ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математическому анализу на I курсе РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие не является сборником задач в обычном смысле слова. Как явствует из его структуры, оно преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункту.

В п. I – «Опорный конспект» – приводятся основные теоретические сведения и формулы (разумеется, без доказательства), необходимые для решения задач. Иногда после формулировки определения или теоремы даются поясняющие примеры или некоторые комментарии, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий. Там, где это, возможно, дается геометрическая и физическая интерпретация математических понятий.

В п. II – «Вопросы для самопроверки» – содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют то или иное теоретическое положение. Назначение этого пункта – помочь студенту в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать ему возможность самому проконтролировать усвоение основных понятий. Предполагается, конечно, что основная работа над теоретическим материалом с проработкой доказательств теорем по учебнику или конспектам лекций. Однако для решения задач часто достаточно понимания сути теоремы (или формулы). Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этой сути. Из п. II преподаватель может черпать вопросы для проверки готовности студентов к практическому занятию по той или иной теме.

В п. III – «Примеры решения задач» – разобраны типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. При этом большое внимание уделяется обсуждению не только «технических приемов», но и различным «тонким местам», например, условиям применимости той или иной теоремы или формулы.

Назначение п. IV – «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» – определено его названием. При подборе упражнений были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники. В конце задачи дается ответ и указание.

Начало и конец решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Автор надеется, что данное пособие поможет студентам в овладении методами математического анализа, в их самостоятельной работе над предметом. Он также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Опорный конспект

1. *Первообразная функция и неопределенный интеграл*

Основная задача дифференцирования:

Дана функция $F(x)$. Найти $f(x) = F'(x)$.

Основная задача интегрирования:

Дана производная функции $f(x) = F'(x)$. Найти $F(x)$.
Интегрирование – операция, обратная дифференцированию.

Определение. Функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** или ***первообразной*** по отношению к функции $f(x)$ на некотором промежутке **X**, если

- функция $F(x)$ дифференцируема в каждой точке этого промежутка и
- ее производная $F'(x) = f(x)$ или, что есть то же самое $dF(x) = f(x)dx\ \forall x \in \mathbf{X}$.

Например, функция $\sin x$ на всей оси – первообразная для $\cos x$.

Таким образом, первая основная задача интегрального исчисления и будет заключаться в нахождении первообразной для заданной функции.

В связи с понятием первообразной сразу же возникают два вопроса:

1) для каких функций можно гарантировать существование первообразной функции?
2) сколько первообразных функций может иметь одна и та же функция?

Ответ на первый вопрос дается теоремой

Теорема 1 (о существовании первообразной функции). *Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке **X**, то на этом промежутке у нее существует первообразная.*

Ответ на второй вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на некотором промежутке, то формула*

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{1}$$

где C – любая постоянная, дает общий вид первообразных функций для функции $f(x)$.

Иными словами, здесь утверждается, что всякая функция вида (1) – первообразная для функции $f(x)$, и, обратно, всякая первообразная для функции $f(x)$ имеет вид (1) при надлежащем подборе постоянной.

Определение. Если функция $F(x)$ – первообразная для ции $f(x)$ на промежутке **X**, то множество функций $F(x) + \mathrm{C}$, где C – произвольная постоянная, называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ на этом промежутке.

Обозначение $\int f(x)dx$.

Таким образом, если f – некоторая функция, а F – ее первообразная функция (на каком-то промежутке), то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная величина.

Таким образом, обозначение интеграла $\int$ используется для того, чтобы записать общий вид первообразных функций.

- Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***,
- выражение $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***.

Например, $\int \cos x dx = \sin x + C$

Сама операция нахождения первообразной называется ***интегрированием*** функции.

