Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие включает подробные примеры решения задач, которые самостоятельно выполняются студентами в рамках расчетно-графических работ (РГР) и подготовки к мероприятиям текущего контроля и промежуточной аттестации. Предлагаемые решения сопровождаются краткими пояснениями по теории. Перед выполнением расчетно-графических работ студент должен разобрать и понять методику решения задач с целью дальнейшего применения полученной информации для выполнения РГР. Для лучшего освоения материала учащемуся рекомендуется ознакомиться с учебной литературой, рекомендуемой кафедрой сопротивления материалов [1, 2, 3, 4].

Учебное пособие охватывает разделы: «Центральное растяжение и сжатие прямого стержня», «Геометрические характеристики сечений», «Плоский прямой изгиб стержня», «Кинематический анализ стержневых систем», «Эпюры внутренних усилий в рамах», «Определение перемещений стержневых систем», «Статически неопределимые системы», «Устойчивость сжатых стержней».

В настоящем учебном пособии учтены последние изменения в строительных нормах, а также актуализированный сортамент.

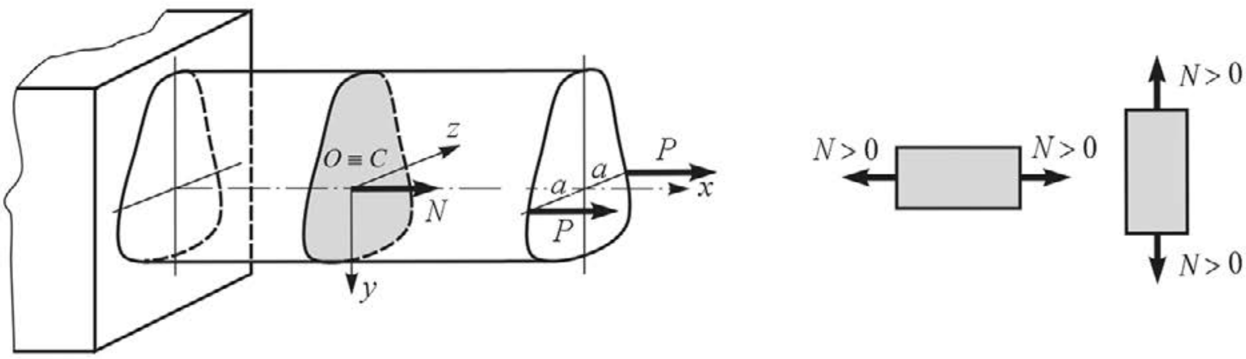
1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

1.1. Основные определения и формулы

1.1.1. Продольная сила

Когда равнодействующие нагрузок направлены вдоль оси прямого стержня, возникает вид напряженно-деформированного состояния, который называют центральным растяжением и сжатием. На рис. 1.1, *а* приведен пример центрального растяжения. Стержень загружен двумя одинаковыми внешними сосредоточенными силами P, расположенными на равных расстояниях a от оси стержня. Если привести эти силы к точке, расположенной на оси стержня, то их равнодействующая будет равна $2P$.

В поперечном сечении прямого стержня при таком нагружении из внутренних усилий остается только одно — *продольная сила* N. Так как она, действуя вдоль оси стержня, направлена по нормали к поперечному сечению, то ее также называют *нормальной силой*. В данном примере эта продольная сила будет равна $2P$, как будет показано далее.



а *б*

Рис. 1.1. Стержень при центральном растяжении и правило знаков продольной силы N

Напомним, что *ось стержня* — это линия, проходящая *через центры тяжести поперечных сечений* и ориентированная вдоль стержня. На рис. 1.1, *а* ось стержня показана прямой линией Ox.

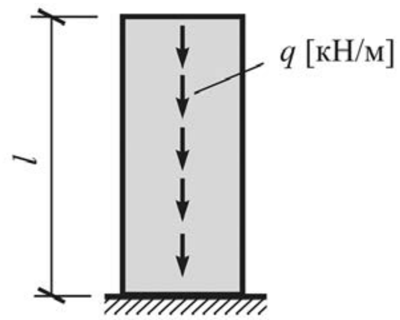


Рис. 1.2. Равномерно распределенная нагрузка q

Собственный вес стержня можно представить в виде *распределенной нагрузки* q. Она обычно изображается рядом стрелочек, действующих вдоль оси стержня, и измеряется в кН/м. На рис. 1.2 показан стержень с постоянным поперечным сечением.

