Содержание

Введение

Знание математики становится обязательным для всех направлений научной и практической деятельности специалиста, а математическая подготовка - неотъемлемой и очень важной составной частью профессиональной компетентности специалиста.

Предлагаемая работа является учебно-методическим пособием по решению профессионально-ориентированных задач по линейной алгебре и аналитической геометрии для студентов вузов, в учебные планы которых включена дисциплина «Линейная алгебра».

Каждый раздел содержит теоретические сведения по математике, необходимые для решения задач, примеры решения задач, а также задания для самостоятельного решения. Значительная часть задач направлена на глубокое усвоение основных математических понятий, а также закрепление умений и навыков решения стандартных математических задач. Данные задачи призваны сформировать у студентов понимание роли математики в будущей профессиональной деятельности и личностный смысл ее изучения.

РАЗДЕЛ 1. МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы, операции над матрицами

Прямоугольной матрицей размера m×n называется совокупность m×n чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов. Мы будем записывать матрицу в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots \; a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно в виде $A = (a_{ij})$ $\quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

$$\textit{Пример:}\ A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix};\quad \begin{matrix} m=2 \\ n=3 \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -7 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad m=n=3$$

Числа a_{ij}, составляющие данную матрицу, называются ее элементами; первый индекс указывает на номер строки, второй - на номер столбца.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называются ***равными***, если попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах, то есть $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$.

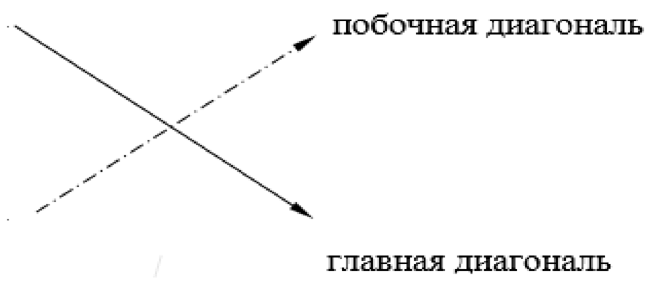
Матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется соответственно ***вектор-строкой*** или ***вектор-столбцом***.

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Матрица размера mn, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой матрицей*** и обозначается через 0.

Элементы матрицы с одинаковыми индексами называют ***элементами главной диагонали***.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



Диагональ, идущая от правого верхнего элемента к левому нижнему, называется *побочной диагональю матрицы*

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то есть m = n, то матрицу называют ***квадратной*** порядка n.

Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называются ***диагональными матрицами*** и записываются так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если все элементы a_{ii} диагональной матрицы равны 1, то матрица называется ***единичной*** и обозначается буквой E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

верхняя треугольная матрица — нижняя треугольная матрица

Транспонированием называется такое преобразование матрицы, при котором строки и столбцы меняются местами с сохранением их номеров. Обозначается транспонирование значком Т наверху.

Если в матрице переставить строки со столбцами. Получим матрицу:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая будет ***транспонированно***й по отношению к матрице А.

Пример: $A=\begin{pmatrix}2 & -7 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -7 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

В частности, при транспонировании вектора-столбца получается вектор-строка и наоборот.

Произведением матрицы А на число k называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы А умножением на число k:

$$k\cdot A=(k\cdot a_{ij}).$$

***Пример**:* $-3\bullet\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -6 & -9\\ 9 & 0 & -21\end{pmatrix}$

Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одного размера называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера, элементы которой определяются по формуле $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

***Пример**:* $\underset{2\times3}{\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}}+\underset{2\times3}{\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}}=\underset{2\times3}{\begin{pmatrix}-1 & 5 & 1\\ 3 & 5 & 5\end{pmatrix}}$

Произведением двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{jk})$, где $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$, заданных в определенном порядке АВ, называется матрица $C=(c_{ik})$, элементы которой определяются по следующему правилу:

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{im}\cdot b_{mk}=\sum_{s=1}^{m}a_{is}\cdot b_{sk}.$$

Иначе говоря, элементы матрицы-произведения определяются следующим образом: элемент *i*-й строки и *k*-го столбца матрицы С равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы А на соответствующие элементы *k*-го столбца матрицы В.

Произведение А·В матрицы А на матрицу В определяется в предположении, что число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.