Геометрически, в системе координат *Oxy*, график всех первообразных функций от данной функции $f(x)$ представляют семейство кривых, зависящее от одного параметра *C*, которые получаются одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси *Oy*.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Линейность интеграла

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx\,, C = const, C \neq 0.$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Следствие. Неопределенный интеграл от линейной комбинации конечного числа функций равен линейной комбинации неопределенных интегралов от этих функций

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \int f_k(x)dx,$$

где $a_k = const$ $(k \in \mathbf{N})$.

Вышеизложенные свойства позволяют сформулировать следующие ***два правила***.

1. Для получения неопределенного интеграла от данной ции $f(x)$ надо найти какую-либо первообразную функцию этой функции и прибавить к ней произвольную постоянную.
2. Признаком правильности результата интегрирования является выполнение условия – производная от результата интегрирования должна быть равна подынтегральной функции.

2. Непосредственное интегрирование

Будем рассматривать непосредственное интегрирование как совокупность простейших приемов интегрирования, владение которыми – необходимое условие умения интегрировать.

2.1. Таблица основных интегралов

Используя таблицу производных от простейших элементарных функций, мы можем составить таблицу некоторых простейших интегралов (в таблицу включены свойства). Все формулы из таблицы можно проверить путем дифференцирования согласно свойству 1, т.е. производная от правой части формулы всегда равна подынтегральной функции в левой части.

Правила интегрирования

$\boxed{\mathbf{A}}$ 1. $\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx$

2. $\int\big(f(x)\pm g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

3. $\int f(x)\,dx = \left\{\begin{matrix} x = u(t) \\ dx = u'(t)\,dt \end{matrix}\right\} = \int f\big(u(t)\big)\cdot u'(t)\,dt = \int f(u)\,du$.

4. $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Во всех формулах под u понимается независимая переменная, или произвольная функция любой независимой переменной, дифференцируемая в некотором промежутке.

Интегралы, помещенные в таблице, называются ***табличными***.

Каждая из формул этой таблицы справедлива в любом промежутке, содержащемся в области определения соответствующей подынтегральной функции.

Интегралы, определяющие степенную функцию, логарифмическую и показательную функции

$\boxed{\mathbf{B}}$ 1. $\int u^{\mu}du = \dfrac{u^{\mu+1}}{\mu+1} + C,\ \mu\neq -1,\ u>0$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C,\ u\neq 0$.

3. $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C,\ 0<a\neq 1$. 4. $\int e^{u}du = e^{u} + C$.

В ссылках на таблицу будет указана буква, соответствующая группе формул и номер формулы в ней.

Например,

$$B_4 \to \int e^{u}du = e^{u} + C.$$

Отметим некоторые частные случаи формулы B_1:

$$\int dx = x + C \quad (\mu = 0);$$

$\int dx$ означает интеграл с подынтегральной функцией, тождественно равной единице;

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C\ (\mu = 1);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C\ \left(\mu = \frac{1}{2}\right).$$

Упомянем еще и такую очевидную формулу:

$$\int 0 \cdot dx = C\,.$$

Вместо интеграла $\int \frac{dx}{x}$ пишут $\int \frac{1}{x} dx$ и, вообще,

$$\int \frac{dx}{g(x)} \text{ означает } \int \frac{1}{g(x)} dx.$$

Интегралы, определяющие тригонометрические функции

C 1. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

2. $\int \cos u\, du = \sin u + C\,.$

3. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C, u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

4. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C, u \neq n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

Интегралы, определяющие обратные тригонометрические функции и логарифм сложного вида

D 1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C, |u| < |a|$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C, -1 < u < 1.$$

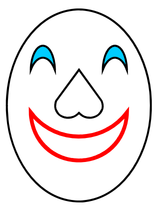
2. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C,$ $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C.$

3. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$

(для знака «–» должно быть $|u| > |a|$)

4. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C, |u| \neq a.$

ЗАПОМНИТЬ ТАБЛИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ



3. *Интегрирование заменой переменной*

Одним из основных приемов интегрирования функций является ***замена переменной*** (***метод подстановки***), который состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$, нахождение которого затруднительно, вводят новую переменную t, связанную с переменной x соотношением

$$x = \mathrm{g}(t),$$

где $\mathrm{g}(t)$ – непрерывная строго монотонная функция, имеющая непрерывную производную $\mathrm{g}'(t)$ на некотором интервале изменения t, после чего получают

$$\int f(x)dx = \int f(\mathrm{g}(t))\mathrm{g}'(t)dt.$$

Отметим, что при замене $x = \mathrm{g}(t)$ должно осуществляться взаимно однозначное соответствие между областями определения ций $\mathrm{g}(t)$ и $f(x)$, такое, чтобы функция $\mathrm{g}(t)$ принимала все значения x.

Два способа замены переменной

Переменную интегрирования в неопределенном интеграле можно заменить любой непрерывной функцией:

$$\int f(x)dx = \left\{\begin{matrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{matrix}\right\} = \int f(g(t))g'(t)dt. \qquad \text{(I)}$$

Формула (I) определяет собой два способа замены переменной. При чтении формулы слева направо получается способ I:

$$x = g(t),\ dx = g'(t)dt.$$

Если $\int f(\mathrm{g})\mathrm{g}'(t)dt$ будет проще, чем интеграл $\int f(x)dx$, то эта замена переменной целесообразна. В результате интегрирования получится функция независимой переменной t.

При чтении справа налево получается способ II:

$$\int f(g)\cdot g'(t)dt = \left\{\begin{matrix} g(t) = x \\ g'(t)dt = dx \end{matrix}\right\} = \int f(x)dx.$$

Если последний интеграл проще первого, то замена переменной целесообразна.

<u>СПОСОБ I</u>

$$\boxed{\int f(x)dx = \begin{Bmatrix} x = g(t), \\ dx = g'(t)dt \end{Bmatrix} = \int f\left(g(t)\right)\cdot g'(t)dt.}$$

Цель подстановки будет достигнута, если окажется, что вычисление этого интеграла проще, чем исходного. В результате интегрирования получится функция независимой переменной t. Чтобы возвратиться к переменной x, надо из уравнения $x = \mathrm{g}(t)$ определить t через x и подставить это значение вместо t в найденную функцию.

Общего правила, которое указывало бы, как выбрать цию $\mathrm{g}(t)$, не существует. Умение выбрать эту функцию достигается опытом. Однако для многих типов интегралов подстановка известна и нами будет в соответствующих местах указана. Обратим внимание читателя на то, что, пользуясь подстановкой $x = \mathrm{g}(t)$, надо найти множитель dx.

Заметим также, что функция $\mathrm{g}(t)$ должна иметь обратную функцию. Это необходимо для того, чтобы из подстановки $x = \mathrm{g}(t)$ можно было определить t как функцию x.

СПОСОБ II

$$\boxed{\int f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)dx = \left\{g(x) = t,\ g'(x)dx = dt\right\} = \int f(t)dt.}$$

Эта подстановка отличается от предыдущей подстановки тем, что в **способе I** сама независимая переменная заменялась новой ей $\mathrm{g}(t)$, а здесь не независимая переменная x, а ее функция $\mathrm{g}(x)$ заменяется новой переменной t. Для того чтобы возвратиться к переменной x, надо подставить в полученную функцию из $\mathrm{g}(x) = t$ вместо t.

И здесь умение выбрать функцию $\mathrm{g}(x)$ так, чтобы вычисление интеграла упростилось, достигается большим числом упражнений.

4. Интегрирование по частям

Интегрирование по частям основано на применении формулы

$$\boxed{\int U\,dV = UV - \int VdU,} \qquad (4.1)$$

где $U = u(x), V = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые на некотором интервале функции.

Формула (4.1) называется ***формулой интегрирования по частям***. Она дает возможность свести нахождение интеграла $\int UdV$ к отысканию интеграла $\int VdU$, который во многих случаях оказывается более простым.

