ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункта.

Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Автор надеется, что данное пособие поможет студентам в овладении методами линейной алгебры, в их самостоятельной работе над предметом. Он также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Речь идет о важнейшем понятии математики; о мощном методе решения многих задач естествознания, а также о способе представления многих величин, встречающихся в физике, химии, математике и других науках.

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

1.1. Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и положительна в промежутке $[a; b]$.

Рассмотрим плоскую фигуру aA_0A_nb, ограниченную

- сверху графиком функции $y = f(x)$,
- слева и справа – отрезками aA_0 и A_nb прямых $x = a$ и $x = b$,
- снизу – осью Ox (рис. 1.1).

Такие фигуры называются ***криволинейными трапециями***. Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции aA_0A_nb и вместе с тем уточнить смысл самого понятия площади фигуры aA_0A_nb.

▲ Отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ разобьем на n элементарных (частичных) отрезков

$$[a;\ x_1], [x_1;\ x_2], \cdots, [x_{n-1};\ b].$$

Длины частичных отрезков обозначим через

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ (k = 1, 2, \cdots, n).$$

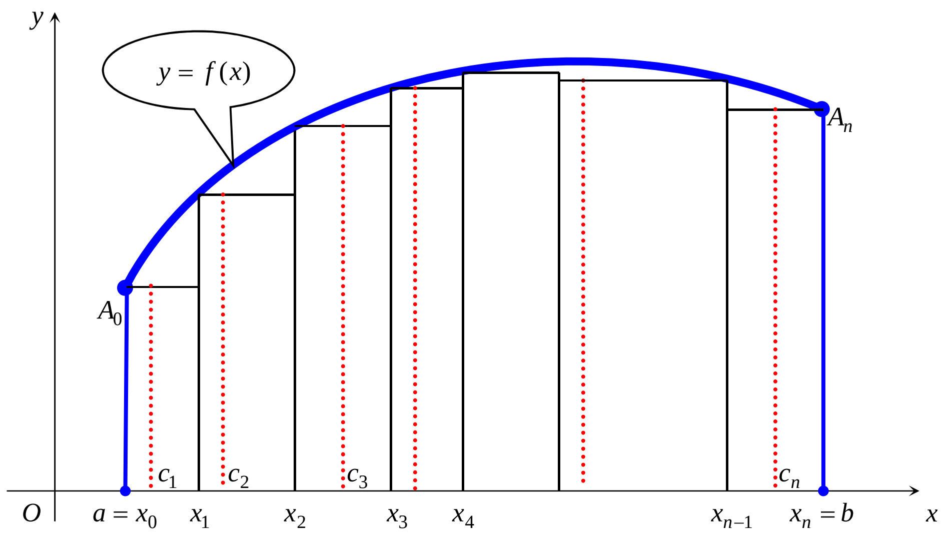


Рис. 1.1

Проводя из точек x_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ перпендикуляры до пересечения с кривой, получим значения функции в этих точках:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \cdots, y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n).$$

В результате этого площадь криволинейной трапеции окажется разбитой на сумму площадей элементарных криволинейных трапеций.

В каждом из элементарных отрезков $[x_{k-1};\ x_k]$ выберем произвольную точку c_k. И из точек $c_1, c_2, \cdots, c_n$ проведем перпендикуляры до пересечения с кривой $y = f(x)$. Вычислим в точках c_k значения данной функции $f(c_k)$ и получим $f(c_1),\ f(c_2), \cdots,\ f(c_n)$.

Далее построим ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников, имеющих своим основанием отрезки $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$, а высотой – ординаты $f(c_1),\ f(c_2), \cdots,\ f(c_n)$.

Произведение $f(c_k)\Delta x_k$ выражает площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(c_k)$. Составим сумму всех таких произведений

$$S_n = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \cdots + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Будем теперь делить отрезок $[a; b]$ на все более мелкие части так, чтобы число частичных отрезков увеличивалось, а их длины уменьшались. Тогда ступенчатая фигура будет все меньше и меньше отклоняться от криволинейной трапеции aA_0A_nb.

Пусть $\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ является длиной наибольшего из частичных отрезков $[x_{k-1};\ x_k], k = 1, 2, \cdots, n$.

Число частичных отрезков будет неограниченно увеличиваться при $\lambda \to 0$, а длины Δx_k всех этих отрезков будут стремиться к нулю, так как $0 \le x_k - x_{k-1} \le \lambda$ для всех $k = 1, 2, \cdots, n$.

Если существует конечный предел S площади ступенчатой фигуры при

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0,$$

то он принимается за площадь криволинейной трапеции aA_0A_nb, т.е.

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Этот предел, если он существует, не должен зависеть от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};\ x_k]$ и от выбора точек c_k на них.

