



# Содержание

<b>Введение</b> .....	12
<b>Глава 1. Основные понятия</b> .....	18
Что такое алгоритмы .....	18
Анализ скорости выполнения алгоритмов .....	19
Память или время .....	19
Оценка с точностью до порядка .....	20
Определение сложности .....	21
Сложность рекурсивных алгоритмов .....	23
Средний и наихудший случай .....	25
Общие функции оценки сложности .....	26
Логарифмы .....	27
Скорость работы алгоритма в реальных условиях .....	27
Обращение к файлу подкачки .....	28
Резюме .....	30
<b>Глава 2. Списки</b> .....	31
Основные понятия о списках .....	31
Простые списки .....	32
Изменение размеров массивов .....	32
Список переменного размера .....	35
Класс SimpleList .....	39
Неупорядоченные списки .....	40
Связанные списки .....	45
Добавление элементов .....	47
Удаление элементов .....	48

Метки .....	49
Доступ к ячейкам .....	50
Разновидности связанных списков .....	52
Циклические связанные списки .....	52
Двусвязные списки .....	53
Списки с потоками .....	55
Другие связанные структуры .....	58
Резюме .....	60

### **Глава 3. Стеки и очереди** .....

Стеки .....	61
Стеки на связанных списках .....	63
Очереди .....	65
Циклические очереди .....	66
Очереди на основе связанных списков .....	70
Очереди с приоритетом .....	71
Многопоточные очереди .....	73
Резюме .....	75

### **Глава 4. Массивы** .....

Треугольные массивы .....	77
Диагональные элементы .....	78
Нерегулярные массивы .....	79
Линейное представление с указателем .....	80
Нерегулярные связанные списки .....	81
Динамические массивы Delphi .....	82
Разреженные массивы .....	83
Индексирование массива .....	84
Сильно разреженные массивы .....	87
Резюме .....	89

### **Глава 5. Рекурсия** .....

Что такое рекурсия .....	90
Рекурсивное вычисление факториалов .....	91
Анализ сложности .....	92

Рекурсивное вычисление наибольшего общего делителя .....	93
Анализ сложности .....	94
Рекурсивное вычисление чисел Фибоначчи .....	95
Анализ сложности .....	96
Рекурсивное построение кривых Гильберта .....	97
Анализ сложности .....	99
Рекурсивное построение кривых Серпинского .....	102
Анализ сложности .....	104
Недостатки рекурсии .....	105
Бесконечная рекурсия .....	106
Потери памяти .....	107
Необоснованное применение рекурсии .....	107
Когда нужно использовать рекурсию .....	108
Удаление хвостовой рекурсии .....	109
Нерекурсивное вычисление чисел Фибоначчи .....	111
Устранение рекурсии в общем случае .....	113
Нерекурсивное создание кривых Гильберта .....	118
Нерекурсивное построение кривых Серпинского .....	121
Резюме .....	125

## **Глава 6. Деревья** .....

Определения .....	126
Представления деревьев .....	127
Полные узлы .....	128
Списки дочерних узлов .....	129
Представление нумерацией связей .....	130
Полные деревья .....	134
Обход дерева .....	135
Упорядоченные деревья .....	140
Добавление элементов .....	141
Удаление элементов .....	142
Обход упорядоченных деревьев .....	146

Деревья со ссылками .....	147
Особенности работы .....	150
Q-деревья .....	151
Изменение значения MAX_QTREE_NODES .....	157
Восьмеричные деревья .....	157
Резюме .....	158

## **Глава 7. Сбалансированные деревья .....**

Балансировка .....	159
AVL-деревья .....	160
Добавление узлов к AVL-дереву .....	160
Удаление узлов из AVL-дерева .....	169
Б-деревья .....	174
Производительность Б-дерева .....	175
Удаление элементов из Б-дерева .....	176
Добавление элементов в Б-дерево .....	176
Разновидности Б-дерева .....	178
Усовершенствование Б-деревьев .....	180
Вопросы доступа к диску .....	181
База данных на основе Б+дерева .....	184
Резюме .....	187

## **Глава 8. Деревья решений .....**

Поиск в игровых деревьях .....	188
Минимаксный перебор .....	190
Оптимизация поиска в деревьях решений .....	193
Поиск нестандартных решений .....	194
Ветви и границы .....	195
Эвристика .....	200
Сложные задачи .....	216
Задача о выполнимости .....	217
Задача о разбиении .....	217
Задача поиска Гамильтонова пути .....	218
Задача коммивояжера .....	219