При постоянном сечении стержня нагрузка будет *равномерно-распределенной*, т.е. она не изменяется по длине стержня (q = const). Можно считать, что нагрузка q равна весу одного метра стержня (его иногда называют погонным метром — обозначается пог. м). Чтобы найти вес всего стержня, надо умножить интенсивность нагрузки q на длину стержня: $P_{с.в} = ql$.

Правило знаков: продольная сила N будет положительной, если она приводит к растяжению стержня, т.е. направлена от сечения.

Знак продольной силы определяется по ее *физическому воздействию на сечение* и не зависит от направления продольной оси. На рис. 1.1, *б* представлена иллюстрация правила знаков N. Из стержня вырезан малый элемент. На его грани действуют положительные силы N, направленные от поверхности поперечного сечения, т.е. вызывающие растяжение.

Обычно при проведении расчетов в строительстве размерность внешних и внутренних сил берут в килоньютонах (кН). В одном килоньютоне содержится 1000 ньютонов (1 кН = 1000 Н). Также в проектной документации для сил иногда используют размерности кгс (килограмм-сила) и тс (тонна-сила). Полезно знать, что 10 Н ≈ 1 кгс = 0,001 тс. Тогда одна тонна-сила эквивалентна 10 кН. Так, например, если кран поднимает груз 3 тс, то продольная сила в тросе равна 30 кН. Обычно собственный вес вертикального стержня учитывают как распределенную нагрузку q. Являясь весом одного метра длины стержня, она имеет размерность кН/м. Для того чтобы узнать общий вес стержня при равномерно-распределенной нагрузке, следует умножить q на длину стержня.

Для определения продольной силы используют *метод сечений*, в соответствии с которым:

1) **р**азрезают стержень на две части;

2) **о**тбрасывают одну из двух частей стержня;

3) **з**аменяют действие отброшенной части на оставшуюся неизвестной продольную силу N (она является силой реакции, действующей со стороны отброшенной части на оставшуюся);

4) **у**равнение статики, записанное для оставшейся части, позволяет определить продольную силу N (сумма проекций всех сил на продольную ось оставшейся части стержня равна нулю).

Для лучшего запоминания метода сечений рекомендуется *прочитать сверху вниз первые буквы этих предложений*. Получим название известного цветка.

Отметим, что данный метод предполагает отыскание реакции отброшенной части на оставшуюся. Эта реакция и является продольной силой. Однако, в соответствии с 3-м законом Ньютона о равенстве сил действия силам противодействия, можно заменить поиск реакции (силы противодействия) определением активной силы (силы действия), являющейся суммой внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

Таким образом, *продольная сила N в любом сечении прямого стержня может быть найдена как сумма внешних сил, действующих вдоль его оси, расположенных с одной стороны от сечения.*

Так, если мы имеем горизонтальный стержень, показанный на рис. 1.3, загруженный четырьмя силами, то продольную силу в сечении K можно найти, суммируя как левые, так и правые силы.

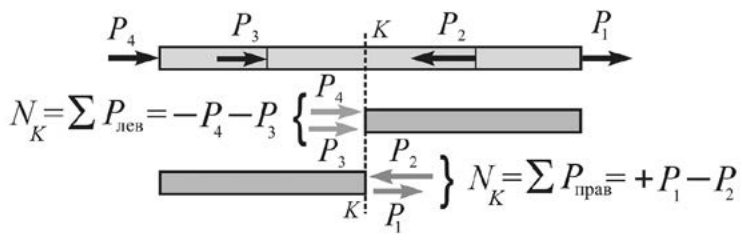


Рис. 1.3. Равномерно распределенная нагрузка q

Если перенести левые силы P_4 и P_3 к месту разреза, то они будут сжимать правую часть (мы их берем с минусом), а если перенести правые силы и приложить их к левой части, то P_1 будет растягивать левую часть (мы ее учитываем с плюсом), а P_2 — сжимать (она берется с минусом).