Таким образом, задача о площади криволинейной трапеции aA_0A_nb привела нас к вычислению предела вида

$$\lim_{\max_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \blacktriangledown \tag{1.1}$$

1.2. Задача Архимеда

Попробуем, например, следуя Архимеду, найти площадь под параболой $y = x^2$ над отрезком $[0; 1]$ (рис. 1.2). Как и Архимед, будем действовать ***методом исчерпания фигуры посредством простейших фигур – прямоугольников***, площади которых мы вычислять умеем.

Отрезок $[0; 1]$ разобьем на n равных частей длиной $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ ми $x_k = k \cdot \frac{1}{n}$. Возьмем $c_k = x_k$, тогда

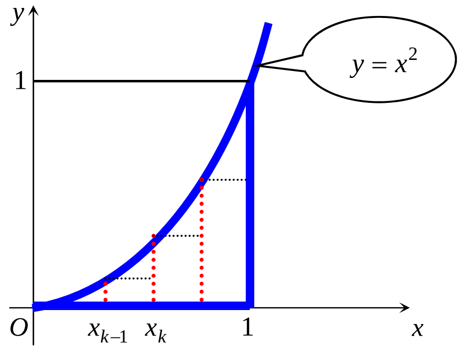


Рис. 1.2

$$f(c_k) = k^2 \cdot \frac{1}{n^2} \text{ и } S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}.$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

то

$$S_n = \frac{1}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right), S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

Это и есть результат Архимеда, полученный прямым вычислением предела.

2. Понятие определенного интеграла

Определение 1. ***Разбиением*** P отрезка $[a; b], a < b$, называется конечная система точек $x_0, x_1, \cdots, x_n$ этого отрезка такая, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Отрезки $[x_{k-1}; x_k], k = 1, 2, \cdots, n$ называются ***отрезками разбиения*** P.

Максимум $\lambda(P)$ из длин отрезков разбиения называется ***параметром разбиения*** P.

Определение 2. Говорят, что имеется ***разбиен**ие* (P, c) ***с отмеченными точками*** отрезка $[a; b]$, если имеется разбиение P отрезка $[a; b]$ и в каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ разбиения P выбрано по точке $c_k \in [x_{k-1}; x_k], (k = 1, 2, \cdots, n)$.

Набор $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ **обозначается** одним символом c.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, где $a<b$. Разобьем этот отрезок на n частей произвольными точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

и пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($\Delta x_k > 0$) – длины полученных частичных отрезков $[x_{k-1};\ x_k]$. В каждом частичном отрезке $[x_{k-1};\ x_k]$ возьмем произвольную точку c_k, вычислим значения $f(c_k)$ функции $f(x)$ в этих точках и составим сумму

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Эта сумма **называется** ***интегральной суммой*** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Величина интегральной суммы S_n зависит как ***от способа разбиения отрезка*** $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};\ x_k]$, так и ***от выбора точек*** c_k на них.

Обозначим через λ длину наибольшего из отрезков $[x_{k-1};\ x_k]$, т.е.

$$\lambda = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k.$$

Определение. Число J называется ***пределом интегральных сумм*** $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a;b]$ на части с длинами $\Delta x_k < \delta$ для всех $k = 1, 2, \cdots, n$ (то есть $\lambda < \delta$), неравенство $\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J\right| < \varepsilon$ будет выполняться при любом выборе точек c_k.

Для о**бозначения** предела интегральных сумм употребляется запись

$$J = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Число δ зависит от выбора числа ε, и поэтому иногда пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Определение. Если при любых разбиениях отрезка $[a;b]$, $a<b$ на частичные отрезки $[x_{k-1};\ x_k]$ и при любом выборе точек c_k в них, интегральные суммы $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ при $\lambda \to 0$ имеют один и тот же конечный предел J, то этот предел называют ***определенным интегралом в смысле Римана*** от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$.

Обозначение $\int_a^b f(x)dx$.

Для обозначения суммы вида $\sum f(x)dx$ (вернее сказать предельного значения этой суммы) Лейбниц и ввел символ $\int f(x)dx$, где $f(x)dx$ напоминает типичное слагаемое суммы, и $\int$ есть стилизованная буква S – начальная буква латинского слова *Summa*.

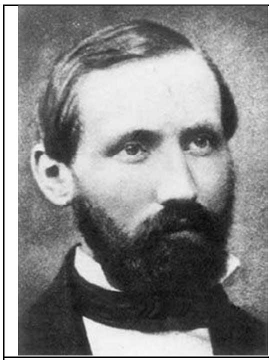
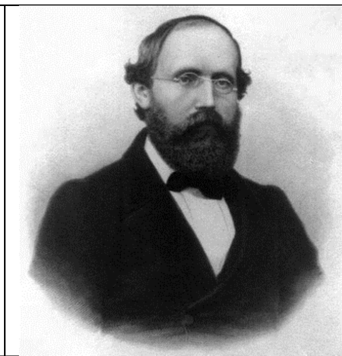
Итак, по определению

$$J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

- Числа a и b называются соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами интеграла***;
- x называется ***переменной интегрирования***,
- $f(x)$ – ***подынтегральной функцией***,
- $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***.

