ВВЕДЕНИЕ

Математическая экономика — это наука, которая использует математический аппарат в качестве метода исследования экономических систем и явлений. Таким образом, объектом изучения (или предметной областью) математической экономики является экономика как часть бытия или часть обширной области человеческой деятельности. Специфика математической экономики, ее методологическая особенность заключаются в том, что она изучает не сами экономические объекты и явления как таковые, а их математические модели. Ее цель — получение объективной экономической информации и выработка имеющих важное практическое значение рекомендаций. При изучении курса «Математическая экономика» на экономических специальностях вузов выделяют следующие разделы:

1. Финансовая математика (модели и методы финансово-экономических расчетов).
2. Теория риска и моделирование рисковых ситуаций.
3. Основы страховой математики и актуарные расчеты.
4. Математическое программирование в экономике.
5. Экономико-математические моделирование.

Настоящее учебное пособие «**Основы финансовой математики**» содержит систематизированное изложение широко распространенных понятий и методов финансовых вычислений и количественного анализа финансовых операций.

Предметом финансовой математики являются проверенные практикой методы количественного финансового анализа. Количественный финансовый анализ — одно из самых динамичных направлений экономической науки — сформировался на стыке науки о финансах и математики.

Собственно финансовая математика представляет собой совокупность методов определения изменения стоимости денег, происходящего вследствие их возвратного движения в процессе воспроизводства. Со структурной точки зрения — это стройная система аналитических формул и способов исчисления.

Объектом исследования финансовой математики являются финансовые операции, а также определенный круг методов вычислений, необходимость в которых возникает всякий раз, когда в условиях финансовой операции оговариваются конкретные значения трех видов параметров, а именно:

- стоимостные характеристики (размеры платежей, долговых обязательств, кредитов, стоимости фондов, объемы денежных средств и т.д.);
- временные данные (даты или сроки выплат, продолжительность периодов начисления или отсрочки платежей и т.д.);
- параметры, определяющие изменение стоимостных характеристик (процентные ставки).

К основным задачам финансовой математики относятся:

- измерение конечных финансовых результатов операции (сделки, контракты) для каждой из участвующих сторон;
- разработка планов выполнения финансовых операций, в том числе планов погашения кредитов;
- выявление зависимости конечных результатов от основных параметров операции, измерение взаимосвязи этих параметров, определение их допустимых граничных значений;
- нахождение параметров эквивалентного изменения условий операции;
- определение допустимых критических значений этих параметров и расчет параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий операции и др.

Разумеется, данный перечень не является исчерпывающим. Современная практика ставит новые задачи. Свидетельством важности дальнейшего развития финансового анализа служит тот факт, что несколько последних Нобелевских премий по экономике присуждены за работы именно в этой области знаний.

Следует отметить, что сегодня в условиях рыночной экономики в России началось активное возрождение финансовой математики. С одной стороны, в мировой финансовой науке в течение XX века интенсивно развивались различные математические методы расчетов, появилась международная система унифицированных математических обозначений для стандартных финансовых схем. С другой стороны, бурное развитие индустрии персональных компьютеров и повсеместное внедрение компьютерных технологий привели к тому, что программы расчета основных финансовых показателей реализованы в электронных таблицах на уровне, понятном широкому кругу пользователей персонального компьютера. К настоящему времени финансовая математика в России получила широкое распространение благодаря работам Г.П. Башарина, А.В. Бухвалова, Т.В. Ващенко, А.В. Идельсона, В.В. Капитоненко, В.В. Ковалева, Е. Кочовича, Я.С. Мелкумова, С.В. Мирошкиной, В.А. Морошкина, Г.Б. Поляка, В.Н. Румянцева, В.М. Симчера, Е.С. Стояновой, О.Ю. Ситниковой, В.А. Уланова, В.Е. Черкасова, Е.М. Четыркина и др.

Учебных пособий и других изданий, посвященных финансовым вычислениям, в России много, но они по преимуществу усложнены и громоздки. Это создает определенные трудности не только в понимании, но и в применении методов финансовых вычислений на практике, когда необходимо аргументированно, опираясь на системные знания предмета, защищать свои финансовые интересы.

Предлагаемое вашему вниманию учебное пособие состоит из двух частей. Первая часть посвящена основам традиционной финансовой математики. В ней дана теория процентных ставок. По мере изложения материала происходит знакомство с финансовыми функциями Microsoft Excel.

Во второй части приведены методы расчета различных финансовых потоков (потоков платежей), изложены основные критерии оценки инвестиционных проектов, рассмотрение сопровождается графиками и расчетами в электронных таблицах.