1.1.2. Способы построения эпюры *N*

График функции N(x) называют эпюрой продольной силы N. Параллельно оси стержня проводится базовая линия, от которой откладываются значения продольной силы в масштабе. На эпюре выполняется штриховка перпендикулярно базовой линии. Принято обозначать этот график буквой *N*, а рядом указывать размерность продольной силы, например, в килоньютонах (кН). На эпюре *N* также должны быть обозначены «плюс» и «минус», причем однозначного правила, куда откладывать положительные значения (вправо, влево, вниз, вверх), не существует.

Различают различные способы построения эпюры продольных сил *N*. Например, используя метод сечений, можно провести некоторое сечение на расстоянии *x* от начала координат, рассмотреть одну из частей и, записав для нее уравнение равновесия, получить некоторую функцию $N(x)$, график которой и будет являться эпюрой продольных сил. Можно, суммируя активные силы, приложенные с одной стороны от сечения, также получить выражение $N(x)$. В инженерной практике, как правило, пропускают составление аналитической зависимости $N(x)$, график которой (эпюру) затем нужно будет построить. В характе́рных сечениях определяют значения продольной силы, откладывают полученные значения (ординаты) в масштабе перпендикулярно базовой линии, а затем соединяют полученные точки эпюры линиями. Это можно делать, зная вид функции $N(x)$ на каждом характе́рном участке, который ограничивается характерными сечениями, которыми можно считать те сечения, где приложены внешние силы, имеет место изменение размеров сечения, начинается и заканчивается распределенная нагрузка. Другими словами, на каждом характерном участке имеет место присущий ему вид функции $N(x)$.

Напомним, что между продольной распределенной нагрузкой *q* и продольной силой *N* существует следующая *дифференциальная зависимость*:

$$\frac{dN}{dx} = -q.$$

В дальнейшем, для решения задачи на построение эпюры продольной силы нам пригодятся два следствия, вытекающие из приведенной формулы:

1) *если q = 0 (участок не загружен), то N(x) — постоянная функция (на эпюре N изображается прямой, параллельной оси стержня);*

2) *если q(x) — постоянная функция (случай равномерно распределенной нагрузки), то N(x) имеет вид линейной функции (на эпюре N изображается наклонной прямой).*

Исходя из приведенной выше дифференциальной зависимости, можно сделать вывод, что функция $N(x)$ на порядок выше $q(x)$. Например, если $q(x)$ представляет собой линейную функцию, то график $N(x)$ будет иметь вид квадратной параболы. В этом случае эпюру продольной силы придется строить минимум по трем точкам, как для кривой линии.

Таким образом, на участках, где отсутствует распределенная нагрузка, эпюра продольных сил будет иметь вид прямоугольника (здесь достаточно найти продольную силу в одном сечении), а на участках с равномерно распределенной нагрузкой *q*, чтобы построить прямую наклонную линию, следует найти продольную силу по меньшей мере в двух сечениях.

1.1.3. Нормальные напряжения в поперечном сечении

В соответствии с гипотезами, которые используют при выводе формул при растяжении и сжатии прямого стержня [1], распределение нормальных напряжений в поперечном сечении стержня будет носить равномерный характер (рис. 1.4). Их определяют по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где *N* — продольная сила; *A* — площадь поперечного сечения.

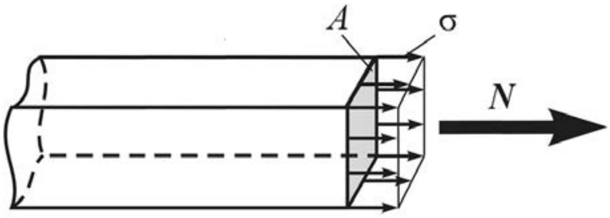


Рис. 1.4. Нормальные напряжения в поперечном сечении

Очевидно, что в формуле идет речь о σ_x — нормальном напряжении, действующем в направлении оси x (вдоль стержня). В дальнейшем для упрощения записи индекс нормального напряжения будем опускать.