Так как определенный интеграл определен нами при условии, что справедливо $a < b$, то дополним его определение следующими соглашениями: будем считать, что

если $b = a$, то $\int_a^b f(x)dx = 0$; если $b < a$, то $\int_b^a f(x)dx =- \int_a^b f(x)dx$

	
Риман, начало 1850 годов	Риман, 1863

Георг Фридрих Бернхард (17.9.1826– 20.7.1866), немецкий математик. В 1846 поступил в Гёттингенский университет: слушал лекции К. Гаусса, многие идеи которого были им развиты позже. В 1847 – 49 слушал лекции К. Якоба по механике и П. Дирихле по теории чисел в Берлинском университете; в 1849 вернулся в Гёттинген, где сблизился с сотрудником Гаусса физиком В. Вебером, который пробудил в нём глубокий интерес к вопросам математического естествознания.

Работы Р. оказали большое влияние на развитие математики 2-й половины 19 и 20 века. В докторской диссертации Р. положил начало геометрическому направлению теории аналитических функций.

Разработанные Р. методы получили широкое применение в его дальнейших трудах по теории алгебраических функций и интегралов, по аналитической теории дифференциальных уравнений (в частности, уравнений, определяющих гипергеометрические функции), по аналитической теории чисел

В знаменитой лекции 1854 «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1867) Р. дал общую идею математического пространства (по его словам, «многообразия»), включая функциональные и топологические пространства.

Более подробно Р. рассмотрел так называемые римановы пространства, обобщающие пространства геометрий Евклида, Лобачевского и Римана, характеризующиеся специальным видом линейного элемента, и развил учение об их кривизне. Обсуждая применение своих идей к физическому пространству, Р. поставил вопрос о «причинах метрических свойств» его, как бы предваряя то, что было сделано в общей теории относительности.

Пример 2.1. Вычислить $\int_a^b dx$.

▲ По определению определенного интеграла получаем

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\big((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})\big) = \lim_{\lambda\to 0}(x_n - x_0) = \lim_{\lambda\to 0}(b-a) = b-a.$$ ▼

Поскольку мы не будем рассматривать другого интеграла, кроме интеграла Римана, условимся для краткости вместо терминов «интеграл Римана» и «функция, интегрируемая по Риману», говорить соответственно «интеграл» и «интегрируемая функция».

3. Условия интегрируемости функций

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;b]$ называется ***интегрируемой по Риману*** на этом отрезке, если для нее существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема 3.1 (необходимое условие интегрируемости функции). *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

▲ Предположим обратное, т.е. допустим, что функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на частичные ки $[x_{k-1};\ x_k]$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

Так как $f(x)$ не ограничена на $[a;b]$, то найдется частичный отрезок, на котором она не ограничена. Пусть, например, таким отрезком будет отрезок $[x_0;\ x_1]$. Выберем точку c_k и составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)x_k = f(c_1)\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Зафиксируем точки $c_2, c_3, \cdots, c_n$, и будем менять только точку $c_1 \in$ ку $c_1 \in [x_0;\ x_1]$. Тогда сумма$\sum_{k=2}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ будет иметь определенной значение, а первое слагаемое $f(c_1)\Delta x_1$ будет изменяться, и надлежащим выбором точки c_1его можно сделать как угодно большим по абсолютной величине и, значит, $|S_n|$ может быть сделана как угодно большой.

Это означает, что интегральная сумма S_n при$\max_{1\le k\le n} x_k \to 0$ не имеет конечного предела, т.е. $f(x)$ не интегрируема на $[a;b]$. Отсюда следует, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$. ▼

Замечание. Ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ не является достаточным условием для ее интегрируемости, т.е. ция $f(x)$ может быть ограниченной на $[a;b]$ и в то же время неинтегрируемой на $[a;b]$. В качестве примера, доказывающего это утверждение, приведем функцию Дирихле:

$$f(x) = \Delta(x) = \left[\begin{array}{l} 1, \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, \text{если } x \text{ иррационально}, \end{array}\right.$$

которую рассмотрим, например, на отрезке $[0;1]$.

Эта функция ограничена $|f(x)| \leq 1\ \forall x \in [0;1]$, но она не интегрируема на нем.

▲ В самом деле, составив для нее интегральную сумму,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)x_k,$$

будем иметь:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) =$$

$$= x_n - x_0 = 1 - 0 = 1 \text{ для рациональных точек } c_k,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0 \text{ для иррациональных точек } c_k.$$

Итак, при любом малом $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ интегральная ма S_n может принимать как значение равное 1, так и значение, равное нулю.

