Содержание

От авторов

Последние годы в ГИА (ОГЭ и ЕГЭ) в явном или неявном виде включаются задания, содержащие элементы логики и теории множеств. Однако систематического изучения соответствующих тем в рамках школьной программы по математике нет.

В нашем пособии излагаются основные понятия и законы логики высказываний и теории множеств. На конкретных примерах рассматривается их применение при нахождении следствий из неравенств, решении различных логических задач и некоторых задач по теории вероятностей на ОГЭ и ЕГЭ.

В книгу включён также анализ решения различных заданий ЕГЭ базового уровня, требующих сообразительности и проведения несложных логических рассуждений и составленных в соответствии с прототипами из Открытого банка.

Кроме того, в пособии рассматриваются свойства делимости целых чисел, которые изучаются в школьном курсе математики 5—6-х классов и практически забываются ко времени сдачи ОГЭ и ЕГЭ. Известно, что эти свойства широко используются при решении различных заданий ЕГЭ базового уровня, задач с экономическим содержанием и олимпиадных заданий ЕГЭ профильного уровня.

В каждом разделе пособия приводятся решения типовых заданий и аналогичные задачи для самостоятельного решения, способствующие закреплению пройденного материала.

Наше пособие направлено на развитие логической культуры выпускников, навыков осознанного применения основных законов логики и теории множеств при решении заданий ОГЭ и ЕГЭ.

Книга может быть использована для подготовки к решению заданий на логику в ЕГЭ по информатике.

Желаем успеха!

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты `legionrus@legionrus.com`.

§ 1. Элементы логики

Операции над высказываниями, высказывательные формулы

Всякое повествовательное предложение, о котором можно однозначно сказать, истинно оно или ложно, называют **высказыванием**. Для обозначения высказываний используют заглавные латинские буквы (с индексами или без них), которые называют **высказывательными переменными**. Всякая высказывательная переменная принимает ровно два значения — **истина** (1) или **ложь** (0).

Примеры высказываний в курсе математики:

1) «$2 + (-7) = -5$»;

2) «$\sqrt{9} = -3$»;

3) «$(5^3)^2 = (25)^3$»;

4) «$-15 < -18$»;

5) «$17 - 3 \neq 10$»;

6) «18 делится нацело на 6».

Высказывания 1, 3, 5 и 6 истинны, а 2 и 4 — ложны.

Используя произвольные высказывания, логические союзы **«и», «или», «если ..., то ...»** и частицу **«не»**, можно получать новые высказывания, истинность или ложность которых устанавливается в соответствии с общепринятой в логике договорённостью.

Поставив между двумя высказываниями A и B союз «и», получим новое высказывание «A и B», которое истинно в единственном случае, когда оба высказывания A и B истинны.

Следовательно, высказывание «A и B» — ложно во всех остальных случаях:

A — истинно и B — ложно;

A — ложно и B — истинно;

A — ложно и B — ложно.

Например: родители Дмитрия поставили условие, что купят ему новый ноутбук, если его годовая отметка по русскому языку будет «5» и годовая отметка по математике будет «5».

На языке логики это означает, что Дмитрию купят ноутбук, если будет истинно высказывание «A и B», где

A: «Годовая оценка Дмитрия по русскому языку — „5“ »;

B: «Годовая оценка Дмитрия по математике — „5“ ».

Заменяя в высказывании «A и B» союз «и» на логическую связку «$\wedge$», получим высказывание $A \wedge B$, которое называют **конъюнкцией** двух высказываний A и B (читают «A конъюнкция B»), истинность или ложность которого определяется таблицей:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Как видно из таблицы, конъюнкция истинна в единственном случае, когда оба высказывания истинны.

Заменяя логический союз «или» на логическую связку «$\vee$», получаем следующее определение: **дизъюнкцией** двух высказываний A и B называют новое высказывание, которое обозначают $A \vee B$ (читают «A дизъюнкция B»), истинность или ложность которого определяется таблицей:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Как видно из таблицы, дизъюнкция ложна в единственном случае, когда оба высказывания ложны.

Например: условие «Дмитрий по четвергам ест отварную рыбу или ест овощное рагу» записывается в виде дизъюнкции $A \vee B$ двух высказываний A и B, где

A: «Дмитрий по четвергам ест отварную рыбу»;

B: «Дмитрий по четвергам ест овощное рагу».

Это высказывание будет истинно ровно в трёх следующих случаях:

1) A — истинно и B — истинно;

2) A — истинно и B — ложно;

3) A — ложно и B — истинно.

Импликацией двух высказываний A и B называют новое высказывание, которое обозначают $A \to B$ (читают «если A, то B» или «A импликация B»), истинность или ложность которого определяется таблицей:

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Как видно из таблицы, импликация $A \to B$ ложна в единственном случае, когда A — истинно, а B — ложно.