Размерность напряжений — это сила, деленная на площадь. При расчете строительных конструкций напряжение обычно измеряют в мегапаскалях (МПа). Напомним, что 1 МПа = $1 \cdot 10^6$ Па. Также стоит запомнить, что 1 кН/см^2 = $1 \cdot 10^{-3}$ МН/$1 \cdot 10^{-4}$ м^2 = 10 МПа. Поэтому полученный результат в кН/см^2 надо просто умножить на 10, чтобы получить его в мегапаскалях. В советской проектной документации для напряжений использовали размерности тс/м^2 и кгс/м^2. Полезно знать, что 1 МПа ≈ 10 кгс/см^2 = 100 тс/м^2. Это также пригодится, например, при расчете бетонных конструкций. Так, если марка цемента составляет М300, что соответствует его прочности на сжатие 300 кгс/см^2, то в мегапаскалях прочность на сжатие можно принять равной 30 МПа.

Иногда в нормативных источниках используют размерность напряжений в Н/мм^2. Однако, если учесть, что 1 МПа = 1 Н/мм^2, то перевод единиц не представляет труда (1 МПа = 1 МН/м^2 = $1 \cdot 10^6$Н/$1 \cdot 10^6$ мм^2 = 1 Н/мм^2).

1.1.4. Определение деформаций

Также важным является определение величин деформаций строительных конструкций, чтобы затем сравнить их с предельными величинами, представленными в строительных нормах.

Удлинение — это сокращенное название *абсолютной линейной продольной деформации* Δl, которая является разностью длины стержня l после приложения нагрузки и первоначальной длины стержня l_0 (рис. 1.5), т.е. можно записать равенство $\Delta l = l - l_0$.

Отношение абсолютной деформации к первоначальной длине называется *относительной линейной продольной деформацией*:

$$\varepsilon = \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}.$$

Исследования показывают, что поперечные размеры прямого стержня при растяжении уменьшаются, а при сжатии — увеличиваются. Абсолютные поперечные деформации можно найти по формулам

$$\Delta b = b - b_0; \Delta h = h - h_0.$$

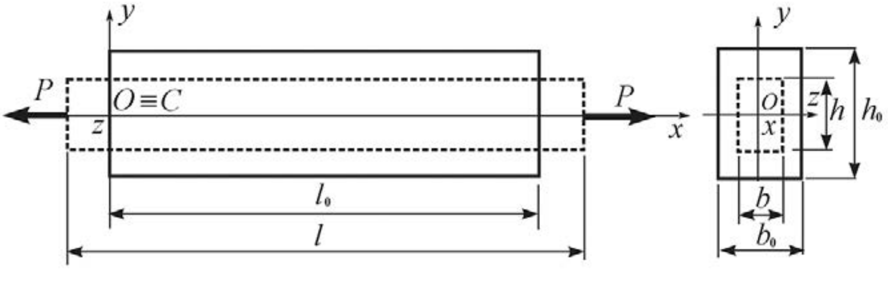


Рис. 1.5. Деформирование прямого стержня при центральном растяжении

Относительными поперечными деформациями называют величины:

$$\varepsilon' = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta b}{b}.$$

Коэффициент Пуассона — это модуль отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|.$$

Коэффициент Пуассона обозначается ν и является одной из физических констант материала. *Е*го величина изменяется от 0 до 0,5 $(0{,}5 \le \nu \le 0)$. Значения ν, близкие к нулевым, имеют пористые материалы, например, пробка. У стержней, выполненных из подобных материалов, поперечные размеры при растяжении и сжатии не изменяются. Максимальные значения $\nu = 0{,}5$ имеют материалы типа резины на основе каучука. Сталь имеет величину ν, равную примерно 0,3.

Очевидно, что абсолютная деформация имеет размерность длины (м, см, мм), а относительные деформации и коэффициент Пуассона являются безразмерными величинами.

В учебной литературе приводятся различные формулы для определения удлинения. При изложении решения задач по данной теме будут использоваться следующие формулы.

Первая из них применяется при условии, что на участке $N = \text{const}$:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

где N — продольная сила; l — длина участка; A — площадь поперечного сечения; E — модуль упругости материала. Произведение EA в знаменателе называется *жесткостью при растяжении и сжатии.*

Величина E (модуль упругости) представляет собой размерный коэффициент пропорциональности в формуле закона Гука, связывающего нормальное напряжение σ с относительной деформацией ε.

$$\sigma = E\varepsilon \text{ — закон Гука.}$$

При испытаниях стальных образцов на растяжение начальный участок диаграммы напряжений имеет линейный характер (рис. 1.6).