Следовательно, S_n при $\lambda \to 0$ предела не имеет, т.е. функция Дирихле не интегрируема на отрезке $[0;1]$. ▼

Таким образом, для существования определенного интеграла от некоторой функции $f(x)$ последняя, помимо ограниченности должна обладать дополнительными свойствами, обеспечивающими ее интегрируемость.

Приведем без доказательства теорему, дающую достаточное условие интегрируемости функции.

Теорема 3.2 (достаточное условие интегрируемости функции). *Функция* $f(x)$, *непрерывная на отрезке* $[a;b]$, *интегрируема на этом отрезке.*

Приведем формулировки еще двух теорем, дающих достаточные признаки интегрируемости функции.

Теорема 3.3. *Функция* $f(x)$, *определенная и монотонная на ке* $[a;b]$, *интегрируема на этом отрезке.*

Здесь следует отметить, что если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$, то ее значения заключены между числами $f(a)$ и $f(b)$. Поэтому определенная на $[a;b]$ монотонная функция $f(x)$ ограничена на этом отрезке.

Теорема 3.4. *Функция* $f(x)$, *ограниченная на отрезке* $[a;b]$ *и имеющая на нем конечное число точек разрыва, интегрируема на этом отрезке.*

Пример 3.1. Функция $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 1, \quad \text{если } x = 0, \end{cases}$ интегрируема на отрезке $[0;1]$, потому что она ограничена $|f(x)| \leq 1 \ \forall x \in [0;1]$, и имеет на этом отрезке одну точку разрыва $x = 0$ (точка разрыва второго рода).

4. Свойства определенного интеграла

Установим некоторые свойства определенного интеграла. При этом будем считать, что все рассматриваемые функции непрерывны, а, следовательно, интегрируемы на отрезке $[a;b]$.

1. *Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots,$$

так как интегральные суммы представляют собой числа.

Из определения определенного интеграла следует, что величина интеграла зависит только от вида функции $f(x)$ и от чисел a и b.

Следовательно, если заданы функция $f(x)$ и пределы интегрирования, то интеграл определяется однозначно и представляет собой некоторое число. Отсюда, в частности, следует, что определенный интеграл не зависит от выбора обозначения для аргумента подынтегральной функции, т.е. обозначения переменной интегрирования.

Линейность определенного интеграла

2. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$, *то и функция* $C \cdot f(x)$ *для любой постоянной* C *интегрируема на этом отрезке, причем* $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx \, , C = const$.

Постоянный множитель можно выносить за знак (вносить под знак) определенного интеграла.

▲ По определению имеем

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} C\cdot f(c_k)\Delta x_k =.$$

$$= C\cdot \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = C\cdot\int_a^b f(x)dx. \blacktriangledown$$

3. *Если функции* $f(x)$ и $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a;b]$, *то и их алгебраическая сумма* $f(x)\pm g(x)$ *также интегрируема на этом отрезке, причем*

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

$\blacktriangle \int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(f(x)\pm g(x))\Delta x_k =$

$$= \lim_{\lambda\to 0}(\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\Delta x_k)=$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(c_k)\Delta x_k =.$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \blacktriangledown$$

Следствие. *Если функции* $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a;b]$, *то их линейная комбинация* $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ *также является интегрируемой на этом отрезке, причем*

$$\int_a^b (c_1f_1(x)+c_2f_2(x))dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)dx.$$

Следствие выражает ***свойство линейности*** определенного интеграла.

Если множество $\mathfrak{R}[a;b]$ рассматривать как векторное пространство над полем вещественных чисел, а интеграл $\int_a^b f(x)dx$ как вещественнозначную функцию, определенную на векторах пространства $\mathfrak{R}[a;b]$, то следствие утверждает, что интеграл есть линейная функция на векторном пространстве $\mathfrak{R}[a;b]$.

Во избежание возможной путаницы,

функции, определенные на функциях, называют ***функционалами***.

Таким образом, интеграл есть линейный функционал на векторном пространстве интегрируемых функций.

Аддитивность[1]

Значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ зависит как от подынтегральной функции, так и от отрезка, по которому ведется интегрирование.

4. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на наибольшем из* *ков* $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, *то она интегрируема на двух других отрезках,*

[1] Аддитивность, свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям, каким бы образом ни был разбит объект.

причем $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ *при любом расположении точек* a, b, c.

Это равенство выражает ***свойство аддитивности*** определенного интеграла.