Для применения формулы интегрирования по частям к некоторому интегралу $\int f(x)dx$ следует:

1. ***Подынтегральное выражение*** $f(x)dx$ ***представить в виде произведения двух сомножителей*** U и dV.
2. ***По установленному выражению*** U ***надо дифференцированием найти*** dU.
3. ***По известному сомножителю*** dV ***определить интегрированием функцию*** V.

Таким образом, для применения формулы (4.1) потребуется выполнить

- одно дифференцирование для определения dU и
- одно интегрирование для определения V.
- За dV всегда выбирается такое выражение, ***содержащее*** dx, из которого посредством интегрирования можно найти V.
- За U в большинстве случаев принимается функция, которая при дифференцировании упрощается.

Полезно запомнить следующие 6 типов интегралов, вычислять которые удобно интегрированием по частям:

$$\text{I.}\int P_n(x)\cdot e^{ax}dx,\ \text{II.}\int P_n(x)\cdot\sin bx\,dx,\ \text{III.}\int P_n(x)\cdot\cos bx\,dx,$$

$$\text{IV.}\int P_n(x)\ln ax\,dx,\ \text{V.}\int P_n(x)\arcsin ax\,dx\ \left(\int P_n(x)\arccos ax\,dx\right),$$

$$\text{VI.}\int P_n(x)\operatorname{arctg} ax\,dx\ \left(\int P_n(x)\operatorname{arcctg} ax\,dx\right).$$

Здесь $P_n(x)$ – многочлен, a, b – постоянные множители.

Для вычисления интегралов I, II, III полагаем:

- $U = P_n(x)$;
- за dV принимается вся остальная часть подынтегрального выражения.

4.1. Интегралы, для вычисления которых интегрирование по частям применяется несколько раз

Для вычисления интегралов I, II, III применяем формулу интегрирования по частям (4.1), полагая $U = P_n(x)$.

Этот прием дает возможность постепенно понижать степень полинома, стоящего под знаком интеграла. Последовательно применяя формулу интегрирования по частям столько раз, какова степень многочлена $P_n(x)$, мы сведем вычисление данного интеграла к вычислению интеграла $\int f(x)dx$, где функция

$$f(x) = \left[\begin{array}{l} e^{ax}, \\ \sin bx, \\ \cos bx. \end{array}\right.$$

УКАЗАНИЯ

1. Правило выбора частей:

- Если $f(x)$ – ***тригонометрическая*** или ***показательная функция***, то следует положить

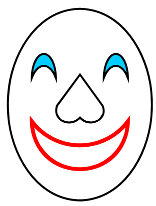
$$\boxed{U = P_n(x),\ dV = f(x)dx.}$$

- Если $f(x)$ – ***логарифмическая*** или ***обратная тригонометрическая функция***, то

$$\boxed{U = f(x),\ dV = P_n(x)dx.}$$

2. Интегрирование по частям можно применять несколько раз подряд.

3. Интегрирование по частям интеграла $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ ***и некоторых других интегралов можно привести к линейному уравнению относительно этих интегралов после двукратного применения формулы интегрирования по частям.***



5. *Интегрирование рациональных функций*

5.1. *Краткие сведения о рациональных функциях*

Рациональной простейшей функцией является многочлен n-ой степени, т.е. функция вида

$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (5.1)$$

где $a_0, a_1, \cdots, a_n$ – вещественные постоянные величины, причем $a_0 \neq 0$.

Многочлен $Q_n(x)$, у которого коэффициент $a_0 = 1$, называется ***приведенным***.

Корни многочлена

Вещественное число x_1 называется ***корнем*** многочлена $Q_n(x)$, ли $Q_n(\,x_1) = 0$.

Разложение многочлена на множители

1. Если числа $x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_n$ являются корнями многочлена $Q_n(x)$, то этот многочлен может быть разложен на множители по формуле

$$Q_n(x) = a_0(x - \ x_1)(x - \ x_2)(x - \ x_3)\cdots(x - \ x_n). \qquad (5.2)$$

2. Многочлен степени n не может иметь больше, чем n различных корней.