Задача о пожарных депо .....	220
Краткая характеристика сложных задач .....	220
Резюме .....	221
<b>Глава 9. Сортировка .....</b>	<b>222</b>
Общие принципы .....	222
Таблицы указателей .....	222
Объединение и сжатие ключей .....	223
Пример программы .....	226
Сортировка выбором .....	226
Перемешивание .....	227
Сортировка вставкой .....	228
Вставка в связанных списках .....	229
Пузырьковая сортировка .....	231
Быстрая сортировка .....	234
Сортировка слиянием .....	239
Пирамидальная сортировка .....	241
Пирамиды .....	241
Очереди с приоритетом .....	245
Алгоритм пирамидальной сортировки .....	248
Сортировка подсчетом .....	250
Блочная сортировка .....	251
Блочная сортировка с использованием связанных списков .....	252
Резюме .....	255
<b>Глава 10. Поиск .....</b>	<b>257</b>
Примеры программ .....	257
Полный перебор .....	258
Перебор сортированных списков .....	259
Перебор связанных списков .....	259
Двоичный поиск .....	261
Интерполяционный поиск .....	263

Строковые данные .....	267
Следящий поиск .....	268
Двоичное отслеживание и поиск .....	268
Интерполяционный следящий поиск .....	269
Резюме .....	270
<b>Глава 11. Хеширование .....</b>	<b>272</b>
Связывание .....	273
Преимущества и недостатки связывания .....	275
Блоки .....	277
Хранение хеш-таблиц на диске .....	280
Связывание блоков .....	283
Удаление элементов .....	285
Преимущества и недостатки использования блоков .....	286
Открытая адресация .....	286
Линейная проверка .....	287
Квадратичная проверка .....	294
Псевдослучайная проверка .....	297
Удаление элементов .....	299
Резюме .....	301
<b>Глава 12. Сетевые алгоритмы .....</b>	<b>304</b>
Определения .....	304
Представления сетей .....	305
Управление узлами и связями .....	307
Обход сети .....	308
Наименьший каркас дерева .....	311
Кратчайший путь .....	316
Расстановка меток .....	318
Коррекция меток .....	323
Варианты поиска кратчайшего пути .....	326
Применение алгоритмов поиска кратчайшего пути .....	331

Максимальный поток .....	335
Сферы применения .....	342
Резюме .....	345

## **Глава 13. Объектно-ориентированные**

<b>методы .....</b>	<b>346</b>
---------------------	------------

Преимущества ООП .....	346
Инкапсуляция .....	346
Полиморфизм .....	349
Множественное использование и наследование .....	349
Парадигмы ООП .....	351
Управляющие объекты .....	351
Контролирующий объект .....	353
Итератор .....	354
Дружественный класс .....	356
Интерфейс .....	356
Фасад .....	357
Фабрика .....	357
Единственный объект .....	359
Сериализация .....	361
Парадигма Модель/Вид/Контроллер .....	364
Резюме .....	367

<b>Приложение 1. Архив примеров .....</b>	<b>368</b>
---	------------

Содержание архива с примерами .....	368
Аппаратные требования .....	368
Запуск примеров программ .....	368
Информация и поддержка пользователей .....	369

<b>Приложение 2. Список примеров программ .....</b>	<b>370</b>
---	------------

<b>Предметный указатель .....</b>	<b>373</b>
-----------------------------------	------------



## Введение

Программирование под Windows всегда было достаточно сложной задачей. Интерфейс прикладного программирования (Application Programming Interface – API) Windows предоставляет в ваше распоряжение набор мощных, но не всегда безопасных инструментов для разработки приложений. Эти инструменты в некотором смысле можно сравнить с огромной и тяжелой машиной, при помощи которой удастся добиться поразительных результатов, но если водитель неосторожен или не владеет соответствующими навыками, дело, скорее всего, закончится только разрушениями и убытками.

С появлением Delphi ситуация изменилась. С помощью интерфейса для быстрой разработки приложений (Rapid Application development – RAD) Delphi позволяет быстро и легко выполнять подобную работу. Используя Delphi, можно создавать и тестировать приложения со сложным пользовательским интерфейсом без прямого использования функций API. Освобождая программиста от проблем, связанных с применением API, Delphi позволяет сконцентрироваться непосредственно на приложении.

Несмотря на то, что Delphi упрощает создание пользовательского интерфейса, писать остальную часть приложения – код для обработки действий пользователя и отображения результатов – предоставляется программисту. И здесь потребуются алгоритмы.

Алгоритмы – это формальные команды, необходимые для выполнения на компьютере сложных задач. Например, с помощью алгоритма поиска можно найти конкретную информацию в базе данных, состоящей из 10 млн записей. В зависимости от качества используемых алгоритмов искомые данные могут быть обнаружены за секунды, часы или вообще не найдены.