Если $\underset{2\times2}{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$; $\underset{2\times3}{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}$, то

$$C = A \bullet B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Имеем: матрица А размера 2x3, матрица В размера 3x3, тогда произведение А·В = С существует и элементы матрицы С равны:

$$c_{11} = 1\times1 + 2\times2 + 1\times3 = 8,$$

$$c_{21} = 3\times1 + 1\times2 + 0\times3 = 5,$$

$$c_{12} = 1\times2 + 2\times0 + 1\times5 = 7,$$

$$c_{22} = 3\times2 + 1\times0 + 0\times5 = 6,$$

$$c_{13} = 1\times3 + 2\times1 + 1\times4 = 9,$$

$$c_{23} = 3\times3 + 1\times1 + 0\times4 = 10.$$

$AB = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$, а произведение В·А не существует.

1.2. Определитель матрицы и его свойства

Определитель матрицы или **детерминант матрицы** - это одна из основных численных характеристик квадратной матрицы, применяемая при решении многих задач.

Обозначение Определитель матрицы А обычно обозначается det(A), |A|, или Δ(A).

***Свойства определителей*:**

1. Определитель единичной матрицы равен единице: det(E) = 1
2. Определитель матрицы с двумя равными строками (столбцами) равен нулю.
3. Определитель матрицы с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.
4. Определитель матрицы, содержащий нулевую строку (столбец), равен нулю.
5. Определитель матрицы равен нулю если две (или несколько) строк (столбцов) матрицы линейно зависимы.

6. При транспонировании значение определителя матрицы не меняется: $\det(A) = \det(A^T)$
7. Определитель обратной матрицы: $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
8. Определитель матрицы не изменится, если к какой-то его строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на некоторое число.
9. Определитель матрицы не изменится, если к какой-то его строке (столбцу) прибавить линейную комбинации других строк (столбцов).
10. Если поменять местами две строки (столбца) матрицы, то определитель матрицы поменяет знак.
11. Общий множитель в строке (столбце) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k\cdot a_{i1} & k\cdot a_{i2} & \cdots & k\cdot a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

12. Если квадратная матрица n-ого порядка умножается на некоторое ненулевое число, то определитель полученной матрицы равен произведению определителя исходной матрицы на это число в n-той степени:
$B = k\cdot A \implies \det(B) = k^n\cdot\det(A)$ где A матрица $n\times n$, k - число.
13. Если каждый элемент в какой-то строке определителя равен сумме двух слагаемых, то исходный определитель равен сумме двух определителей, в которых вместо этой строки стоят первые и вторые слагаемые соответственно, а остальные строки совпадают с исходным определителем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

14. Определитель верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению его диагональных элементов.

15. Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц: $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

Методы вычисления определителя матрицы

Вычисление определителя матрицы 1×1

Правило: Для матрицы первого порядка значение определителя равно значению элемента этой матрицы:

$\Delta = |a_{11}| = a_{11}$

Вычисление определителя матрицы 2×2

Правило: Для матрицы 2×2 значение определителя равно разности произведений элементов главной и побочной диагоналей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Например: Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 -(-2)\cdot 4 = 18 + 8 = 26$

Числа, составляющие определитель называются его ***элементами***. Определитель второго порядка имеет две строки и два столбца.

Вычисление определителя матрицы 3×3

Правило: Для матрицы 3×3 значение определителя равно сумме произведений элементов главной диагонали и произведений элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной главной диагонали, от которой вычитается произведение элементов побочной диагонали и произведение элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - (a_{13}a_{22}a_{31}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{12}a_{21}).$$

Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 3+3\cdot 1\cdot 1+4\cdot 2\cdot 5 - (1\cdot(-2)\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 5) = -12+3+40 - (-8+4+45) = 31-41= - 10$$

Правило Саррюса для вычисления определителя матрицы 3-его порядка

Правило: Справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком «плюс»; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком «минус»:

$$\Delta = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Вычисление определителя матрицы произвольного размера

Разложение определителя по строке или столбцу

Правило: Определитель матрицы равен сумме произведений элементов строки определителя на их <u>алгебраические дополнения</u>:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad - \text{разложение по } i - \text{той строке}$$

Правило: Определитель матрицы равен сумме произведений элементов столбца определителя на их алгебраические дополнения:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad - \text{разложение по } j - \text{тому столбцу}$$

При разложение определителя матрицы обычно выбирают ту строку/столбец, в которой/ом максимальное количество нулевых элементов.