Использованный в книге материал прошел апробацию в лекциях по математической экономике, математическим методам финансового анализа, прочитанных автором на факультетах информатики и физико-математическом Магнитогорского государственного университета для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная информатика в экономике» и «Математические методы в экономике» соответственно. Учебное пособие может быть полезно для специалистов, применяющих финансовые вычисления в своей работе, преподавателей и студентов очного и заочного отделений экономических специальностей вузов.

Глава 1
ТЕОРИЯ ПРОЦЕНТОВ

1.1. Методы учета фактора времени в финансовых операциях

В основе финансовой математики лежит **понятие временной стоимости денег** (time value of money), то есть принцип неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Данный принцип является краеугольным камнем в современном финансовом менеджменте [3; 4; 5; 7 и др.]. Согласно этому принципу, сегодняшние поступления ценнее будущих. Соответственно будущие поступления обладают меньшей ценностью по сравнению с современными. Иными словами, «золотое» правило бизнеса гласит: **«Сумма, полученная сегодня, больше той же суммы, полученной завтра».**

Поясним данное правило на следующем условном примере.

✍ *Пример 1.1.1*

Предположим, что некто X обладает суммой PV* = 10000, которую он может положить в банк на депозит под 10% годовых.

В идеальном случае (отсутствие инфляции, налогообложения, риска неплатежеспособности банка и т.д.) проведение этой операции обеспечит получение через год суммы, равной уже 11000:

$$FV = (10000 + 10000 \cdot 0{,}1) = 10000\,(1 + 0{,}1) = 11000.$$

Если указанная сумма (10000) окажется в распоряжении X только через год, он будет вынужден отложить или даже отменить осуществление этой операции, теряя тем самым возможность получить доход в 1000.

Очевидно, что с этой точки зрения сумма PV* = 10000, получение которой ожидается только через год, является в данной ситуации для X менее ценной по сравнению с эквивалентной

---

* В англоязычной литературе для обозначения текущей стоимости капитала традиционно используется буквосочетание *PV* (от *Present Value of Money* — настоящая стоимость денег), для стоимости наращенной суммы *FV* (от *Future Value of Money* — будущая стоимость денег).

суммой, имеющейся к текущему моменту времени, поскольку обладание последней связано с возможностью заработать дополнительный доход (1000) и увеличить свои средства до 11000.

В этом же смысле текущая стоимость будущих 10000 для X эквивалентна той сумме, которую необходимо поместить в банк под 10% чтобы получить их год спустя:

$$10000 / (1 + 0{,}1) = 9090{,}91.$$

Продемонстрированная **неравноценность** двух одинаковых по величине, но разных по времени ($t_0 \neq t_1$) получения денежных сумм — явление, широко известное и осознанное в финансовом мире. Его существование обусловлено целым рядом причин. Вот лишь некоторые из них:

- любая имеющаяся в наличии денежная сумма в условиях рынка может быть немедленно инвестирована и спустя некоторое время принести доход;
- даже при небольшой инфляции покупательная способность денег со временем снижается;
- предпочтение в общем случае индивидуумами текущего потребления будущему и др.

Из принципа временной ценности денег вытекают, по крайней мере, два важных следствия:

- необходимость учета фактора времени при проведении финансовых операций;
- некорректность (с точки зрения анализа долгосрочных финансовых операций) суммирования денежных величин, относящихся к разным периодам времени.

Таким образом, необходимость учета фактора времени при проведении финансовых операций требует применения специальных количественных методов его оценки.

Наращение и дисконтирование

В финансовых расчетах учет фактора времени осуществляется с помощью методов **наращения** и **дисконтирования**, в основу которых положена техника процентных вычислений. С помощью этих методов осуществляется приведение денежных сумм, относящихся к различным временным периодам, к требуемому моменту времени в настоящем или будущем. При этом в качестве нормы приведения используется показатель, называемый **ставкой** и определяемый отношением **процентных денег**, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к некоторому базовому капиталу. Это отношение выражается в десятичных дробях или в процентах.

Под **процентными деньгами**, или процентами, понимается абсолютная величина дохода, получаемая в результате финансовой операции.

Эффективность любой финансовой операции может быть охарактеризована **ставкой**.

Процентная ставка (interest rate — *r*) определяется отношением процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к величине исходного капитала:

$$r = \frac{FV - PV}{PV}, \qquad (1.1.1)$$

где PV — настоящая стоимость;
FV — будущая стоимость.

В финансовых вычислениях данный показатель имеет и другие названия — «ставка процента», «процент», «рост», «норма прибыли».

В узком смысле процентная ставка представляет собой цену, уплачиваемую за использование заемных денежных средств. Однако в финансовых расчетах ее также часто используют в качестве измерителя уровня (нормы) доходности производимых операций, исчисляемого как отношение полученной прибыли к величине вложенных средств.