3. Корень многочлена x_1 называется ***простым***, если в разложение (5.2) множитель $(x - \ x_1)$ входит один раз.

Если же этот множитель в формулу (5.2) входит k_1 раз, то рень x_1 называется корнем кратности k_1 многочлена (5.1).

Если корень x_1 имеет кратность k_1, корень x_2 – кратность k_2, а корень x_r – кратность k_r, то формулу (5.2) можно заменить такой:

$$Q_n(x) = a_0(x - \ x_1)^{k_1}(x - \ x_2)^{k_2}\cdots(x - \ x_n)^{k_r}, \qquad (5.3)$$

причем $k_1 + \ k_2 + \cdots\ k_r = n$.

4. Если коэффициенты многочлена (5.1) – вещественные числа, а его корнем является комплексное число $\alpha + \beta i$, то его корнем будет также и комплексное число $\alpha - \beta i$, сопряженное с числом $\alpha + \beta i$.

Если в формуле (5.2) перемножить множители

$$x - (\,\alpha + \beta i) \text{ и } x - (\,\alpha - \beta i),$$

соответствующие этим корням, то получится квадратичный множитель вида $x^2 + px + q$, где p и q – вещественные числа.

В случае, когда $\alpha + \beta i$ – ***простой*** корень многочлена (5.1), то и $\alpha - \beta i$ – также ***простой*** корень этого многочлена.

Если же $\alpha + \beta i$ – корень ***кратности*** k многочлена (5.1), то и корень $\alpha + \beta i$ имеет такую же ***кратность***. В этом случае паре этих комплексных сопряженных корней в (5.2) будет соответствовать множитель $(x^2 + px + q)^k$.

Если многочлен (5.1) имеет не только вещественные, но и комплексные корни, то вместо формулы (5.2) имеет место формула

$$Q_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots$$
$$\cdots (x^2 + px + q)^{\lambda_1} \cdots (x^2 + px + q)^{\lambda_s} \quad (5.4)$$

где k_i, λ_j $(i = 1, 2, \cdots, r; j = 1, 2, \cdots, s)$ – натуральные числа, причем

$$k_1 + k_2 + \cdots + 2\lambda_1 + \cdots + 2\lambda_s = n.$$

Квадратичные множители $x^2 + px + q$, входящие в эту формулу, не имеют вещественных корней и на множители первой степени с вещественными коэффициентами не разлагаются (здесь p и q – вещественные коэффициенты).

Рациональная дробь

Рациональной функцией $f(x)$ или ***рациональной дробью*** называется отношение двух многочленов

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0x^m + \cdots + a_m}{b_0x^n + \cdots + b_n},$$

причем предполагается, что многочлены $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ не имеют общих множителей.

Рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется ***правильной***, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, то есть $m < n$.

Если же $m \geq n$, то рациональная дробь называется ***неправильной***, ее можно представить в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_n(x)},$$

где $R_{m-n}(x), \tilde{P}(x)$ – некоторые многочлены, а $\frac{\tilde{P}(x)}{Q_n(x)}$ является ***правильной*** рациональной дробью.

Всякая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Простейшие дроби

Определение. ***Простейшими*** (или ***элементарными***) ***дробями*** называются рациональные дроби следующих четырех типов:

$$\text{I.}\ \frac{A}{x-x_1};\ \text{II.}\ \frac{A}{(x-x_1)^k};\ \text{III.}\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ \text{IV.}\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

где A, M, N, x_1, p, q – вещественные числа, k – натуральное число, большее или равное 2, а квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней, так что его дискриминант $p^2 - 4q < 0$.

Разложение рациональной дроби на простейшие

В алгебре доказывается теорема.

