но в некоторых формулах мы будем писать ограничения на переменную, чтобы подчеркнуть требования, которые часто забывают.

### Правила действий со степенями

Напомним, что степень с отрицательным целым показателем определена только для чисел, не равных нулю, а степень с нецелым показателем определена только для неотрицательных чисел.

Пусть  $p, q \in R, n \in N$ . Тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n;$$

$$a^0 = 1, \quad \text{если } a \neq 0;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{если } a \neq 0;$$

$0^0$  не определено;

$$a^p a^q = a^{p+q}; \quad (a^p)^q = a^{pq};$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \quad (ab)^p = a^p b^p; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Например:

$$a^4 \cdot a^6 = a^{4+6} = a^{10};$$

$$x^7 : x^5 = x^{7-5} = x^2;$$

$$2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7 = 10\,000\,000;$$

$$(y^4)^5 = y^{4 \cdot 5} = y^{20};$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5};$$

$$(5ch^3)^2 = 5^2 c^2 (h^3)^2 = 25c^2 h^6;$$

$$\frac{b^4 \cdot b^5}{b^8} = \frac{b^{4+5}}{b^8} = \frac{b^9}{b^8} = b^{9-8} = b;$$

$$453^0 = 1;$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8};$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49};$$

$$\left(1\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{10}{7}\right)^2 = \frac{10^2}{7^2} = \frac{100}{49} = 2\frac{2}{49};$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{3}\right)^1 = 2\frac{1}{3};$$

$$1,4^{-2} = \left(\frac{14}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^2}{7^2} = \frac{25}{49}.$$

$$(14 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (8 \cdot 10^5) = 14^2 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \cdot 10^5 = 196 \cdot 8 \cdot 10^{-4+5} = 1568 \cdot 10 = 15\,680.$$

---

### Проверь себя

---

Упростите выражения, представив ответ в виде степени:

1.  $x^3 \cdot x^5$ .

2.  $a^6 \cdot a^4$ .

3.  $y^7 \cdot y$ .

4.  $x^4 \cdot x$ .

5.  $\frac{a^6}{a^5}$ .

6.  $\frac{y^9}{y^2}$ .

7.  $\frac{b^6 \cdot b^3}{b^7}$ .

8.  $\frac{a^{16}}{a^5 \cdot a^6}$ .

9.  $(x^4)^3$ .

10.  $(k^{-5})^{-7}$ .

11.  $(x^5)^2$ .

12.  $(k^{-3})^5$ .

Найдите значения выражений:

13.  $2^5$ .

14.  $5^3$ .

15.  $3^2$ .

16.  $3^5$ .

17.  $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ .

18.  $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$ .

19.  $\left(1\frac{2}{7}\right)^2$ .

20.  $\left(\frac{2}{7}\right)^2$ .

21.  $0,1^4$ .

22.  $1,3^2$ .

23.  $5^{-1}$ .

24.  $2^{-3}$ .

25.  $1,5^{-2}$ .

26.  $2,5^{-1}$ .

27.  $3^0 - 0,2^{-3}$ .

28.  $0,5^{-2} + 7^0$ .

29.  $2^5 \cdot 5^5$ .

30.  $25^9 \cdot 0,04^9$ .

31.  $2^3 + 5^2$ .

32.  $25^{-1} - 0,04^0$ .

33.  $\frac{50^5}{5^{10}}$ .

34.  $\frac{18^4}{3^8}$ .

35.  $\frac{6^5}{3^4}$ .

36.  $\frac{12^4}{2^7}$ .

37.  $\frac{(5^3)^{-6}}{5^{-20}}$ .

38.  $\frac{(3^{12})^{-2}}{3^{-27}}$ .

39.  $\frac{6^5 \cdot 2^{11}}{12^5}$ .

40.  $\frac{7^7 \cdot 4^{10}}{28^7}$ .

41.  $\frac{6^{-3} \cdot 6^{15}}{6^{10}}$ .

42.  $\frac{8^{-5} \cdot 8^{12}}{8^6}$ .

43.  $\frac{(6 \cdot 7)^5}{6^3 \cdot 7^4}$ .

44.  $\frac{(3 \cdot 8)^7}{3^3 \cdot 8^6}$ .

45.  $3^{-8} \cdot (3^2)^6$ .

46.  $5^{-6} \cdot (5^3)^3$ .

47.  $\frac{3^6}{81}$ .

48.  $\frac{625}{5^5}$ .

49.  $(12 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (14 \cdot 10^3)$ .

50.  $(9 \cdot 10^2)^2 \cdot (13 \cdot 10^{-3})$ .

Конец ознакомительного фрагмента.  
Приобрести книгу можно  
в интернет-магазине  
«Электронный универс»  
[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)