Учетная ставка (discount rate — *d*) определяется отношением процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к ожидаемой к получению (возвращаемой) сумме денежных средств:

$$d = \frac{FV - PV}{FV}. \qquad (1.1.2)$$

В финансовых вычислениях данный показатель так же называют «дисконт».

Не трудно вывести соотношение между ставками:

$$r = \frac{d}{1+d} \quad \text{или} \quad d = \frac{r}{1+r}. \tag{1.1.3}$$

Таким образом, эффективность любой финансовой операции может быть охарактеризована ставкой.

В любой простейшей финансовой сделке всегда присутствуют три величины, две из которых заданы, а одна является искомой (рис. 1.1.1).

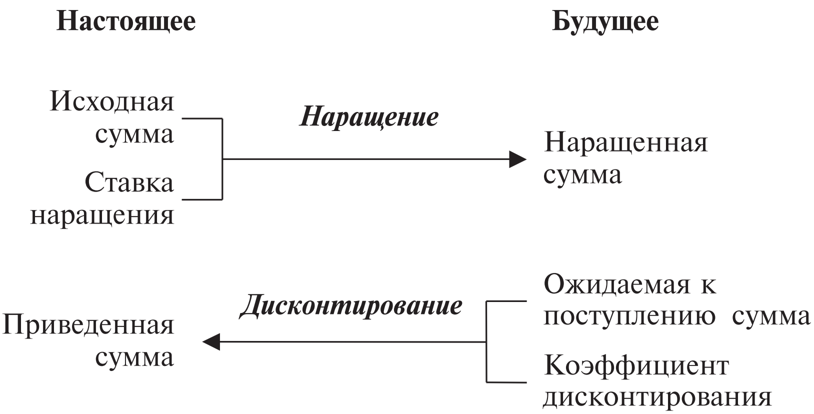

Рис. 1.1.1. Логика финансовых операций

Под **наращением** понимают процесс увеличения первоначальной суммы в результате начисления процентов. Экономический смысл метода наращения состоит в определении величины, которая будет или может быть получена из некоторой первоначальной (текущей) суммы в результате проведения финансовой операции.

Другими словами, метод наращения позволяет определить будущую величину FV текущей суммы PV через некоторый промежуток времени исходя из заданной процентной ставки r.

При проработке различного рода финансовых операций нередко приходится решать обратную задачу: известно, какая сумма в будущем нужна для получения некоторого результата, необходимо найти ее текущее значение. Иными словами: какую сумму нужно инвестировать сегодня, чтобы через определенный промежуток времени получить заданное значение? Для обозначения данного процесса используется термин **дисконтирование,** под которым понимается нахождение стоимостной величины *PV* на заданный момент времени по ее известному или предполагаемому значению в будущем *FV*. Название термина происходит от слова «дисконт» — скидка с цены долгового обязательства при авансированной выплате процентов за пользование кредитом.

В экономическом смысле величина *PV*, найденная в процессе дисконтирования, показывает современное (с позиции текущего момента времени) значение будущей величины *FV*. Нетрудно заметить, что дисконтирование, по сути, является зеркальным отражением наращения. Используемую при этом процентную ставку *r* называют **нормой дисконта**.

Таким образом, процесс, в котором заданы исходная сумма и ставка, в финансовых вычислениях называется **процессом наращения**, искомая величина называется **наращенной суммой**, а ставка — **ставкой наращения**. Процесс, в котором заданы ожидаемая в будущем к получению (возвращаемая) сумма и ставка, называется **процессом дисконтирования**, искомая величина называется **приведенной суммой**, а ставка — **ставкой дисконтирования.** В качестве ставки наращения или дисконтирования может выступать как процентная, так и учетная ставка.

Отношение текущей суммы к будущей величине называют ***диконт-фактором:***

$$r = \frac{FV - PV}{PV}. \tag{1.1.1}$$

Удобной и наглядной характеристикой (особенно при оценке вклада) является **индекс роста** суммы за данный период (B_t), показывающий, во сколько раз выросла величина капитала по отношению к величине капитала в конце предыдущего периода:

$$d = \frac{FV - PV}{FV}. \tag{1.1.2}$$

✍ *Пример 1.1.2*

Предприниматель получил на полтора года кредит в размере 40 тыс. руб. с условием возврата 50 тыс. руб. Определите процентную ставку, учетную ставку и дисконт-фактор за полтора года. Чему равен индекс роста суммы кредита?