В этой книге не только подробно рассказывается об алгоритмах, написанных на Delphi, но и приводится много готовых мощных алгоритмов. Здесь также анализируются методы управления структурами данных, такими как списки, стеки, очереди и деревья; описываются алгоритмы для выполнения типичных задач – сортировки, поиска и хеширования.

Для того чтобы успешно использовать алгоритмы, недостаточно просто скопировать код в свою программу и запустить ее на выполнение. Необходимо знать, как различные алгоритмы ведут себя в разных ситуациях. В конечном итоге именно эта информация определяет выбор наиболее подходящего варианта.

Книга написана на достаточно простом языке. Здесь рассматривается поведение алгоритмов как в типичных, так и наихудших случаях. Это позволит понять, чего вы вправе ожидать от определенного алгоритма, вовремя распознать возможные

трудности и при необходимости переписать или удалить алгоритм. Даже самый лучший алгоритм не поможет в решении задачи, если использовать его неправильно.

Все алгоритмы представлены в виде исходных текстов на Delphi, которые вы можете включать в свои программы без каких-либо изменений. Тексты кода и примеры приложений находятся на сайте издательства «ДМК Пресс» [www.dmkpress.ru](http://www.dmkpress.ru). Они демонстрируют характерные особенности работы алгоритмов и их использование в различных программах.

## Назначение книги

Данная книга содержит следующий материал:

- *полное введение в теорию алгоритмов*. После прочтения книги и выполнения приведенных примеров вы сможете использовать сложные алгоритмы в своих проектах и критически оценивать новые алгоритмы, написанные вами или кем-то еще;
- *большую подборку исходных текстов*. С помощью текстов программ, имеющих на сайте издательства «ДМК Пресс», вы сможете быстро добавить готовые алгоритмы в свои приложения;
- *готовые примеры программ* позволят вам проверить алгоритмы. Работая с этими примерами, изменяя и совершенствуя их, вы лучше изучите принцип работы алгоритмов. Кроме того, вы можете использовать их как основу для создания собственных приложений.

## Читательская аудитория

Книга посвящена профессиональному программированию в Delphi. Она не предназначена для обучения. Хорошее знание основ Delphi позволит вам сконцентрировать внимание на алгоритмах вместо того, чтобы погружаться в детали самого языка.

Здесь изложены важные принципы программирования, которые могут с успехом применяться для решения многих практических задач. Представленные алгоритмы используют мощные программные методы, такие как рекурсия, разбиение на части, динамическое распределение памяти, а также сетевые структуры данных, что поможет вам создавать гибкие и сложные приложения.

Даже если вы еще не овладели Delphi, вы сможете выполнить примеры программ и сравнить производительность различных алгоритмов. Более того, любой из приведенных алгоритмов будет нетрудно добавить к вашим проектам.

## Совместимость версий Delphi

Выбор наилучшего алгоритма зависит от основных принципов программирования, а не от особенностей конкретной версии языка. Тексты программ в этой книге были проверены с помощью Delphi 3, 4 и 5, но благодаря универсальности свойств языка они должны успешно работать и в более поздних версиях Delphi.

Языки программирования, как правило, развиваются в сторону усложнения и очень редко в противоположном направлении. Яркий тому пример – оператор `goto` в языке C. Этот неудобный оператор является потенциальным источником ошибок, он почти не используется большинством программистов на C, но сохранился в синтаксисе языка еще с 70-х годов. Оператор даже был встроен в C++ и позднее в Java, хотя создание нового языка было хорошим предлогом избавиться от ненужного наследия.

Аналогично в старших версиях Delphi наверняка появятся новые свойства, но вряд ли исчезнут стандартные блоки, необходимые для реализации алгоритмов, описанных в этой книге. Независимо от того, что добавлено в 4-й, 5-й, и будет добавлено в 6-й версии Delphi, классы, массивы, и определяемые пользователем типы данных останутся в языке. Большая часть, а может быть, и все алгоритмы из этой книги не будут изменяться еще в течение многих лет. Если вам понадобится обновить алгоритмы, то их можно будет найти на сайте [www.vb-helper.com/da.htm](http://www.vb-helper.com/da.htm).

## Содержание глав

В **главе 1** рассматриваются те основы, которые вам необходимо изучить, прежде чем приступить к анализу сложных алгоритмов. Здесь описываются методы анализа вычислительной сложности алгоритмов. Некоторые алгоритмы, теоретически обеспечивающие высокую производительность, в реальности дают не очень хорошие результаты. Поэтому в этой главе обсуждаются и практические вопросы, например, рассматривается обращение к файлу подкачки.

В **главе 2** рассказывается, как можно сформировать различные виды списков с помощью массивов и указателей. Эти структуры данных применяются во многих программах, что продемонстрировано в следующих главах книги. В главе 2 также показано, как обобщить методы, использованные для построения связанных списков, для создания других, более сложных структуры данных, например, деревьев и сетей.