Теорема 5.1. *Правильная рациональная дробь* $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m < n)$ *с вещественными коэффициентами, знаменатель которой* $Q_n(x)$ *имеет вид*

$$Q_n(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x^2 + px + q)^{\lambda_s},$$

разлагается единственным способом на сумму простейших дробей по правилу

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \cdots \qquad (5.5)$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \cdots \frac{M_{\lambda_s}x+N_{\lambda_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\lambda_s}},$$

где $A_1, A_1, \cdots, A_{k_1}, B_1, B_2, \cdots, B_{k_2}, M_1, N_1, \cdots, M_{\lambda_s}, N_{\lambda_s}$ – *вещественные числа, подлежащие определению*.

Правило
разложения правильной рациональной функции на простейшие

1) Разложить знаменатель $Q_n(x)$ на простейшие вещественные множители. В общем случае, согласно основной теореме алгебры, это разложение может содержать линейные $(x - x_1)$ и квадратичные множители $(x^2 + p_1x + q_1)$.

2) Составить согласно теореме (5.1) формулу разложения дроби на простейшие с неопределенными коэффициентами

$$A_1, \cdots, B_1, \cdots, M_1, \cdots, N_1, \cdots.$$

3) Привести обе части формулы разложения к общему знаменателю (умножить обе части равенства на $Q_n(x)$) и приравнять числители.
4) в полученном тождестве приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x; получим систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. (Число этих уравнений должно быть равно числу неизвестных $A_1, \cdots, B_1, \cdots, M_1, \cdots, N_1, \cdots$).
5) Решить эту систему (система имеет единственное решение) и подставить найденные коэффициенты в формулу разложения.

Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной x произвольные числовые значения.

Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.

5.2. Интегрирование простейших дробей

Как было сказано выше, любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной рациональной дроби, причем это представление единственно.
Целая рациональная функция (многочлен) интегрируется непосредственно:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)\, dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} \frac{a_1}{n} x^n + \cdots + a_n x + C.$$

Так как любая ***правильная*** рациональная дробь представима в виде суммы ***простейших*** дробей, то ее интегрирование сводится к интегрированию ***простейших*** дробей.

Рассмотрим вопрос об их интегрировании.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-x_1} dx = A \int \frac{d(x-x_1)}{x-x_1} = A \ln|x - x_1| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-x_1)^k} dx = A \int (x - x_1)^{-k} d(x - x_1) =$$

$$= \frac{A}{1-k}(x - x_1)^{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-x_1)^{k-1}} + C.$$

Интегрирование дробей первых двух типов очевидно. Такие дроби дальше нужно интегрировать в уме.

$$\text{III. } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

5.2.1. Прием выделения полного квадрата из квадратного трехчлена

$$x^2+px+q = \left(x^2+2x\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Так как второе слагаемое $q-\frac{p^2}{4}>0$, то положим его равным a^2, где $a=\pm\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, а затем сделаем подстановку

$$x+\frac{p}{2}=t, dx=dt, x^2+px+q=t^2+a^2.$$

Тогда, учитывая линейные свойства интеграла, найдем:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{1}{a}+C =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Замечание. Если в знаменателе дроби вместо квадратичного трехчлена x^2+px+q находится трехчлен ax^2+bx+c $(a\neq 0)$, то коэффициент a следует вынести за скобку и тем самым свести этот случай к предыдущему.

5.2.2. Прием замены переменной

Для нахождения интеграла от простейшей дроби третьего типа

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx,$$

где квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней (его дискриминант отрицателен $p^2/4-q<0$), а в числителе стоит многочлен первой степени, поступаем следующим образом:

1) выделяем полный квадрат в знаменателе

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right);$$

2) делаем подстановку

$$t=x+\frac{p}{2}, dx=dt, x=t-\frac{p}{2}, x^2+px+q=t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right);$$

3) находим интеграл.