▲ Рассмотрим два случая

1) Пусть $a < c < b$. По определению имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Так как интеграл не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на части, то точку c можно включить в число точек деления этого отрезка. Пусть, например, разбиение имеет вид (рис. 4.1)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = c < x_{m+1} < \cdots < x_n = b.$$

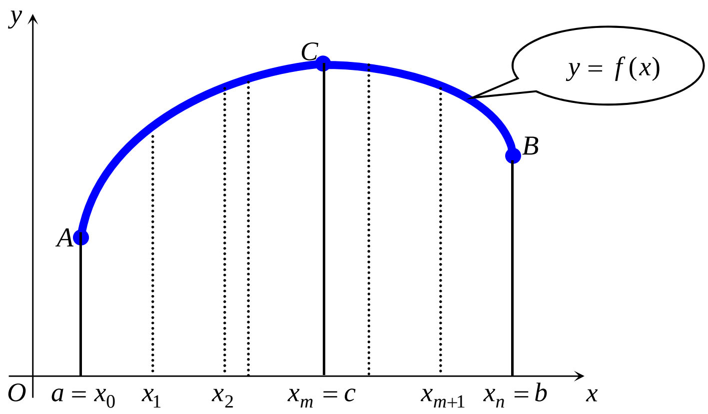


Рис. 4.1

Тогда интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k,$$

соответствующую отрезку $[a; b]$, можно разбить на две суммы:

- одну, соответствующую отрезку $[a; c]$,
- и другую, соответствующую отрезку $[c; b]$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\Delta x_k \sum_{k=m+1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\lambda = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0$, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k =.$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\Delta x_k + \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=m+1}^{n} f(c_k)\Delta x_k =.$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2) Пусть $a < b < c$. В силу доказанного утверждения имеем

$$\int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_c^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. ▼$$

Для случая, когда $f(x) > 0$ и $a < b < c$, свойство аддитивности определенного интеграла означает, что площадь криволинейной ции $aABb$ равна сумме площадей криволинейных трапеций $afACc$ и $cCVb$ (рис. 4.1).

Оценка интеграла, монотонность интеграла, теорема о среднем

5. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a; b]$, где $a < b$, и $f(x) > 0\ \forall x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

▲ В самом деле, любая интегральная сумма $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ для ции $f(x)$ на $[a; b]$ неотрицательна, так как

$$f(c_k) \geq 0, \Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

при любом разбиении отрезка $[a; b]$ на части $[x_{k-1};\ x_k]$ и при любом выборе точек $c_k \in [x_{k-1};\ x_k]$.

Переходя к пределу в неравенстве

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \geq 0 \text{ при } \lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \to 0,$$

получаем $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ▼

6. Монотонность интеграла

Если функции $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a; b]$, где $a < b$, и $f(x) \leq g(x)\ \forall \in [a; b]$, *то* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, *т.е. неравенство можно интегрировать*.

▲ Применяя оценку **1)** к функции $g(x) - f(x) \geq 0$, имеем

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\, dx \geq 0.$$

Но согласно свойству **3)**

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \geq 0,$$

откуда получаем доказываемое неравенство. ▼

Замечание. В случае, когда $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, это свойство геометрически означает, что площадь криволинейной трапеции aA_1B_1b не больше площади криволинейной трапеции aA_2B_2b (рис. 4.2).

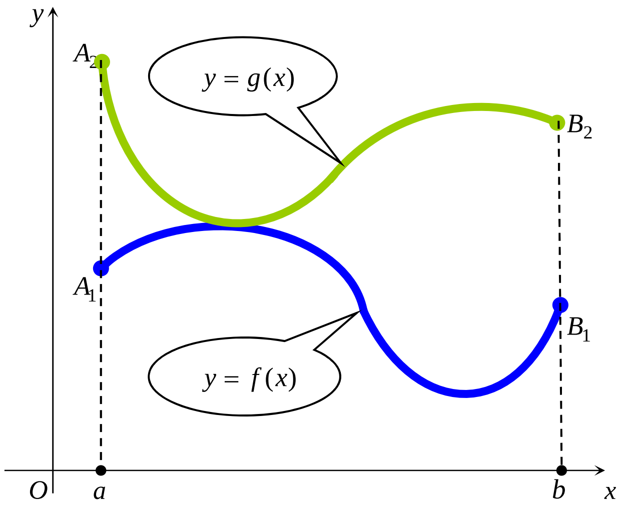


Рис. 4.2

7. Общая оценка интеграла. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a; b]$ где $a < b$, *то функция* $|f(x)|$ *также интегрируема на* $[a; b]$, *причем* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

▲ Интегрируя в пределах от a до b очевидное двойное неравенство

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

получим

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

т.е. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. ▼

8. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a; b]$, где $a < b$ *и выполняется неравенство* $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a; b]$, *то*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

где числа m *и* M *являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$.