В **главе 3** рассматриваются два специализированных вида списков – стеки и очереди, использующиеся во многих алгоритмах (некоторые из них описываются в последующих главах). В качестве практического примера приведена модель, сравнивающая производительность двух типов очередей, которые могли бы использоваться в регистрационных пунктах аэропортов.

**Глава 4** посвящена специальным типам массивов. Треугольные, неправильные и разреженные массивы позволяют использовать удобные представления данных для экономии памяти.

В **главе 5** рассматривается мощный, но довольно сложный инструмент – рекурсия. Здесь рассказывается, в каких случаях можно использовать рекурсию и как ее можно при необходимости удалить.

В **главе 6** многие из представленных выше алгоритмов, такие как рекурсия и связанные списки, используются для изучения более сложного вопроса – деревьев. Рассматриваются различные представления деревьев – с помощью полных узлов и нумерации связей. Здесь содержатся также некоторые важные алгоритмы, например, обход узлов дерева.

В **главе 7** затронута более широкая тема. Сбалансированные деревья обладают некоторыми свойствами, которые позволяют им оставаться сбалансированными и эффективными. Алгоритмы сбалансированных деревьев просто описать, но довольно трудно реализовать в программе. В этой главе для построения сложной базы данных используется одна из наиболее мощных структур – Б+ дерево.

В **главе 8** рассматриваются алгоритмы, которые предназначены для поиска ответа в дереве решений. Даже при решении маленьких задач эти деревья могут быть поистине огромными, поэтому становится насущным вопрос эффективного поиска нужных элементов. В этой главе сравнивается несколько различных методов подобного поиска.

**Глава 9** посвящена наиболее сложному разделу теории алгоритмов. Алгоритмы сортировки интересны по нескольким причинам. Во-первых, сортировка – это общая задача программирования. Во-вторых, различные алгоритмы сортировки имеют свои достоинства и недостатки, и нет единого универсального алгоритма, который бы работал одинаково в любых ситуациях. И наконец, в алгоритмах сортировки используется множество разнообразных методов, таких как рекурсия, бинарные деревья, применение генератора случайных чисел, что уменьшает вероятность выпадения наихудшего случая.

**Глава 10** посвящена вопросам сортировки. Как только список отсортирован, программе может потребоваться найти в нем какой-либо элемент. В этой главе сравниваются наиболее эффективные методы поиска элементов в отсортированных списках.

В **главе 11** приводятся более быстрые, чем использование деревьев, способы сортировки и поиска, методы сохранения и размещения элементов. Здесь описывается несколько методов хеширования, включая использование блоков и связанных списков, а также некоторые типы открытой адресации.

В **главе 12** обсуждается другая категория алгоритмов – сетевая. Некоторые из подобных алгоритмов, например, вычисление кратчайшего пути, непосредственно применяются в физических сетях. Они могут косвенно использоваться для решения других проблем, которые на первый взгляд кажутся не относящимися к сетям. Например, алгоритм поиска кратчайшего пути может делить сеть на районы или находить критические точки в сетевом графике.

**Глава 13** посвящена объектно-ориентированным алгоритмам. В них используются объектно-ориентированные способы реализации нетипичного для традиционных алгоритмов поведения.

В **приложении 1** описывается содержание архива примеров, который находится на сайте издательства «ДМК Пресс» [www.dmkpress.ru](http://www.dmkpress.ru).

В **приложении 2** содержатся все программы примеров, имеющихся в архиве. Для того чтобы найти, какая из программ демонстрирует конкретные алгоритмические методы, достаточно обратиться к этому списку.

## Архив примеров

Архив примеров, который вы можете загрузить с сайта издательства «ДМК Пресс» [www.dmkpress.ru](http://www.dmkpress.ru), содержит исходный код в Delphi 3 для алгоритмов и примеров программ, описанных в книге.

Описанные в каждой главе примеры программ содержатся в отдельных подкаталогах. Например, программы, демонстрирующие алгоритмы, которые рассматриваются в главе 3, сохранены в каталоге \Ch3\. В приложении 2 перечисляются все приведенные в книге программы.

## Аппаратные требования

Для освоения примеров необходим компьютер, конфигурация которого удовлетворяет требованиям работы с Delphi, то есть почти каждый компьютер, работающий с любой версией Windows.

На компьютерах с различной конфигурацией алгоритмы выполняются с неодинаковой скоростью. Компьютер с процессором Pentium Pro с частотой 200 МГц и объемом оперативной памяти 64 Мб, безусловно, будет работать быстрее, чем компьютер на базе процессора Intel 386 и объемом памяти 4 Мб. Вы быстро определите предел возможностей ваших аппаратных средств.