Алгебраическое дополнение A_{ij} есть минор M_{ij} , умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания i строки j столбца, т.е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Минор M_{ij} есть определитель порядка на единицу ниже исходного.

Например, в определителе, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ Минором к элементу 4 является M_{13}=

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = = 10+2=12.$$

Например: Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

Разложим определитель по элементам второго столбца. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$

$$=-3\cdot A_{12} + 5\cdot A_{22} + 1\cdot A_{32} = -3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} +(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$=-3\cdot(-1)\cdot(-3+16)+5\cdot(-6-4) – (-8 – 1) = 3\cdot 13+5\cdot(-10) +9 = 48 – 50 = -2.$$

Приведение определителя к треугольному виду

Правило: Используя свойства определителя для элементарных преобразований над строками и столбцами 8 - 11, определитель приводится к треугольному виду, и тогда его значение будет равно произведению элементов стоящих на главной диагонали.

Пример: Найти определитель матрицы А приведением его к треугольному виду

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Сначала получим нули в первом столбце под главной диагональю. Для этого отнимем от 3-тей строки 1-ую строку, а от 4-той строки 1-ую строку помноженную на 2:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 - 2 & 1 - 4 & 1 - 1 & 3 - 1 \\ 4 - 2 \cdot 2 & 0 - 2 \cdot 4 & 2 - 2 \cdot 1 & 3 - 2 \cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Получим нули во втором столбце под главной диагональю. Для этого поменяем местами 2-ой и 3-тий столбцы:

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

Получим нули во третьем столбце под главной диагональю. Для этого к 3-ему столбцу добавим 4-тий столбец умноженный на 8:

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 + 8 \cdot 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 + 8 \cdot 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot 13 \cdot 1 = -26$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3+8\cdot 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8+8\cdot 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 13 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Теорема Лапласа

Пусть Δ - определитель n-ого порядка. Выберем в нем произвольные k строк (столбцов), причем $k < n$. Тогда сумма произведений всех миноров k-ого порядка, которые содержатся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю.

1.3. Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим D =det A.

Квадратная матрица A называется ***невырожденной****,* или ***неособенной*****,** если ее определитель отличен от нуля, и ***вырожденной****,* или ***особенной***, если D = 0.

Квадратная матрица B называется ***обратной*** для квадратной матрицы A того же порядка, если их произведение A B = B A = E, где E - единичная матрица того же порядка, что и матрицы A и B.

Теорема. Для того, чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Матрица, обратная матрице A, обозначается через A^{-1}, так что $B = A^{-1}$. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Вычисление обратной матрицы по формуле для матриц высокого порядка очень трудоемко, поэтому на практике бывает удобно находить обратную матрицу с помощью метода элементарных преобразований (ЭП). Любую неособенную матрицу А путем ЭП только столбцов (или только строк) можно привести к единичной матрице Е.

Если совершенные над матрицей А ЭП в том же порядке применить к единичной матрице Е, то в результате получится обратная матрица.

Удобно совершать ЭП над матрицами А и Е одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту. Отметим еще раз, что при отыскании канонического вида матрицы с целью нахождения ее ранга можно пользоваться преобразованиями строк и столбцов.

Если нужно найти обратную матрицу, в процессе преобразований следует использовать только строки или только столбцы.

Пример. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ найти обратную.

Решение. Находим сначала определитель матрицы А

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix} = 27 \neq 0,$$

значит, обратная матрица существует, и мы ее можем найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

где $A_{i\,j}$ (i,j=1,2,3) - алгебраические дополнения элементов $a_{i\,j}$ исходной матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix} = 2+4=6, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -(4+2) = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 4-1=3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} = -(-4-2) = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} = 4-1 = 3, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\1 & 2\end{vmatrix} = -(4+2) = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\1 & -2\end{vmatrix} = 4-1 = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\2 & -2\end{vmatrix} = -(-4-2) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\2 & 1\end{vmatrix} = 2+4 = 6,$$

откуда $$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix}6 & 6 & 3\\-6 & 3 & 6\\3 & -6 & 6\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\-2 & 1 & 2\\1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

1.4. Решения матричных уравнений

Типовое матричное уравнение состоит, как правило, из нескольких матриц и неизвестной матрицы X, которую предстоит найти. То есть, **решением матричного уравнения является матрица**.

