СОДЕРЖАНИЕ

1. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1. Гармонические колебания и их характеристики

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени. Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например качание маятника часов, переменный электрический ток и т. д. При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи. Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания механические, электромагнитные и др. Однако различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и идентичными уравнениями. Отсюда следует целесообразность **единого подхода** к изучению колебаний **различной физической природы**.

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания).

Простейшим типом колебаний являются **гармонические колебания** – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса). Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам: 1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому; 2) различные **периодические процессы** (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний.

Гармонические колебания величины s описываются уравнением типа

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (1.1)$$

где A – максимальное значение колеблющейся величины, называемое амплитудой колебания; ω_0 – собственная (циклическая) частота; φ – начальная фаза колебания в момент времени $t = 0$; $(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза колебания в момент времени t. Фаза колебания определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени. Так как косинус изменяется в пределах от $+1$ до -1, то s может принимать значения от $+A$ до $-A$. Роль величины s в случае механических колебаний может играть, например, координата x, угол отклонения α; в случае электромагнитных колебаний – заряд на обкладках конденсатора q, сила тока в колебательном контуре I и другие величины.

Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени T, называемый **периодом колебания**, за который фаза колебания получает приращение 2π, т. е.:

$$\omega_0(t+T)+\varphi=(\omega_0 t+\varphi)+2\pi,$$

откуда

$$T=2\pi/\omega_0. \tag{1.2}$$

Величина, обратная периоду колебаний:

$$\nu=1/T, \tag{1.3}$$

т. е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется **частотой колебаний**. Сравнивая (1.2) и (1.3), получим:

$$\omega_0=2\pi\nu. \tag{1.4}$$

Единица частоты – **герц** (Гц): 1 Гц – частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.

Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины s:

$$ds/dt=\dot{s}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi+\pi/2), \tag{1.5}$$

$$d^2s/dt^2=\ddot{s}=-A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi)=A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi+\pi), \tag{1.6}$$

т. е. имеем гармонические колебания с той же циклической частотой. Амплитуды величин (1.5) и (1.6) соответственно равны $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$. Фаза величины (1.5) отличается от фазы величины (1.1) на $\pi/2$, а фаза величины (1.6) отличается от фазы величины (1.1) на π. Следовательно, в моменты времени, когда $s=0$, ds/dt приобретает наибольшие значения; когда же s достигает максимального отрицательного значения, то d^2s/dt^2 приобретает наибольшее положительное значение (рис. 1.1).

Из выражения (1.6) следует **дифференциальное уравнение гармонических колебаний**:

$$d^2s/dt^2+\omega_0^2 s=0. \tag{1.7}$$

Решением этого уравнения является выражение (1.1).

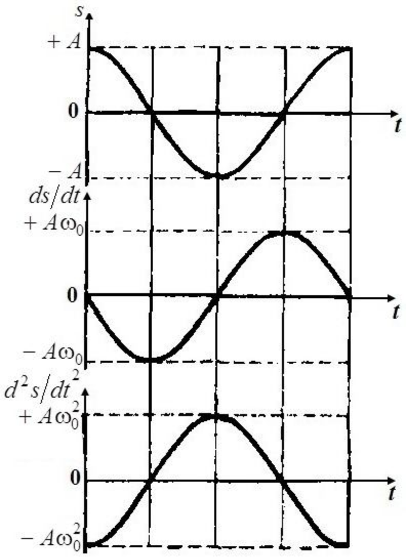

Рис. 1.1

Гармонические колебания изображаются графически **методом вращающегося вектора амплитуды**, или **методом векторных диаграмм**. Для этого из произвольной точки O, выбранной на оси X, под углом φ, равным начальной фазе колебания, откладывается вектор $\vec{A}$, модуль которого равен амплитуде A рассматриваемого колебания (рис. 1.2). Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью ω_0, равной циклической частоте колебаний, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси X и принимать значения от $-A$ до $+A$, а колеблющаяся величина будет изменяться со временем по закону $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Таким образом, гармоническое колебание можно представить проекцией на некоторую **произвольно** выбранную ось вектора амплитуды $\vec{A}$, отложенного из произвольной точки оси под углом φ, равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью ω_0 вокруг этой точки.