5.2.3. Прием выделения одной линейной функции из другой

Для вычисления интеграла $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ можно поступать так

- В числителе подынтегральной дроби записывается производная знаменателя, то есть $(x^2+px+q)' = 2x+p$. Тождественными преобразованиями из двучлена $2x+p$ получают заданный числитель $Mx+N$. Для этого следует двучлен $2x+p$ умножить на $\frac{M}{2}$ и к полученному произведению прибавить $N-\frac{M}{2}$. Очевидно, что

$$(2x+p)\frac{M}{2}+N-\frac{Mp}{2}=Mx+N.$$

- Преобразованная дробь $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ имеет вид $\frac{(2x+p)\frac{M}{2}+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}$ и может быть представлена как сумма двух дробей:

$$\frac{M}{2}\,\frac{2x+p}{x^2+px+q}+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}.$$

Первая дробь интегрируется просто: в числителе находится производная знаменателя – интегрирование приводит к натуральному логарифму модуля знаменателя.

Для интегрирования второй дроби в знаменателе выделяют полный квадрат.

$$\text{IV. } \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx.$$

Для нахождения интеграла от простейшей дроби четвертого типа положим, как и выше,

$$t=x+\frac{p}{2};\, dx=dt;\, a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Тогда получим $(k\geq 2)$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{M}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Обозначая интеграл в правой части через J_k, после преобразований имеем

$$J_k=\frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}J_{k-1}.$$

Имеем так называемую ***рекуррентную формулу***, которая позволяет найти интеграл J_k для любого $k = 2, 3, \cdots$.

5.3. Общий случай

Для нахождения неопределенного интеграла от дробно-рациональной функции следует поступать следующим образом:

1) ***если рациональная дробь неправильная, то делением числителя на знаменатель выделяется целая часть, т.е. данная функция представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;***
2) ***знаменатель полученной правильной дроби разлагается на произведение линейных и квадратичных множителей;***
3) ***пишется схема разложения правильной дроби на сумму простейших дробей;***
4) ***освободиться от знаменателей, умножая обе части равенства на знаменатель дроби;***
5) ***находятся неопределенные коэффициенты и подставляются в схему разложения (найти сумму простейших дробей);***
6) ***используя линейность интеграла, находятся интегралы от каждого слагаемого в отдельности.***

6. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

6.1. Интегралы вида

$$\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx,$$

где n – целое положительное число.

Данные интегралы можно свести к формулам интегрирования, а, следовательно, и найти, руководствуясь следующими правилами:

1. ***Интегралы от нечетной степени синуса или косинуса можно найти***
❖ ***путем отделения от нее одного множителя***
❖ ***и замены кофункции новой переменной.***
2. ***Интегралы от четной степени синуса или косинуса можно найти путем понижения степени (вдвое) по формулам:***

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha);\ \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

6.2. Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx.$$

(Во всем дальнейшем m – показатель степени синуса,
n – показатель степени косинуса).

Интегралы этого вида находят с помощью различных тригонометрических формул, применение которых зависит от показателей степеней m и n. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи

1) ***Если хотя бы одно из чисел*** m и n ***положительно и нечетно, то***

❖ ***от нечетной степени отделяют множитель*** $\sin x$ (или $\cos x$),

❖ ***оставшийся множитель в четной степени преобразуют по формуле*** $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ (или $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$),

❖ ***применяют подстановку*** $t = \sin x$ (или $t = \cos x$).

2) ***Если оба показателя*** m и n ***положительны и четны (или один из них – нуль), то показатели степени уменьшают с помощью формул***:

$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);\ \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);\ \sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

3) ***Если*** m и n ***целые отрицательные числа, то интеграл берется непосредственно, если в числителе единицу заменить, где*** k ***– целая часть числа*** $\frac{m+n}{2}-1$.

4) ***Если*** $m + n =- 2k$ $(k \in \mathbf{N})$, ***то подынтегральную функцию***

❖ ***записывают (или она уже записана) в виде дроби,***

❖ ***в знаменателе выделяют множитель*** $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$).