На первом шаге уравнение приводится к одному из двух видов:

AX=B либо XA=B, где A,B- <u>известные</u> матрицы.

Примечание: *существует также третий вид:AXB=C, но в действительности он встречается крайне редко.*

На втором шаге необходимо выразить X или, выражаясь более академично, *разрешить уравнение относительно* X.

1) AX=B. Для того, чтобы разрешить данное уравнение относительно X умножим обе его части на A^{-1} **слева** (*здесь и далее предполагаем, что обратная матрица существует*):$A^{-1}AX=A^{-1}B$

!!! Внимание! *Произведение матриц не перестановочно, поэтому* ***критически важно****, с какой стороны проводить умножение.*

По свойству матричных операций: $A^{-1}A=E$, поэтому: $EX=A^{-1}B$

Единичную матрицу можно убрать: $X=A^{-1}B$

Чего и требовалось достичь. Матрица A^{-1} нам <u>не известна</u>.

2) XA=B. Умножаем обе части уравнения на A^{-1} **справа**: $XAA^{-1}=BA^{-1}$

Согласно свойству матричных операций $A^{-1}A=E$, получаем: $XE=BA^{-1}$

Единичную матрицу убираем: $X=BA^{-1}$

Готово. Матрица A^{-1} нам опять же не известна.

Таким образом, на втором шаге решение выражается в виде $X=BA^{-1}$ либо в виде $X=A^{-1}B$. Поскольку обратной матрицы мы не знаем, то **третий этап решения** будет состоять в её нахождении.

На заключительном четвёртом шаге выполняем матричное умножение $A^{-1}B$ или BA^{-1}, и, собственно, получаем ответ.

Например: решить матричное уравнение, выполнить проверку

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение: Уравнение уже имеет вид $AX = B$, поэтому никаких предварительных действий проводить не нужно.

Для разрешения уравнения относительно X умножим обе его части на A^{-1} **слева**:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$EX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Из условия известны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, однако, обратной матрицы A^{-1} мы не знаем.

Обратную матрицу найдем по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^T$, где A^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 7 = 24 - 14 = 10$$

$M = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

$A_* = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений.

$A_*^T = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Таким образом, обратная матрица: $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

На финише проводим матричное умножение и получаем решение:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8*4-7*6 & 8*8-7*2 \\ -2*4+3*6 & -2*8+3*2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -10 & 50 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Пример: решить матричное уравнение, выполнить проверку найденного решения $X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 24 & 14 & 11 \end{pmatrix}$

Решение: Уравнение имеет готовый вид XA=B , что позволяет сразу же заняться «иксом».

Для разрешения уравнения относительно X умножим обе его части на A^{-1} **справа**:

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$XE = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

При оформлении можно записать и короче: «Решение ищем в виде $X = BA^{-1}$».

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot (1-2) - 7 \cdot (1-2) + 6 \cdot (1-1) = -9 + 7 + 0 = -2$$

$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 8 & 12 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

$A_* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 8 & -12 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений.

$A_*^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Таким образом, обратная матрица: $A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Находим решение:

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 24 & 14 & 11 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 24 & 14 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+0\cdot 1-2\cdot 0 & 2\cdot(-1)+0\cdot 3-2\cdot(-2) & 2\cdot 8+0\cdot(-12)-2\cdot 2 \\ 18\cdot(-1)+12\cdot 1+9\cdot 0 & 18\cdot(-1)+12\cdot 3+9\cdot(-2) & 18\cdot 8+12\cdot(-12)+9\cdot 2 \\ 24\cdot(-1)+14\cdot 1+11\cdot 0 & 24\cdot(-1)+14\cdot 3+11\cdot(-2) & 24\cdot 8+14\cdot(-12)+11\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 12 \\ -6 & 0 & 18 \\ -10 & -4 & 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & -9 \\ 5 & 2 & -23 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & -9 \\ 5 & 2 & -23 \end{pmatrix}$

1.5. Ранг матрицы. Методы нахождения ранга матрицы

Определение. Рангом системы строк (столбцов) называется максимальное количество линейно независимых строк (столбцов) этой системы.

Определение. **Рангом матрицы** А называется ранг её системы строк или столбцов.

Обычно ранг матрицы А обозначается rank(A) или rang(A)

Ранг матрицы не изменится, если к ее строкам (столбцам) применить элементарные преобразования.