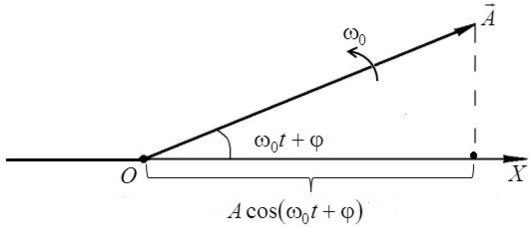

Рис. 1.2

2. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

2.1. Механические гармонические колебания

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси X около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда зависимость координаты x от времени t задается уравнением, аналогичным уравнению (1.1), где $s = x$:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{2.1}$$

Согласно выражениям (1.5) и (1.6), скорость υ и ускорение a колеблющейся точки соответственно равны:

$$\upsilon = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2); \tag{2.2}$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \tag{2.3}$$

Из выражений (2.2) и (2.3) находим:
максимальная скорость $\upsilon_{\max} = A\omega_0$;
максимальное ускорение $a_{\max} = A\omega_0^2$.

Сила F, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m, согласно второму закону Ньютона, с учетом (2.3) и (2.1) равна:

$$F_x = ma = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -mA\omega_0^2 x. \tag{2.4}$$

Следовательно, сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия). Эта сила получила название **квазиупругая возвращающая сила**.

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания:

$$E_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right]. \tag{2.5}$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием квазиупругой силы F_x:

$$E_{\text{п}} = -\int_0^x F_x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right]. \tag{2.6}$$

Сложив (2.5) и (2.6), получим формулу для **полной энергии**:

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = E_{\text{п}_{\max}} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} =$$

$$= E_{\text{к}_{\max}} = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \qquad (2.7)$$

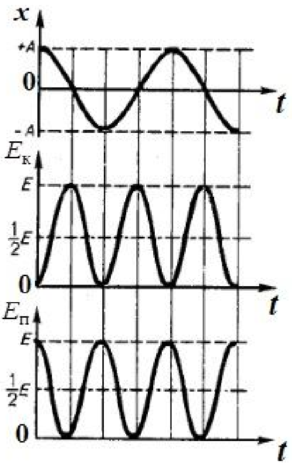

Рис. 2.1

Полная энергия остается постоянной, т. к. при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку квазиупругая сила консервативна.

Из формул (2.5) и (2.6) следует, что $E_{\text{к}}$ и $E_{\text{п}}$ изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания. На рис. 2.1 представлены графики зависимости x, $E_{\text{к}}$ и $E_{\text{п}}$ от времени. Так как средние значения $\langle \sin^2\alpha \rangle = \langle \cos^2\alpha \rangle = 1/2$, то из формул (2.5), (2.6) и (2.7) следует, что средние значения кинетической и потенциальной энергий равны половине полной энергии:

$$\langle E_{\text{к}} \rangle = \langle E_{\text{п}} \rangle = \frac{1}{2}E.$$

Методические указания к решению задач

1. Записать общее уравнение гармонических колебаний. Закон синуса или косинуса для гармонических колебаний определяется начальными условиями. Если начальные условия не заданы, то можно брать любой закон. Кроме того, уравнение одного и того же гармонического колебания можно записать через закон синуса или косинуса, основываясь на их связи по формулам приведения ($\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$, $\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$).

2. Если в задаче есть заданное уравнение колебаний, сопоставить его с общим уравнением и определить характеристики колебательного движения.

3. Если в задаче даны характеристики колебательного движения, составить уравнение колебательного движения, опираясь на них.

4. Следует помнить, что при максимальном смещении ($x = A$) скорость точки равна нулю, а ускорение максимально. В положении равновесия ($x = 0$) скорость максимальна, а ускорение равно нулю. Ускорение всегда направлено к положению равновесия.

Примеры решения задач

Пример 1

Материальная точка массой 10 г совершает гармоническое колебание с периодом $T = 1$ с. Определить амплитуду колебаний, максимальную скорость и максимальное ускорение колеблющейся точки, если полная энергия точки равна 0,02 Дж.

Дано:	СИ
$m = 10$ г	10^{-2} кг
$T = 1$ с	
$E = 0{,}02$ Дж	
Найти:	
A – ?	
υ_{max} – ?	
a_{max} – ?	