## Как пользоваться этой книгой

В главе 1 дается базовый материал, поэтому необходимо начать именно с этой главы. Даже если вам уже известны все тонкости теории алгоритмов, все равно необходимо прочесть эту главу.

Следующими нужно изучить главы 2 и 3, поскольку в них рассматриваются различные виды списков, используемых программами в следующих главах книги.

В главе 6 обсуждаются понятия, которые используются затем в главах 7, 8, и 12. Перед тем как заняться изучением этих глав, вы должны ознакомиться с главой 6. Остальные главы можно читать в произвольном порядке.

В табл. 1 приведены три примерных плана работы с материалом. Вы можете выбрать один из них, руководствуясь тем, насколько глубоко вы хотите изучить алгоритмы. Первый план предполагает освоение основных методов и структур данных, которые вы можете успешно использовать в собственных программах. Второй план помимо этого включает в себя работу с фундаментальными алгоритмами, такими как алгоритмы сортировки и поиска, которые могут вам понадобиться для разработки более сложных программ.

Последний план определяет порядок изучения всей книги. Несмотря на то, что главы 7 и 8 по логике должны следовать за главой 6, она гораздо сложнее, чем более поздние главы, поэтому их рекомендуется прочесть позже. Главы 7, 12 и 13 наиболее трудные в книге, поэтому к ним лучше обратиться в последнюю очередь. Конечно, вы можете читать книгу и последовательно – от самой первой страницы до последней.

Таблица 1. Планы работы

Изучаемый материал	Главы											
Основные методы	1	2	3	4								
Базовые алгоритмы	1	2	3	4	5	6	9	10	13			
Углубленное изучение	1	2	3	4	5	6	9	10	11	8	12	7 13

## Обозначения, используемые в книге

В книге используются следующие шрифтовые выделения:

- *курсивом* помечены смысловые выделения в тексте;
- **полужирным шрифтом** выделяются названия элементов интерфейса: пунктов меню, пиктограмм и т.п.;
- моноширинным шрифтом выделены листинги (программный код).



# Глава 1. Основные понятия

В этой главе представлен базовый материал, который необходимо усвоить перед началом более серьезного изучения алгоритмов. Она открывается вопросом «Что такое алгоритмы?». Прежде чем погрузиться в детали программирования, стоит вернуться на несколько шагов назад для того, чтобы более четко определить для себя, что же подразумевается под этим понятием.

Далее приводится краткий обзор формальной *теории сложности алгоритмов* (complexity theory). При помощи этой теории можно оценить потенциальную вычислительную сложность алгоритмов. Такой подход позволяет сравнивать различные алгоритмы и предсказывать их производительность в различных условиях работы. В данной главе также приведено несколько примеров применения теории сложности для решения небольших задач.

Некоторые алгоритмы на практике работают не так хорошо, как предполагалось при их создании, поэтому в данной главе обсуждаются практические вопросы разработки программ. Чрезмерное разбиение памяти на страницы может сильно уменьшить производительность хорошего в остальных отношениях приложения.

Изучив основные понятия, вы сможете применять их ко всем алгоритмам, описанным в книге, а также для анализа собственных программ. Это позволит вам оценить производительность алгоритмов и предупреждать различные проблемы еще до того, как они приведут к катастрофе.

## Что такое алгоритмы

*Алгоритм* — это набор команд для выполнения определенной задачи. Если вы объясняете кому-то, как починить газонокосилку, вести автомобиль или испечь пирог, вы создаете алгоритм действий. Подобные ежедневные алгоритмы можно с некоторой точностью описать такого рода выражениями:

Проверьте, находится ли автомобиль на стоянке.  
Убедитесь, что он поставлен на ручной тормоз.  
Поверните ключ.  
И т. д.

Предполагается, что человек, следующий изложенным инструкциям, может самостоятельно выполнить множество мелких операций: отпереть и открыть двери, сесть за руль, пристегнуть ремень безопасности, найти ручной тормоз и т. д.

Если вы составляете алгоритм для компьютера, то должны все подробно описать заранее, в противном случае машина вас не поймет. Словарь компьютера (язык программирования) очень ограничен, и все команды должны быть сформулированы на доступном машине языке. Поэтому для написания компьютерных алгоритмов следует использовать более формализованный стиль.

Увлекательно писать формализованный алгоритм для решения какой-либо бытовой, ежедневной задачи. Например, алгоритм вождения автомобиля мог бы начинаться примерно так:

```
Если дверь заперта, то:  
Вставьте ключ в замок  
Поверните ключ  
Если дверь все еще заперта, то:  
Поверните ключ в другую сторону  
Потяните за ручку двери  
и т.д.
```

Эта часть кода описывает только открывание двери; здесь даже не проверяется, та ли дверь будет открыта. Если замок заклинило или автомобиль оснащен противовоугонной системой, алгоритм открывания двери может быть гораздо сложнее.