A называют **посылкой** импликации $A \to B$, а B — **заключением**.

Отрицанием высказывания A называют новое высказывание, которое обозначают $\overline{A}$ (читают «не A»), истинность или ложность которого определяется таблицей:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Как видно из таблицы, $\overline{A}$ истинно, когда A — ложно, и $\overline{A}$ ложно, когда A — истинно.

Из высказывательных переменных, логических операций конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания, открывающих и закрывающих круглых скобок (скобки указывают порядок выполнения операций) строят выражения, которые называют **высказывательными формулами**.

Например: 1) $(\overline{A} \vee B_1) \to (C \wedge \overline{\overline{D}})$; 2) $((A \vee B) \wedge C) \to \overline{(D \to A)}$.

Пусть F — произвольная высказывательная формула и $X_1, X_2, ..., X_k$ — все высказывательные переменные, из которых составляется F. Тогда, придавая этим переменным некоторые значения

истина (1) или **ложь** (0), получим высказывание, истинность или ложность которого устанавливается по определению логических операций.

Задача 1. Найдите значение высказывательной формулы
$(A \vee B) \to (\overline{A} \wedge B)$, если $A = 1$ и $B = 0$.

Решение. Значение $A \vee B$ равно 1 по определению дизъюнкции. Значение $\overline{A}$ равно 0 по определению отрицания, а значение $\overline{A} \wedge B$ равно 0 по определению конъюнкции. Тогда значение $(A \vee B) \to (\overline{A} \wedge B)$ совпадает со значением $1 \to 0$ и равно 0 по определению импликации.

Ответ: 0.

Задача 2. Найдите значение высказывательной формулы
$(A \wedge B) \to (\overline{C} \to \overline{A})$, если $A = 1$, $B = 0$ и $C = 0$.

Решение. Значение $A \wedge B$ равно 0 по определению конъюнкции. Далее заметим, что, независимо от значения $\overline{C} \to \overline{A}$, по определению импликации значение $(A \wedge B) \to (\overline{C} \to \overline{A})$ равно 1. Действительно, значения $0 \to 1$ и $0 \to 0$ равны 1.

Ответ: 1.

Значения высказывательной формулы при всевозможных значениях высказывательных переменных удобно находить с помощью таблицы, называемой **таблицей истинности**.

Построим таблицу истинности для высказывательной формулы $\overline{(A \to B)} \wedge \overline{A}$.

A	B	$\overline{(A \to B)}$	$\overline{A}$	$\overline{(A \to B)} \wedge \overline{A}$
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	0	1	0

Если при всевозможных значениях высказывательных переменных, входящих в высказывательную формулу, она принимает значение 1, то её называют **тождественно истинной (т. и.)** и обозначают **1**. Если же при всевозможных значениях высказывательных переменных, входящих в высказывательную формулу, она принимает значение 0, то её называют **тождественно ложной (т. л.)** и обозначают **0**.

Выше был приведён пример тождественно ложной формулы. Приведём примеры тождественно истинных формул:

1. Формула $A \to A$ — т. и. Действительно, если значение A равно 1, то по таблице истинности для импликации получаем, что значение $1 \to 1$ равно 1. Если значение A равно 0, то по таблице истинности для импликации получаем, что значение $0 \to 0$ тоже равно 1.

2. Формула $A \vee \overline{A}$ — т. и. Действительно, если значение A равно 1, то по таблице истинности для дизъюнкции получаем, что значение $1 \vee 0$ равно 1. Если значение A равно 0, то значение $\overline{A}$ равно 1, и по таблице истинности для дизъюнкции получаем, что значение $0 \vee 1$ равно 1.

Задача 3. Докажите, что формула $A \to (B \to A)$ — т. и.

Решение. Покажем, что формула $A \to (B \to A)$ — т. и., путём построения таблицы истинности.

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Говорят, что высказывательная формула F **следует** из высказывательной формулы F_1 ($F_1 \models F$), если значение F равно 1 при любых значениях высказывательных переменных, входящих в формулы F и F_1, при которых формула F_1 принимают значение 1.

Задача 4. Докажите, что из высказывательной формулы $X \to Y$ следует формула $\overline{Y} \to \overline{X}$.

Решение. Надо убедиться, что формула $\overline{Y} \to \overline{X}$ принимает значение 1 при всех всех значениях X и Y, при которых формула $X \to Y$ принимает значение 1. Но формула $X \to Y$ принимает значение 1 в трёх случаях:

1) значение $X = 1$, значение $Y = 1$;

2) значение $X = 0$, значение $Y = 1$;

3) значение $X = 0$, значение $Y = 0$.