Анализ

Для решения воспользуемся уравнениями кинематики гармонических колебаний.

Решение

Уравнение гармонического колебания запишем в виде:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

где x – смещение материальной точки от положения равновесия; A – амплитуда; ω – циклическая (круговая) частота; t – время; φ – начальная фаза.

Скорость колеблющейся точки определяется как первая производная от смещения по времени:

$$\upsilon = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Максимальное значение скорости:

$$\upsilon_{max} = A\omega. \quad (2)$$

Ускорение точки определяется как производная от скорости по времени:

$$a = \dot{\upsilon} = \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi).$$

Максимальное значение ускорения:

$$a_{max} = A\omega^2. \quad (3)$$

Циклическая частота связана с периодом:

$$\omega = 2\pi/T. \quad (4)$$

Подставим (4) в (2) и (3), тогда:

$$\upsilon_{max} = A 2\pi/T\,; \qquad a_{max} = A(2\pi/T)^2.$$

Полная энергия складывается из кинетической и потенциальной энергии и равна максимальной потенциальной или максимальной кинетической энергии:

$$E = E_к + E_п = E_{кmax} = \frac{m\upsilon_{max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{mA^2 4\pi^2}{2T^2}.$$

Из этого выражения найдем амплитуду:

$$A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Проверим размерность:

$$[\text{A}] = \text{с}\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{с}\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \text{с}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \frac{\text{с}\cdot\text{м}}{\text{с}} = \text{м}.$$

Произведем вычисления:

$$A = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}02}{0{,}01}} = 0{,}32\,(\text{м}), \quad \upsilon_{max} = 0{,}32\cdot 2\cdot 3{,}14/1 = 2\,(\text{м/с}),$$

$$a_{max} = 0{,}32\cdot(2\cdot 3{,}14/1)^2 = 12{,}6\,(\text{м/с}^2).$$

Ответ: $A = 0{,}32$ м, $\upsilon_{max} = 2$ м/с, $a_{max} = 12{,}6$ м/с^2.

Пример 2

Частица совершает гармонические колебания вдоль оси X около положения равновесия $x = 0$. Частота колебаний $\omega = 4{,}00$ с$^{-1}$. В некоторый момент времени координата частицы $x_0 = 25{,}0$ см и ее скорость $\upsilon_0 = 100$ см/с. Найти координату x и скорость частицы υ через время $t = 2{,}4$ с после этого момента.

Дано:	СИ
$\omega = 4{,}00$ с$^{-1}$	
$x_0 = 25{,}0$ см	0,25 м
$\upsilon_0 = 100$ см/с	1 м/с
$t_1 = 2{,}4$ с	
Найти:	
x_1 – ?	
υ_1 – ?	

Анализ

Для решения воспользуемся уравнениями кинематики гармонических колебаний.

Решение

Закон движения частицы, совершающей гармонические колебания, определяется уравнением (2.1):

$$x = A\cos(\omega t + \varphi). \qquad (1)$$

За начало отсчета времени ($t = 0$) выберем момент, для которого заданы начальные условия: x_0 и υ_0 колеблющейся частицы.

Закон изменения скорости со временем найдем, продифференцировав по времени уравнение (1):

$$\upsilon = dx/dt = -A\omega\sin(\omega t + \varphi). \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) в точке $t = 0$ с учетом начальных условий имеют вид:

$$x_0 = A\cos\varphi, \quad \upsilon_0 = -A\omega\sin\varphi.$$

Получили систему из двух уравнений для определения амплитуды A и начальной фазы φ. Из них найдем:

$$\cos\varphi = x_0/A, \qquad (3)$$

$$\sin\varphi = -\upsilon_0/A\omega. \qquad (4)$$

Уравнения (3) и (4) почленно возведем в квадрат и сложим:

$$\left(x_0^2/A^2\right) + \left(\upsilon_0^2/A^2\omega^2\right) = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

Отсюда амплитуда колебаний A равна:

$$A = \sqrt{(x_0^2\omega^2 + \upsilon_0^2)/\omega^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\upsilon_0^2/\omega^2\right)} = 0{,}353 \text{ м}.$$

Правильность формулы по размерности очевидна.