Алгоритмы были формализованы еще тысячи лет назад. Еще в 300 году до н.э. Евклид описал алгоритмы для деления углов пополам, проверки равенства треугольников и решения других геометрических задач. Он начал с небольшого словаря аксиом, таких как «параллельные линии никогда не пересекаются», и создал на их основе алгоритмы для решения более сложных задач.

Формализованные алгоритмы данного типа хорошо подходят для решения математических задач, где нужно доказать истинность каких-либо положений или возможность каких-нибудь действий, при этом скорость алгоритма не имеет значения. При решении реальных задач, где необходимо выполнить некоторые инструкции, например сортировку на компьютере записей о миллионе покупателей, эффективность алгоритма становится критерием оценки алгоритма.

## Анализ скорости выполнения алгоритмов

Теория сложности изучает сложность алгоритмов. Существует несколько способов измерения сложности алгоритма. Программисты обычно сосредотачивают внимание на скорости алгоритма, но не менее важны и другие показатели – требования к объему памяти, свободному месту на диске. Использование быстрого алгоритма не приведет к ожидаемым результатам, если для его работы понадобится больше памяти, чем есть у вашего компьютера.

### **Память или время**

Многие алгоритмы предлагают выбор между объемом памяти и скоростью. Задачу можно решить быстро, используя большой объем памяти, или медленнее, занимая меньший объем.

Типичным примером в данном случае служит алгоритм поиска кратчайшего пути. Представив карту города в виде сети, можно написать алгоритм для определения кратчайшего расстояния между любыми двумя точками в этой сети. Чтобы не вычислять эти расстояния всякий раз, когда они вам нужны, вы можете вывести кратчайшие расстояния между всеми точками и сохранить результаты в таблице. Когда вам понадобится узнать кратчайшее расстояние между двумя заданными точками, вы можете взять готовое значение из таблицы.

Результат будет получен практически мгновенно, но это потребует огромного объема памяти. Карта улиц большого города, такого как Бостон или Денвер, может содержать несколько сотен тысяч точек. Таблица, хранящая всю информацию о кратчайших расстояниях, должна иметь более 10 млрд ячеек. В этом случае выбор между временем исполнения и объемом требуемой памяти очевиден: используя дополнительные 10 Гб памяти, можно сделать выполнение программы более быстрым.

Из этой особенной зависимости между временем и памятью проистекает идея *объемо-временной сложности*. При таком способе анализа алгоритм оценивается как с точки зрения скорости, так и с точки зрения используемой памяти. Таким образом находится компромисс между этими двумя показателями.

В данной книге основное внимание уделяется временной сложности, но также указываются и некоторые особые требования к объемам памяти для некоторых алгоритмов. Например, *сортировка слиянием* (mergesort), рассматриваемая в главе 9, требует очень больших объемов оперативной памяти. Для других алгоритмов, например *пирамидальной сортировки* (heapsort), которая также описывается в главе 9, достаточно обычного объема памяти.

### Оценка с точностью до порядка

При сравнении различных алгоритмов важно понимать, как их сложность зависит от сложности решаемой задачи. При расчетах по одному алгоритму сортировка тысячи чисел занимает 1 с, сортировка миллиона чисел – 10 с, в то время как на те же расчеты по другому алгоритму уходит 2 с и 5 с соответственно. В подобных случаях нельзя однозначно сказать, какая из этих программ лучше. Скорость обработки зависит от вида сортируемых данных.

Хотя интересно иметь представление о точной скорости каждого алгоритма, но важнее знать различие производительности алгоритмов при выполнении задач различной сложности. В приведенном примере первый алгоритм быстрее сортирует короткие списки, а второй – длинные.

Скорость алгоритма можно оценить по порядку величины. Алгоритм имеет сложность  $O(f(N))$  (произносится «О большое от F от N»), функция  $F$  от  $N$ , если с увеличением размерности исходных данных  $N$  время выполнения алгоритма возрастает с той же скоростью, что и функция  $f(N)$ . Например, рассмотрим следующий код, который сортирует  $N$  положительных чисел:

```
for i := 1 to N do
begin
    // Нахождение максимального элемента списка.
    MaxValue := 0;
    for j := 1 to N do
        if (Value[j]>MaxValue) then
            begin
                MaxValue := Value[j];
                MaxJ := j;
            end;
end;
```

```
// Печать найденного максимального элемента.  
PrintValue(MaxValue);  
// Обнуление элемента для исключения его из дальнейшего поиска.  
Value[MaxJ] := 0;  
end;
```

В этом алгоритме переменная  $i$  последовательно принимает значения от 1 до  $N$ . При каждом изменении  $i$  переменная  $j$  также изменяется от 1 до  $N$ . Во время каждой из  $N$ -итераций внешнего цикла внутренний цикл выполняется  $N$  раз. Общее количество итераций внутреннего цикла равно  $N * N$  или  $N^2$ . Это определяет сложность алгоритма  $O(N^2)$  (пропорциональна  $N^2$ ).