▲ Так как $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a; b]$, то в силу свойства 2 (монотонности) получаем

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx.$$

Но так как

$$\int_a^b m dx = m\int_a^b dx = m(b-a), \int_a^b M dx = M\int_a^b dx = M(b-a),$$

то с учетом $\int_a^b dx = b - a$, (см. пример 2.1) получаем

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). ▼$$

Замечание. Смысл доказанных неравенств можно проиллюстрировать с помощью рис. 4.3. Как видно из рисунка площадь криволинейной трапеции $aAPQBb$, выражаемая определенным лом $\int_a^b f(x)dx$, больше площади прямоугольника aA_1B_1b, ной $m(b-a)$, и меньше площади прямоугольника aA_2B_2b, ной $M(b-a)$, где $(b-a)$ – основания прямоугольников, равные основанию трапеции, m и M – соответственно наименьшая и наибольшая ординаты трапеции.

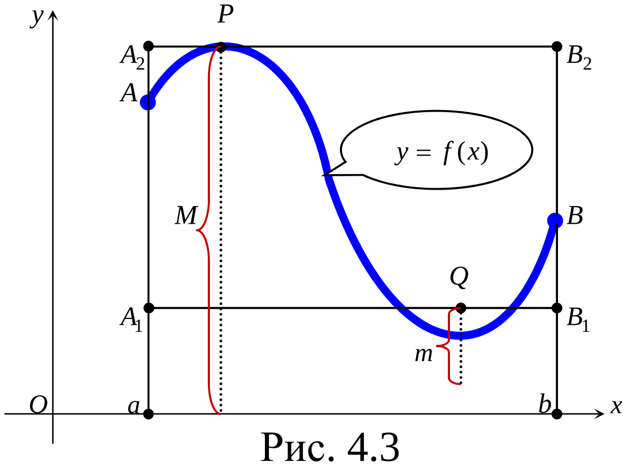


Рис. 4.3

Пример 4.1. Оценить интеграл $\int_0^\pi (3+\sin^6 x)dx$.

▲ Поскольку в данном случае $a = 0, b = \pi, b - a = \pi$, для функции $f(x) = 3 + \sin^6 x$

$$m = \min_{0\le x\le\pi}(3+\sin^6 x) = (3+\sin^6 x)\Big|_{\substack{x=0\\x=\pi}} = 3,$$

$$M = \min_{0\le x\le\pi}(3+\sin^6 x) = (3+\sin^6 x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 4,$$

то согласно свойству

$$4\pi \le 3\int_0^\pi (3+\sin^6 x)dx \le 4\pi. ▼$$

9. Теорема о среднем

Теорема 5.1. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то на этом отрезке найдется, по крайней мере, одна точка* c *такая, что имеет место равенство* $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c), a \leq c \leq b$.

▲ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по теореме Вейерштрасса она на этом отрезке имеет наименьшее значение m и наибольшее значение M

$$\text{наим}_{[a;b]} f(x) = m \leq f(x) \leq M = \text{наиб}_{[a;b]} f(x).$$

Отсюда в силу оценки **4** получаем

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Учитывая, что $b-a>0$, находим

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Положим

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu, \text{ где } m \leq \mu \leq M.$$

В силу непрерывности функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения, заключенные между m и M (по второй теореме Больцано-Коши). Поэтому найдется значение

$$x = c, a \leq c \leq b \text{ такое, что } f(c) = \mu, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \text{ или}$$

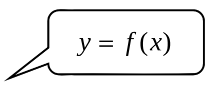
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), a \leq c \leq b.$$ ▼

Геометрический смысл теоремы о среднем состоит в следующем. Пусть функция $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b], a<b$. Тогда

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx, S_2 = (b-a)f(c),$$

где S_1 – площадь криволинейной трапеции $aABb$, S_2 – площадь прямоугольника $aMNb$, основанием которого является отрезок $[a;b]$, а высотой ордината точки $C(c;f(c))$.

Теорема о среднем утверждает, что на кривой AB (рис 5.1) найдется точка $C(c;f(c))$ такая, что $S_1 = S_2$.



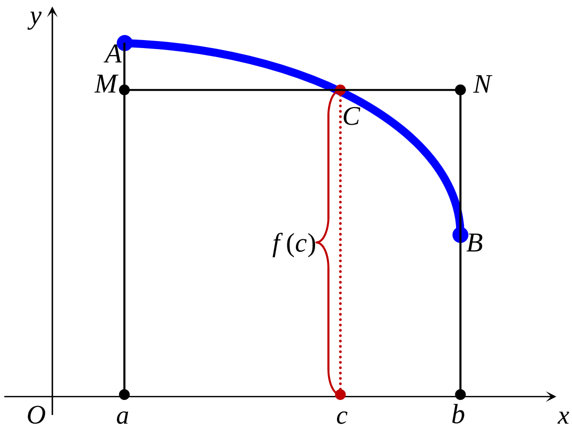


Рис. 5.1

Определение. Число $M[f(x)] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется ***средним значением функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$.

Первая теорема о среднем. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, причем $g(x) \geq 0$. Тогда найдется, по крайней мере, одна такая точка $c \in [a;b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Важный частный случай теоремы о среднем значении получается, если $g(x) \equiv 1$.