Разделив выражения (3) на (4), найдем тангенс начальной фазы колебаний: $\mathrm{tg}\varphi = -\upsilon_0/\omega \cdot x_0 = -1$.

Учитывая, что $-\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\left(180^\circ - \varphi\right)$, определим начальную фазу φ:

$$\varphi = 180° - 45° = 135° = 3\pi/4 = 2{,}35 \text{ рад}.$$

Подставив численные значения A и φ в уравнения (1) и (2), получим: $x = 0{,}353\cos(4t + 3\pi/4)$, м; $\upsilon = -0{,}353 \cdot 4\sin(4t + 3\pi/4)$, м/с.

Найдем искомые значения координаты x_1 и скорости υ_1 в момент времени $t_1 = 2{,}4$ с: $x_1 = 0{,}289$ м, $\upsilon_1 = 0{,}810$ м/с.

Ответ: $x_1 = 0{,}289$ м, $\upsilon_1 = 0{,}810$ м/с.

Пример 3

В U-образной трубке находится столбик жидкости длиной l, отсчитываемой по оси трубки. При кратковременном изменении давления жидкости в одном из колен уровни жидкости сместились и столбик начал колебаться. Определить частоту колебаний. Трением о стенки пренебречь.

Дано:
l
Найти:
ω – ?

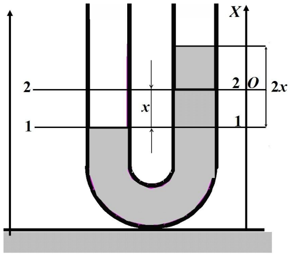

Рис. 2.2

Анализ:

Для решения воспользуемся уравнением динамики гармонических колебаний, а именно вторым законом Ньютона.

Решение:

Колебания жидкости начнутся под действием силы давления столба жидкости высотой $2x$ (рис. 2.2):

$$F = pS = 2\rho gxS, \tag{1}$$

где S – площадь поперечного сечения трубки; p – давление; ρ – плотность жидкости.

По второму закону Ньютона:

$$ma_x = -2\rho gSx. \tag{2}$$

Знак «минус» в уравнении (2) берется потому, что сила давления направлена в сторону, противоположную смещению.

Масса жидкости:

$$m = \rho lS. \tag{3}$$

Подставим (3) в (2) и, учитывая, что ускорение – это вторая производная от координаты, перепишем уравнение (2) в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{l}x = 0.$$

Получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний (1.7), в котором:

$$\frac{2g}{l} = \omega^2,$$

откуда циклическая частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Проверка размерности:

$$[\omega]=\sqrt{\frac{\text{м/с}^2}{\text{м}}}=c^{-1}.$$

Ответ: $\omega=\sqrt{\dfrac{2g}{l}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение синусоидального гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 5$ см, если за время $t = 1$ мин совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний $\varphi = \pi/4$. Начертить график этого движения. ($x = 0{,}05\sin(5\pi t + \pi/4)$, м)

2. Написать уравнение синусоидального гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 50$ мм, периодом $T = 4$ с и начальной фазой $\varphi = \pi/4$. Найти смещение x колеблющейся точки от положения равновесия при $t = 0$ и $t = 1{,}5$ с. Начертить график этого движения. ($x = 0{,}05\sin(\pi/2t + \pi/2)$, м; 0,035 м; 0 м)

3. Амплитуда гармонического колебания 10 см, период 0,5 с. Написать уравнение гармонических колебаний. Определить максимальную скорость и максимальное ускорение. (1,26 м/с; 15,78 м/с^2)

4. Найти зависимость скорости гармонического колебания $x = A\cos(\omega t+\varphi)$ от смещения. ($\upsilon=\omega\sqrt{A^2-x^2}$)

5. Найти зависимость ускорения гармонического колебания $x = A\sin(\omega t+\varphi)$ от смещения. Построить график зависимости ускорения от смещения. ($a=-\omega^2 x$)

6. Определить зависимость ускорения гармонического колебания $x = A\sin(\omega t+\varphi)$ от скорости. Построить график этой зависимости. ($a=\pm\omega\sqrt{A^2\omega^2-\upsilon^2}$)

7. Точка совершает колебания вдоль оси x по закону $x = A\cos(\omega t-\pi/4)$. Построить графики смещения x, проекции скорости υ_x и проекции ускорения a_x как функции времени t.