Оценивая порядок сложности алгоритма, необходимо использовать только ту часть уравнения рабочего цикла, которая возрастает быстрее всего. Предположим, что рабочий цикл алгоритма представлен формулой  $N^3 + N$ . В таком случае его сложность будет равна  $O(N^3)$ . Рассмотрение быстро растущей части функции позволяет оценить поведение алгоритма при увеличении  $N$ .

При больших значениях  $N$  для процедуры с рабочим циклом  $N^3 + N$  первая часть уравнения доминирует и вся функция сравнима со значением  $N^3$ . Если  $N = 100$ , то разница между  $N^3 + N = 1\,000\,100$  и  $N^3 = 1\,000\,000$  равна всего лишь 100, что составляет 0,01%. Обратите внимание на то, что это утверждение истинно только для больших  $N$ . При  $N = 2$  разница между  $N^3 + N = 10$  и  $N^3 = 8$  равна 2, что составляет уже 20%.

При вычислении значений «большого  $O$ » можно не учитывать постоянные множители в выражениях. Алгоритм с рабочим циклом  $3 * N^2$  рассматривается как  $O(N^2)$ . Таким образом, зависимость отношения  $O(N)$  от изменения размера задачи более очевидна. Если увеличить  $N$  в 2 раза, эта двойка возводится в квадрат ( $N^2$ ) и время выполнения алгоритма увеличивается в 4 раза.

Игнорирование постоянных множителей также облегчает подсчет шагов выполнения алгоритма. В приведенном ранее примере внутренний цикл выполняется  $N^2$  раз. Сколько шагов делает каждый внутренний цикл? Чтобы ответить на этот вопрос, вы можете вычислить количество условных операторов `if`, потому что только этот оператор выполняется в цикле каждый раз. Можно сосчитать общее количество инструкций внутри условного оператора `if`. Кроме того, внутри внешнего цикла есть инструкции, не входящие во внутренний цикл, такие как команда `PrintValue`. Нужно ли считать и их?

С помощью различных методов подсчета можно определить, какую сложность имеет алгоритм  $N^2$ ,  $3 * N^2$ , или  $3 * N^2 + N$ . Оценка сложности алгоритма по порядку величины даст одно и то же значение  $O(N^2)$ , поэтому неважно, сколько точно шагов имеет алгоритм.

## Определение сложности

Наиболее сложными частями программы обычно является выполнение циклов и вызовов процедур. В предыдущем примере весь алгоритм выполнен с помощью двух циклов.

Если одна процедура вызывает другую, то необходимо более тщательно оценить сложность последней. Если в ней выполняется определенное число инструкций,

например, вывод на печать, то на оценку порядка сложности она практически не влияет. С другой стороны, если в вызываемой процедуре выполняется  $O(N)$  шагов, то функция может значительно усложнять алгоритм. Если процедура вызывается внутри цикла, то влияние может быть намного больше.

В качестве примера возьмем программу, содержащую медленную процедуру *Slow* со сложностью порядка  $O(N^3)$  и быструю процедуру *Fast* со сложностью порядка  $O(N^2)$ . Сложность всей программы зависит от соотношения между этими двумя процедурами.

Если при выполнении циклов процедуры *Fast* всякий раз вызывается процедура *Slow*, то сложности процедур перемножаются. Общая сложность равна произведению обеих сложностей. В данном случае сложность алгоритма составляет  $O(N^2) * O(N^3)$  или  $O(N^3 * N^2) = O(N^5)$ . Приведем соответствующий фрагмент кода:

```
procedure Slow;
var
  i, j, k : Integer;
begin
  for i := 1 to N do
    for j := 1 to N do
      for k := 1 to N do
        // Выполнение каких-либо действий.
      end;
    end;
  end;

procedure Fast;
var
  i, j : Integer;
begin
  for i := 1 to N do
    for j := 1 to N do
      Slow; // Вызов процедуры Slow.
    end;
  end;

procedure RunBoth;
begin
  Fast;
end;
```