Вторая теорема о среднем. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и $g(x)$ – монотонная функция на отрезке $[a;b]$, то найдется точка $c \in [a;b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(c)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^c f(x)dx$$– формула Бонне.

5. Интеграл с переменным верхним пределом

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b. Если изменять, например, верхний предел так, чтобы не выйти за пределы отрезка $[a;b]$, то величина интеграла будет изменяться.

Рассмотрим функцию $f(x)$, интегрируемую на отрезке $[a;b]$. В предыдущем разделе доказано, что если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то для любого $x \in [a;b]$ она интегрируема на ке $[a;x]$, т.е. существует функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ (для удобства переменную интегрирования обозначили буквой t, так как x – верхний предел интегрирования). Эта функция называется ***интегралом с переменным верхним пределом***.

Геометрически функция $\Phi(x)$ представляет собой площадь заштрихованной на рисунке 5.1 криволинейной трапеции, если $f(x) > 0$.

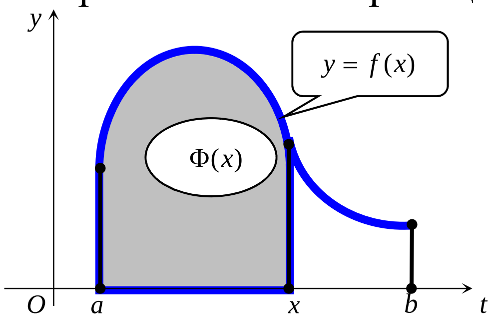


Рис.5.1

Докажем несколько свойств этой функции.

Теорема 5.1. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$, *то* $\Phi(x)$ *является непрерывной функцией на этом отрезке.*

▲ Аргументу x придадим приращение Δx такое, что $x + \Delta x \in [a;b]$, тогда по свойству аддитивности определенного интеграла получим

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt =.$$

$$= \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Применяя теорему о среднем, находим

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu \cdot \Delta x,$$

где $m \le \mu \le M$, m – наименьшее, M – наибольшее значения ции $f(x)$ на отрезке $[x; x+\Delta x]$; эти значения существуют, так как функция интегрируема, следовательно, и ограничена. Из двух последних равенств получаем, что

$$\Delta\Phi = \mu \cdot \Delta x,$$

откуда $\Delta\Phi \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $\Phi(x)$ – непрерывная функция. ▼

Теорема 5.2. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то функция* $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ *имеет производную в любой точке* $x \in [a;b]$, *причем* $\Phi'^{(x)} = f(x)$.

Другими словами, производная от определенного интеграла по его верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в верхнем пределе.

▲ Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ такое, что $x + \Delta x \in [a; b]$. Тогда функция $\Phi(x)$ получит приращение $\Delta\Phi$, равное в силу аддитивности определенного интеграла

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =.$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Применяя теорему о среднем значении, получим

$$\Delta\Phi = (x + \Delta x - x)f(x + \theta \cdot \Delta x) = \Delta x \cdot f(x + \theta \cdot \Delta x),$$

откуда

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(x + \theta \cdot \Delta x), 0 \leq \theta \leq 1.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая непрерывность функции $f(x)$ в любой точке $x \in [a; b]$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \theta \cdot \Delta x) = f(x),$$

т.е.

$$\Phi'(x) = f(x) \text{ или } \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)\ \forall x \in [a; b].$$ ▼

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $\forall x \in [a; b]$ будем иметь

$$\left(\int_x^b f(t)dt\right)' = \left(-\int_b^x f(t)dt\right)' =- \left(\int_b^x f(t)dt\right)' =- f(x).$$

Теорема 5.3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она на этом отрезке имеет первообразную функцию, а значит и неопределенный интеграл.*

▲ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то для любого x из этого отрезка существует определенный интеграл $\int_a^x f(t)dt$, т.е. существует функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ такая, что

$$\Phi'(x) = f(x)\ \forall x \in [a; b].$$

Это означает по определению, что $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Отсюда следует, что неопределенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на $[a; b]$, можно представить в виде

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C,$$

где C – произвольная постоянная величина. ▼

6. Формула Ньютона-Лейбница

Вычисление определенных интегралов на основании определения интеграла как предела интегральной суммы, как правило, связано с большими трудностями. Существует более удобный метод вычисления определенных интегралов, который основан на связи между неопределенным и определенным интегралами. Общность обозначений определенного $\int_a^b f(x)dx$ и неопределенного $\int f(x)dx$ интегралов подчеркивает тесную связь между ними,

хотя определенный интеграл есть число,
а неопределенный интеграл – совокупность первообразных функций

Связь определенного и неопределенного интегралов устанавливает формула Ньютона-Лейбница, которую называют ***основной теоремой*** интегрального исчисления.