8. Начальная фаза синусоидального гармонического колебания материальной точки равна нулю. Через какую долю периода скорость точки будет равна половине ее максимальной скорости? $\left(t = \dfrac{1}{6}T\right)$

9. Определить максимальное ускорение материальной точки, совершающей синусоидальные гармонические колебания с амплитудой $A = 15$ см, если наибольшая скорость точки 30 см/с. Начальная фаза равна нулю. Написать уравнение колебаний. (0,6 м/с^2, $x\,(t) = 0{,}15\sin 2t$, м)

10. Точка совершает синусоидальное гармоническое колебание. Период колебаний $T = 2$ с, амплитуда $A = 50$ мм, начальная фаза $\varphi = 0$. Найти скорость υ точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия $x = 25$ мм. (13,6 см/с)

11. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки $A = 2$ см, полная энергия $E = 3{\cdot}10^{-7}$ Дж. При каком смещении от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила $F = 2{,}25{\cdot}10^{-5}$ Н? ($1{,}5{\cdot}10^{-2}$ м)

12. Уравнение колебания материальной точки массой $m = 16$ г имеет вид $x = 2\sin(\pi/4t + \pi/4)$, см. Построить график зависимости от времени t (в пределах одного периода) кинетической $E_к$, потенциальной $E_п$ и полной E энергии точки.

13. Написать уравнение гармонического колебания, если максимальное ускорение точки 0,5 м/с^2. Период колебаний 2 с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени 2,5 см. $\left(x = 0{,}05\sin\left(\pi t + \pi/6\right), \text{м}\right)$

14. Материальная точка массой $m = 0{,}01$ кг движется по закону $x = 0{,}05\,\sin\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$, м. Найти максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию колебания. ($1{,}97{\cdot}10^{-4}$ Н; $4{,}94{\cdot}10^{-6}$ Дж)

15. Начальная фаза гармонического колебания равна нулю. При смещении точки от положения равновесия, равном 2,4 см, скорость точки равна 3 см/с, а при смещении, равном 2,8 см, скорость равна 2 см/с. Найти амплитуду и период этого колебания. (3,1 см; 4,1 с)

16. Точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом $T = 0{,}60$ с и амплитудой $A = 10{,}0$ см. Найти среднюю скорость точки за время, в течение которого она проходит путь $A/2$: а) из крайнего положения; б) из положения равновесия. (а) 0,5 м/с; б) 1 м/с)

17. За какую часть периода точка, совершающая гармонические колебания, пройдет путь, равный: 1) половине амплитуды, если в начальный момент времени она находилась в положении равновесия; 2) одной трети амплитуды, если в начальный момент времени она находилась в крайнем положении? $\left(1)\,\frac{1}{2}T;\ 2)\,\frac{T}{7{,}5}\right)$

18. Тело массой m совершает колебания по закону $x = x_0 \sin \omega t$. Найти его максимальную кинетическую энергию и закон изменения силы, действующей на тело в процессе колебаний.

19. Льдина толщиной 10 см и площадью 400 см^2 плавает на поверхности пруда. С какой частотой она будет колебаться, если её несколько погрузить в воду, а затем отпустить? (10,5 рад/с)

20. Определить период колебаний ртути, находящейся в U-образной трубке. Площадь сечения трубки $S = 0{,}3$ см^2, масса ртути $m = 121$ г. (0,76 с)

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что такое колебания? Свободные колебания? Гармонические колебания?
2. Почему возможен единый подход при изучении колебаний различной физической природы?
3. Дайте определения амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебания.
4. Какую физическую величину измеряют в герцах?
5. В чем заключается идея метода вращающегося вектора амплитуды?
6. Выведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки как функции времени.
7. Выведите и прокомментируйте формулы для кинетической, потенциальной и полной энергии при гармонических колебаниях.
8. Чему равно отношение полной энергии гармонического колебания к максимальному значению возвращающей силы, вызывающей это колебание?