В 1-м случае значение $\overline{X} = 0$, значение $\overline{Y} = 0$, поэтому значение $\overline{Y} \to \overline{X}$ равно 1.

Аналогично убеждаемся, что значение $\overline{Y} \rightarrow \overline{X}$ равно 1 в 2-м и 3-м случаях.

Задача 5. Докажите, что из $X \rightarrow Y$ не следует $Y \rightarrow X$.

Решение. Достаточно найти такие значения высказывательных переменных X и Y, при которых значение импликации $X \rightarrow Y$ равно 1, а значение импликации $Y \rightarrow X$ равно нулю.

Заметим, что значение импликации $Y \rightarrow X$ равно 0 в единственном случае: значение $Y = 1$ и значение $X = 0$. А при этих значениях X и Y значение импликации $X \rightarrow Y$ равно 1.

Задача 6. Докажите, что из $X \rightarrow Y$ не следует $\overline{Y} \rightarrow X$.

Решение. Достаточно найти такие значения высказывательных переменных X и Y, при которых значение импликации $X \rightarrow Y$ равно 1, а значение импликации $\overline{Y} \rightarrow X$ равно нулю.

Заметим, что значение импликации $\overline{Y} \rightarrow X$; равно 0 в единственном случае: значение $Y = 0$ и значение $X = 0$. А при этих значениях X и Y значение импликации $X \rightarrow Y$ равно 1.

Аналогично убеждаемся, что из формулы $X \rightarrow Y$ не следует ни одна из формул: $Y \rightarrow \overline{X}$; $\overline{X} \rightarrow \overline{Y}$; $\overline{X} \rightarrow Y$; $X \rightarrow \overline{Y}$.

Для любых формул $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ если из $\boldsymbol{U}$ следует $\boldsymbol{V}$, а из $\boldsymbol{V}$ следует $\boldsymbol{W}$, то из $\boldsymbol{U}$ следует $\boldsymbol{W}$.

Формулы U и V называют **эквивалентными** (обозначают $U \equiv V$), если из формулы U следует V $(U \models V)$ и наоборот — из формулы V следует U $(V \models U)$.

Из этого определения вытекает, что эквивалентные формулы U и V принимают одинаковые значения при всех возможных значениях входящих в них высказывательных переменных.

Поэтому в логических рассуждениях можно одну высказывательную формулу заменять на любую другую, эквивалентную ей формулу.

Для любых высказывательных формул U, V и W верны законы логики:

1. $U \wedge U \equiv U$ — закон непродуктивности конъюнкции;

1*. $U \vee U \equiv U$ — закон непродуктивности дизъюнкции;

2. $U \wedge V \equiv V \wedge U$ — переместительный закон для конъюнкции;

2*. $U \vee V \equiv V \vee U$ — переместительный закон для дизъюнкции;

3. $(U \wedge V) \wedge W \equiv U \wedge (V \wedge W)$ — сочетательный закон для конъюнкции;

3*. $(U \vee V) \vee W \equiv U \vee (V \vee W)$ — сочетательный закон для дизъюнкции;

4. $U \wedge (V \vee W) \equiv (U \wedge V) \vee (U \wedge W)$ — распределительный закон для конъюнкции;

4*. $U \vee (V \wedge W) \equiv (U \vee V) \wedge (U \vee W)$ — распределительный закон для дизъюнкции;

5. $\overline{U \wedge V} \equiv \overline{U} \vee \overline{V}$ — закон отрицания конъюнкции;

5*. $\overline{U \vee V} \equiv \overline{U} \wedge \overline{V}$ — закон отрицания дизъюнкции;

6. $\overline{\overline{U}} \equiv U$ — закон двойного отрицания;

7. $U \to V \equiv \overline{V} \to \overline{U}$ — закон обращения импликации;

8. $U \to V \equiv \overline{U} \vee V$ — закон замены импликации;

9. $U \wedge 1 \equiv U$; $U \wedge 0 \equiv 0$ — свойства 1 и 0 для конъюнкции;

9*. $U \vee 0 \equiv U$; $U \vee 1 \equiv 1$ — свойства 0 и 1 для дизъюнкции.

Покажем справедливость закона 7 с помощью таблицы истинности:

U	V	$U \to V$	$\overline{V}$	$\overline{U}$	$\overline{V} \to \overline{U}$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Отсюда, согласно определению эквивалентных формул, получаем, что

по закону 5: $\overline{U \wedge V} \models \overline{U} \vee \overline{V}$ и $\overline{U} \vee \overline{V} \models \overline{U \wedge V}$;

по закону 6: $U \models \overline{\overline{U}}$ и $\overline{\overline{U}} \models U$;

по закону 7: $U \to V \models \overline{V} \to \overline{U}$ и $\overline{V} \to \overline{U} \models U \to V$.