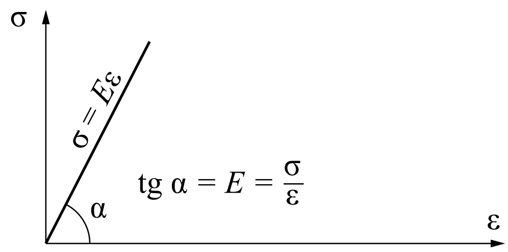


Рис. 1.6. Графическое представление закона Гука

Модуль упругости E является еще одной физической константой материала, наряду с коэффициентом Пуассона. Так, для стали приближенно можно принять $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, а для бетонов различных классов он изменяется и в среднем составляет $3 \cdot 10^4$ МПа.

Следующее выражение для нахождения удлинения справедливо для произвольной функции $N(x)$, а следовательно, и произвольной функции $\sigma(x)$.

$$\Delta l = \frac{\Omega_N}{EA} = \frac{\Omega_\sigma}{E},$$

где Ω_N — площадь эпюры продольных сил; Ω_σ — площадь эпюры нормальных напряжений; E — модуль упругости.

1.1.5. Расчеты на прочность по строительным нормам

Метод расчета по предельным состояниям является основным методом расчета строительных конструкций [5].

Надежность строительного объекта — это его способность выдерживать нагрузки в течение всего срока эксплуатации.

Очевидно, что жилое здание не должно разрушаться (тогда его *нельзя эксплуатировать*). Но также нельзя допускать и того, чтобы, например, плита перекрытия прогнулась на полметра, что, по меньшей мере, не эстетично и *затрудняет его нормальную эксплуатацию*, условия которой представлены в строительных нормах и проектном задании.

В строительных нормах применяют термин «*предельное состояние*». Это — *такое состояние, при превышении которого эксплуатация недопустима, затруднена или нецелесообразна.*

Существуют *следующие группы предельных состояний строительных объектов*:

– *первая группа* предельных состояний — состояния, превышение которых приводит к потере несущей способности зданий и сооружений, а их *эксплуатация становится полностью невозможной*. К этой группе относят: разрушение или потерю устойчивости объекта строительства или его части, а также все явления, при которых *эксплуатация* строительного объекта *полностью прекращается* (например, при чрезмерных деформациях, значительном раскрытии трещин и др.);

– *вторая группа* предельных состояний — состояния, превышение которых приводит к невозможности *нормальной эксплуатации* строительной конструкции, резко снижается ее ресурс долговечности, нарушается комфортность пребывания людей и др., т.е. нарушаются те критерии, которые мало влияют на несущую способность конструкции. Так, например, строительные нормы устанавливают предельные величины прогибов балок в основном из эстетических соображений. Также не допускаются появления значительных уровней колебаний конструкций или оснований, вызывающих дискомфорт или наносящих вред здоровью людей, а также другие явления, снижающие время эксплуатации здания или расчетного срока службы (например, повреждения, вызванные коррозией). Отметим, что *при превышении критериев второй группы эксплуатация здания или сооружения не прекращается*. Однако нарушения должны быть устранены.

Особые предельные состояния возникают при особых воздействиях и ситуациях, которые приводят *к разрушению конструкций с катастрофическими последствиями*. Такие разрушения могут быть вызваны взрывами, сейсмическими воздействиями, пожаром, провалами или оползнями грунта и другими внезапными явлениями.

В машиностроении применяют *метод расчета по допускаемым напряжениям*. Условие прочности для нормальных напряжений в соответствии с этим методом записывают в виде неравенства

$$\sigma \le [\sigma],$$

где $[\sigma]$ — допускаемое нормальное напряжение, которое получено делением опасного напряжения σ_o, при котором может произойти разрушение конструкции или появляются чрезмерные необратимые деформации, на коэффициент запаса прочности $n_{\text{зап}}$, значение которого назначается больше единицы.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n_{\text{зап}}}.$$

При проведении расчетов на прочность в строительстве *по первой группе предельных состояний* вводят не один, а несколько частных коэффициентов надежности. Это — *коэффициент надежности по нагрузке* γ_f, *коэффициент надежности по материалу* γ_m, *коэффициент условий работы* γ_c *и коэффициент надежности по ответственности* γ_n. Каждый из этих коэффициентов отвечает за свою определенную группу отклонений реальных расчетных параметров в большую сторону, что повышает надежность строительного объекта.