Теорема 6.1 (Формула Ньютона-Лейбница). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$, *а функция* $F(x)$ *является ее первообразной на этом отрезке, тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

▲ Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt\,, x \in [a; b].$$

Согласно теореме 5.2 $\Phi'^{(x)} = f(x)$, т.е. $\Phi(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, а любые две первообразные для одной и той же функции отличаются друг от друга постоянным слагаемым, т.е. существует постоянная C такая, что

$$\Phi(x) = F(x) + C \text{ или } \int_a^x f(t)dt = F(x) + C \ \ \forall x \in [a; b].$$

Подставляя в это равенство значение $x = a$, имеем

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C \text{ и так как } \int_a^a f(t)dt = 0,$$

то $F(a) + C = 0$, откуда $C =- F(a)$.

Следовательно,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Положив $x = b$, получим

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

или, обозначая переменную t интегрирования через x,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$ ▼

Замечание. Разность $F(b) - F(a)$ принято условно записывать так $F(x)\Big|_a^b$, которая читается так: двойная подстановка от a до b для функции $F(x)$.

Пример 6.1. Найти $\int_1^3 \frac{dx}{x}$.

▲ Имеем $\int_1^3 \frac{dx}{x} = (\ln x)\Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$. ▼

7. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 7.1. *Если выполнены условия*:

1) *функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$;

2) *отрезок* $[a; b]$ *является множеством значений функции* $x = \varphi(t)$, *определенной на отрезке* $\alpha \le t \le \beta$ *и имеющей на нем непрерывную производную*;

3) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$,

то справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

▲ По формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где функция $F(x)$ - какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то есть $F(x) = f(x)\ \forall x \in [a; b]$.

Возьмем сложную функцию от t, а именно $\Phi(x) = F(\varphi(t))$, определенную на отрезке $[\alpha; \beta]$. Поскольку функции $F(x), x = \varphi(t)$ дифференцируемы на соответствующих отрезках, то по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\Phi'(t) = F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t).$$

Таким образом, функция $\Phi(t)$ есть первообразная для ции $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$, непрерывной на отрезке $[\alpha; \beta]$, и по формуле Ньютона-Лейбница получим

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) =.$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$ ▼

Замечание. Функцию $\varphi(t)$ выбирают так, чтобы новый интеграл $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ был более простым, чем первоначальный грал $\int_a^b f(x)dx$.

При вычислении определенного интеграла по доказанной формуле к старой переменной интегрирования не возвращаются.

Замечание. При использовании формулы замены переменной необходимо проверять выполнение перечисленных в теореме условий. Если эти условия нарушаются, то может быть получен и неверный результат.

Пример 7.1. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} dx$.

▲ 1) $\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi$.

2) $\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(1+\mathrm{tg}^2 x)} =$

$$= \left\{ \begin{matrix} t = \mathrm{tg}\, x & \text{пределы} \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} & \Big|\frac{x}{t}\Big|\frac{0}{0}\Big|\frac{\pi}{0} \end{matrix} \right\} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0.$$

Получен неверный результат, так как $\pi \neq 0$. Это произошло потому, что функция $t = \mathrm{tg}\, x$ разрывна при $x = \frac{\pi}{2}$ и не удовлетворяет условиям теоремы. ▼

Пример 7.2. Вычислить интеграл $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

▲ $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left\{ \begin{matrix} t = \sqrt{x+1}, x = t^2, dx = 2tdt & \Big|\frac{x}{t}\Big|\frac{0}{1}\Big|\frac{3}{2} \\ \text{замена пределов интегрирования} & \end{matrix} \right\} =$

$= \int_1^2 \frac{t^2-1}{t} 2tdt = 2\int_1^2 (t^2-1)dt = 2\int_1^2 t^2 dt - 2\int_1^2 dt =.$

$$= \frac{2t^3}{3}\Big|_1^2 - 2t\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) - 2(2-1) = \frac{8}{3}. \text{ ▼}$$

Пример 7.3. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

▲ $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left\{ x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{dt}{t^2} \Big|\frac{x}{t}\Big|\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{\frac{1}{2}} \right\} = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} =$

$= -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t \Big|_1^{\frac{1}{2}} = -\left(\arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 1\right) = -\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$ ▼

Пример 7.4. Вычислить интеграл $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

▲ $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = \left\{ \begin{matrix} t = \sqrt{e^x - 1}, e^x = t^2 + 1, \text{пределы} \\ e^x dx = 2tdt, dx = \frac{2tdt}{t^2+1} \ \Big|\frac{x}{t}\Big|\frac{0}{0}\Big|\frac{\ln 2}{1} \end{matrix} \right\} =$

$= \int_0^1 t \cdot \frac{2tdt}{t^2+1} = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2(t - \mathrm{arctg}\, t)\Big|_0^1 =$