❖ ***Выражение*** $\frac{dx}{\cos^2 x}$ $\left(\text{или } \frac{dx}{\sin^2 x}\right)$ ***заменяют на*** $d(\operatorname{tg} x)$
(или $d(\operatorname{ctg} x)$),

❖ ***применяют подстановку*** $t = \operatorname{tg} x$ (или $t = \operatorname{ctg} x$).

6.3. Интегралы вида

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx, \int \operatorname{ctg}^n x\,dx,$$

где n – целое положительное число.

1) ***К интегралу*** $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$ ***следует применить подстановку***

$t = \operatorname{tg} x; dx = \frac{dt}{1+t^2}$. ***Получим интеграл*** $\int \frac{t^n dt}{1+t^2}$.

2) ***К интегралу*** $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx$ ***удобно применить подстановку*** $t = \operatorname{ctg} x; dx = -\frac{dt}{1+t^2}$. ***Получим интеграл*** $-\int \frac{t^n dt}{1+t^2}$.

3) ***Выполняя деление, придем к выражению, которое непосредственно интегрируется.***

6.4. Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx dx,\ \int \cos ax \cos bx dx,\ \int \sin ax \sin bx dx,$$

где a и b – вещественные числа.

Из тригонометрии известно, что произведения тригонометрических функций, находящихся под знаком этих интегралов, преобразуются в суммы по следующим формулам:

$$\sin ax \cos bx = \tfrac{1}{2}\left(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right);$$

$$\cos ax \cos bx = \tfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right);$$

$$\sin ax \sin bx = \tfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right).$$

Заменив в рассматриваемых интегралах подынтегральные функции по этим формулам, легко выполним интегрирование.

6.5. Интегралы вида

$$\int R(\sin x; \cos x)\, dx$$

Запись $R(\sin x\,;\,\cos x)$ означает, что над синусом и косинусом производятся только рациональные операции: сложение и вычитание, умножение на постоянные величины, возведение в целые степени как положительные, так и отрицательные, деление.

Другими словами, под символом $R(\sin x\,;\,\cos x)$ следует понимать рациональную функцию синуса и косинуса.

Интегралы указанного вида приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью, так называемой ***универсальной тригонометрической подстановки*** $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

В результате этой подстановки имеем:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; x = 2\operatorname{arctg} t; dt = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Универсальная подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ приводит во многих случаях к сложным вычислениям, так как при ее применении $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через переменную t в виде рациональных дробей, содержащих t^2.

В ряде случаев ***рационализация*** подынтегрального выражения может быть достигнута с помощью других, более простых подстановок. Приведем важнейшие из этих случаев.

1. ***Если подынтегральная функция имеет вид*** $R_1(\sin x)\cos x$, ***где*** R_1 ***– рациональная функция одного аргумента, то применяется подстановка*** $t = \sin x$.

Замечание. Если функция $R_1(\sin x)\cos x$ меняет знак при мене $\cos x$ на $-\cos x$, т.е. является нечетной функцией $\cos x$, то применяется подстановка $t = \sin x$.

2. ***Если подынтегральная функция имеет вид*** $R_1(\cos x)\sin x$, ***где*** R_1 ***– рациональная функция одного аргумента, то применяется подстановка*** $t = \cos x$.

Замечание. Если функция $R_1(\cos x)\sin x$ меняет знак при мене $\sin x$ на $-\sin x$, т.е. является нечетной функцией $\sin x$, то применяется подстановка $t = \cos x$.

3. ***Если функция*** $R(\sin x; \cos x)$ ***не изменяется при замене*** $\sin x$ ***на*** $-\sin x$ ***и*** $\cos x$ на $-\cos x$, ***т.е.***

$$R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x),$$

то для нахождения интеграла целесообразно использовать подстановку $t = \operatorname{tg} x$.

7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

В отличие от функций рациональных иррациональные выражения далеко не всегда интегрируются в элементарных функциях. Рассмотрим некоторые частные типы иррациональных функций, интернирующихся в конечном виде.

7.1. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Вычисление интеграла производится так:

1) ***под корнем*** $|a|$ ***следует вынести за скобку***