Ранг ступенчатой матрицы равен количеству её ненулевых строк.

Метод элементарных преобразований

Используя свойства матрицы связанные с ее рангом, получен метод расчета ранга наиболее часто использующийся на практике.

Метод 1.

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования над строками и столбцами матрицы.

Метод окаймления миноров

Теорема. **Ранг матрицы** равен наибольшему порядку не равного нулю минора.

Метод 2.

Если в матрице A найден ненулевой минор k-го порядка M. Рассмотрим все миноры (k + 1)-го порядка, включающие в себя (окаймляющие) минор M; если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. Если среди окаймляющих миноров найдется ненулевой, то вся процедура повторяется.

Пример: Вычислить ранг матрицы A, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение:

От 1-ой строки отнимем 2-ую умноженную на 2, от 4-той отнимем 2-ую умноженную на 2

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Поменяем местами строки

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

полученная матрица есть является ступенчатой, значит rank(A) = 3.

Ответ**:** rank(A) = 3.

1.6. Примеры решения задач с экономическим содержанием

Пример: Данные о производстве сельскохозяйственных продуктов трех видов – зерно, молоко, мясо (в условных единицах) в двух фермерских хозяйствах за 2007 и 2008 гг. приведены в виде матриц:

$$A_{2007} = \begin{pmatrix} 1340 & 357 & 205 \\ 1275 & 308 & 264 \end{pmatrix},\ A_{2008} = \begin{pmatrix} 1476 & 312 & 217 \\ 1245 & 308 & 285 \end{pmatrix}$$

Найти: а) объемы произведенной продукции за два года (2007 и 2008 гг.);

б) прирост объемов производства в 2008 году по сравнению с 2007 годом по видам продукции и фермерским хозяйствам;

в) матрицу среднегодового производства продуктов.

Пояснить экономический смысл элементов полученных матриц.

Решение: а) Объемы продукции за два года определяются суммой матриц:

$$B = A_{2007} + A_{2008} = \begin{pmatrix} 1340 & 357 & 205 \\ 1275 & 308 & 264 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1476 & 312 & 217 \\ 1245 & 308 & 285 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2816 & 669 & 422 \\ 2520 & 616 & 549 \end{pmatrix}$$

Поясним экономический смысл полученной матрицы.

Объемы продукции в первом фермерском хозяйстве составили 2816 у.е зерна,669у.е. молока и 422 у.е. мяса. Объемы продукции во

втором фермерском хозяйстве составили 2520 у.е зерна, 616 у.е. молока и 549 у.е. мяса.

б) Прирост объемов производства в 2008 году по сравнению с 2007 годом определяется разностью матриц:

$$C = A_{2008} - A_{2007} = \begin{pmatrix} 1476 & 312 & 217 \\ 1245 & 308 & 285 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1340 & 357 & 205 \\ 1275 & 308 & 264 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 136 & -45 & 12 \\ -30 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

Отрицательные элементы полученной матрицы показывают, что в данном фермерском хозяйстве объем производства продукта уменьшился, положительные – увеличился, нулевые – не изменился.

в) Матрицу среднегодового производства продуктов найдем как среднее арифметическое матриц A_{2007} и A_{2008}:

$$D = \frac{1}{2}(A_{2007} + A_{2008}) = \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2816 & 669 & 422 \\ 2520 & 616 & 549 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1408 & 334{,}5 & 211 \\ 1260 & 308 & 274{,}5 \end{pmatrix}$$

Поясним экономический смысл элементов полученной матрицы. Среднегодовое производство продуктов в первом фермерском хозяйстве составляет: зерна - 1408 у.е., молока – 344,5 у.е , мяса - 211 у.е.. Во втором фермерском хозяйстве среднегодовое производство продуктов составляет: зерна - 1260 у.е., молока - 308 у.е., мяса – 274,5 у.е.

1.7.Задания для самостоятельного решения

1. Найти сумму матриц:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Найти матрицу 2A + 3B, если

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. Найти произведение матриц.

3.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3.2. $A = \begin{pmatrix} 0 1 -1 \\ 1 3\ 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. Найти произведение матриц AB и BA:

4.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

5. Выполнить действия

5.1 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.2 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

6. Найдите матрицу $C = A^2 - BA$, если

6.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

6.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

6.4 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -5 & 6 & -7 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

6.5 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

6.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$