С другой стороны, если основная программа вызывает процедуры отдельно, их вычислительная сложность складывается. В этом случае итоговая сложность по порядку величины равна  $O(N^3) + O(N^2) = O(N^3)$ . Следующий фрагмент кода имеет именно такую сложность:

```
procedure Slow;
var
  i, j, k : Integer;
begin
  for i := 1 to N do
    for j := 1 to N do
      for k := 1 to N do
        // Выполнение каких-либо действий.
      end;
    end;
  end;
```

```
procedure Fast;
var
  i, j : Integer;
begin
  for i := 1 to N do
    for j := 1 to N do
      // Выполнение каких-либо действий.
    end;
  end;

procedure RunBoth;
begin
  Fast;
  Slow;
end;
```

### Сложность рекурсивных алгоритмов

*Рекурсивные процедуры* (recursive procedure) – это процедуры, которые вызывают сами себя. Их сложность определяется очень тонким способом. Сложность многих рекурсивных алгоритмов зависит именно от количества итераций рекурсии. Рекурсивная процедура может казаться достаточно простой, но она может очень серьезно усложнять программу, многократно вызывая саму себя.

Следующий фрагмент кода описывает процедуру, которая содержит только две операции. Тем не менее, если задается число  $N$ , то эта процедура выполняется  $N$  раз. Таким образом, вычислительная сложность данного алгоритма равна  $O(N)$ .

```
procedure CountDown(N : Integer);
begin
  if (N<=0) then exit;
  CountDown(N-1);
end;
```

### Множественная рекурсия

Рекурсивный алгоритм, вызывающий себя несколько раз, называется *множественной рекурсией* (multiple recursion). Процедуры множественной рекурсии сложнее анализировать, чем однократные алгоритмы, кроме того, они могут сделать алгоритм гораздо сложнее.

Следующая процедура аналогична процедуре CountDown, только она вызывает саму себя дважды.

```
procedure DoubleCountDown(N : Integer);
begin
  if (N<=0) then exit;
  DoubleCountDown(N-1);
  DoubleCountDown(N-1);
end;
```

Поскольку процедура вызывается дважды, можно было бы предположить, что ее рабочий цикл будет вдвое больше, чем цикл процедуры CountDown. При этом

сложность была бы равна  $2 * O(N) = O(N)$ . В действительности ситуация гораздо сложнее.

Если количество итераций процедуры при входном значении  $N$  равно  $T(N)$ , то легко заметить, что  $T(0)$  равно 1. Если процедура вызывается с параметром 0, то программа просто закончит свою работу с первого шага.

Для больших значений  $N$  процедура запускается дважды с параметром  $N - 1$ . Количество ее итераций при этом равно  $1 + 2 * T(N - 1)$ . В табл. 1.1 приведены некоторые значения сложности алгоритма в соответствии с уравнениями  $T(0) = 1$  и  $T(N) = 1 + 2 * T(N - 1)$ . При внимательном рассмотрении этих значений можно заметить, что если  $T(N) = 2^{(N+1)} - 1$ , то рабочий цикл процедуры будет равен  $O(2^N)$ . Несмотря на то, что процедуры `CountDown` и `DoubleCountDown` выглядят почти одинаково, `DoubleCountDown` выполняется гораздо дольше.

Таблица 1.1. Значения длительности рабочего цикла для процедуры `DoubleCountDown`

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T(N)	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047

### Косвенная рекурсия

Рекурсивная процедура может выполняться косвенно, вызывая вторую процедуру, которая, в свою очередь, вызывает первую. *Косвенную рекурсию* даже сложнее анализировать, чем многократную. Алгоритм кривых Серпинского, рассматриваемый в главе 5, включает в себя четыре процедуры, которые являются одновременно и многократной и косвенной рекурсией. Каждая из этих процедур вызывает себя и три другие процедуры до четырех раз. Такой значительный объем работы выполняется в течение времени  $O(4^N)$ .

### Объемная сложность рекурсивных алгоритмов

Для некоторых рекурсивных алгоритмов особенно важна *объемная сложность*. Очень просто написать рекурсивный алгоритм, который запрашивает небольшой объем памяти при каждом вызове. Объем занятой памяти может увеличиваться в процессе последовательных рекурсивных вызовов. По этой причине необходимо провести хотя бы поверхностный анализ объемной сложности рекурсивных процедур, чтобы убедиться, что программа не исчерпает при выполнении все доступные ресурсы.

Следующая процедура выделяет больше памяти при каждом вызове. После 100 или 200 рекурсивных обращений процедура займет всю свободную память компьютера, и программа аварийно остановится, выдав сообщение об ошибке `Out of Memory` (Недостаточно памяти).

```
procedure GobbleMemory;
var
    x : Pointer;
begin
```

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно  
в интернет-магазине «Электронный универс»  
([e-Univers.ru](http://e-Univers.ru))