Начальный этап расчета строительных конструкций по первой группе предельных состояний посвящен вычислению *расчетных нагрузок*:

$$P_{\text{р}} = \gamma_f \gamma_n P_{\text{н}};$$

$$q_{\text{р}} = \gamma_f \gamma_n q_{\text{н}},$$

где $P_{\text{р}}$ — расчетная сила; $P_{\text{н}}$ — нормативная сила; $q_{\text{р}}$ — расчетная нагрузка; $q_{\text{н}}$ — нормативная распределенная нагрузка.

Коэффициент надежности по нагрузке γ_f *учитывает возможные отличия реальных нагрузок от нормативных*. Трудность состоит в том, что проектировщики точных величин реальных нагрузок не имеют. Не известно, сколько выпадет снега, какой силы ветер будет воздействовать на конструкцию, даже учет собственного веса осложняется разбросом в характеристиках строительных материалов. Поэтому *вместо реальных нагрузок в расчет вводят расчетные нагрузки*.

Нормативные нагрузки от веса здания могут быть определены исходя из размеров его конструктивных элементов и объемного веса материалов. Если производится расчет перекрытий здания, учитывается нагрузка от всех слоев, входящих в их состав, каждый из которых обладает своим собственным весом. *Нормативный собственный вес* перекрытия можно вычислить, определив на основе данных проекта его объем, умножением его на объемный вес. Если речь идет об определении *расчетного собственного веса* перекрытия, то *нормативный вес* надо умножить на указанные ранее коэффициенты надежности.

К нормативным нагрузкам можно также отнести *полезную нагрузку*. Расстановка мебели, число и место расположения проживающих в квартирах людей неизвестны. Строительные нормы заранее назначают эту нагрузку, исходя из опыта эксплуатации уже построенных объектов. Например, для квартир жилых зданий *полезная нагрузка принимается* 1,5 кПа или ~150 кгс/м^2 [6]. При расчете перекрытий общественных зданий и стадионов полезная нагрузка может доходить до 4–5 кПа, так как речь идет о значительном количестве людей, поведение которых непредсказуемо. Нормативные значения ветровых и снеговых нагрузок устанавливают исходя из многолетних наблюдений для различных районов России.

По времени действия нормативные нагрузки делят на две группы: *постоянные* и *временные*. Временные нагрузки в свою очередь подразделяют на *длительные*, *кратковременные* и *особые* (более детальное описание видов нагрузок представлено в [6]). *Постоянные нагрузки воздействуют на сооружение постоянно* (к ним относят, например, собственный вес). *Временные нагрузки* действуют какое-то время, а затем не действуют (действуют время от времени). К временным относятся *снеговая* и *ветровая* нагрузки. Как правило, коэффициенты надежности по нагрузке γ_f для постоянных нагрузок принимаются меньше (γ_f = 1,05–1,3), чем для временных (γ_f = 1,1–1,4), так как действие постоянных нагрузок более предсказуемо.

Коэффициент надежности по ответственности γ_n вводят для повышения надежности особо ответственных объектов строительства [10]. Различают следующие *уровни ответственности: повышенный, нормальный или пониженный*. В соответствии с [5] объекты строительства подразделяются на классы: КС-3, КС-2 и КС-1 (КС — класс сооружений).

КС-3 (*повышенный*) — это особо опасные, технически сложные и уникальные объекты, перечисленные в статье 48.1 [11]. Это — важные объекты, обеспечивающие жизнеобеспечение населения, зданий и сооружений высотой более 100 м, большепролетные строения с пролетом более 100 м, объекты, имеющие заглубление более чем на 15 м, тоннели протяженностью больше 500 м и др. Гидро- и теплоэлектростанции, атомные станции, стадионы, театры, теле- и радиобашни, тоннели метро, железнодорожные и автомобильные мосты относятся к классу КС-3, для которых принимают γ_n = 1,1.

КС-2 (*нормальный*) — это объекты строительства, не вошедшие в классы КС-1 и КС-3. Для них принимают γ_n = 1,0. Жилые и производственные здания и сооружения, как правило, относят к данному классу.