Решение. Полагая в формуле (1.1.1) t = 1,5 года, PV = 40 тыс. руб., FV = 50 тыс. руб., получим величину процентной ставки за полтора года:

$$\mathrm{r}_{1,5} = \frac{50-40}{40} = 0{,}25, \text{ или, что равносильно, } \mathrm{r}_{1,5} = 25\%.$$

Аналогичным образом находим учетную ставку и дисконт-фактор:

$$\mathrm{d}_{1,5} = \frac{50-40}{40} = 0{,}2 \quad \text{или, } \mathrm{d}_{1,5} = 20\%;$$

$$\mathrm{v}_{1,5} = \frac{40}{50} = 0{,}8 \quad \text{или, } \mathrm{v}_{1,5} = 80\%.$$

Заметим, что величины $\mathrm{d}_{1,5}$, $\mathrm{v}_{1,5}$ можно было найти, используя и другие соотношения. Например:

$$\mathrm{d}_{1,5} = \frac{r_{1,5}}{1+r_{1,5}} = \frac{0{,}25}{1+0{,}25} = 0{,}2;$$

$$\mathrm{v}_{1,5} = 1-\mathrm{d}_{1,5} = 1-0{,}2 = 0{,}8.$$

Индекс роста $B_{1,5}$ суммы кредита показывает, во сколько раз возвращаемая сумма больше выданной:

$$\mathrm{B}_{1,5} = \frac{50}{40} = 1{,}25.$$

Число, равное сумме начального числа и начисленных на него процентов, называется **наращенным числом**. Число, равное разности между начальным числом и начисленными на него процентами, называется **уменьшенным числом**.

Проценты по отношению к начальному числу называются процентами *«со 100»,* а проценты по отношению к наращенному числу называются процентами «*на 100*».

Формула вычисления процентов *«со 100»:*

$$Q' = Q \cdot r. \tag{1.1.6}$$

Формула вычисления процентов *«на 100»:*

$$S' = \frac{S \cdot r}{1 + r}. \qquad (1.1.7)$$

Проценты *«на 100»* находят в задачах следующего типа: даны ставка процента и сумма двух слагаемых, одно из которых представляет собой проценты *«со 100»* другого; требуется найти одно из слагаемых.

Проценты по отношению к уменьшенному числу называются процентами *«во 100»*.

Формула вычисления процентов *«во 100»:*

$$K' = \frac{K \cdot r}{1 - r}. \qquad (1.1.8)$$

Проценты «*во 100*» находят в задачах следующего типа: даны ставка процента и разность двух слагаемых, одно из которых (вычитаемое) представляет собой проценты *«со 100»* другого; требуется найти одно из слагаемых.

✍ *Пример 1.1.3*

Найдите с 90 тыс. руб.: а) 15% «*со 100*»*;* б) 15% «*на 100*»*;* в) 15 % «во *100*».

Решение. Выражая 15% в десятичных дробях (т.е. получая 0,15), пользуемся последовательно формулами (1.1.6—1.1.8) при r = 0,15 *и* $Q = S = K = 90$ тыс. руб.:

а) $Q' = 90 \cdot 0{,}15 = 13{,}5$ тыс. руб.;

б) $S' = \frac{90 \cdot 0{,}15}{1 + 0{,}15} = 11{,}739$ тыс. руб.;

в) $K' = \frac{90 \cdot 0{,}15}{1 - 0{,}15} = 15{,}882$ тыс. руб.

Получили, что по отношению к одному числу *проценты «на 100»* меньше процентов *«со 100»,* которые, в свою очередь, меньше процентов *«во 100»*.

Для проверки найденных процентов *«на 100»* надо из данного числа (90 тыс. руб.) вычесть полученные проценты *«на 100»* (11,739 тыс. руб.), определив тем самым так называемое начальное число. Затем от начального числа найти проценты *«со 100»*, которые должны совпадать с найденными согласно условию задачи процентами *«на 100»*. Выполним эти действия:

$$90 - 11{,}739 = 78{,}261 \text{ тыс. руб.};$$

$$78{,}261 \cdot 0{,}15 = 11{,}739 \text{ тыс. руб.}$$

Для проверки найденных процентов *«во 100»* надо к данному числу (90 тыс. руб.) прибавить полученные *проценты «во 100»* (15,882 тыс. руб.) и затем от найденной суммы (т.е. начального числа 105,882 тыс. руб.) найти проценты *«со 100»*:

$$90 + 15{,}882 = 105{,}882 \text{ тыс. руб.};$$

$$105{,}882 \cdot 0{,}15 = 15{,}882 \text{ тыс. руб.}$$

1.2. Простые проценты

В финансовых расчетах используются следующие виды процентных ставок:

- в зависимости от базы для начисления процентов различают **простые** (постоянная база) и **сложные проценты** (переменная база);
- по принципу расчета различают **ставку наращения** — декурсивную ставку и **учетную ставку** — антисипативную ставку;
- по постоянству значения процентной ставки в течение действия финансовой операции — **фиксированные** и **плавающие** (фиксируется ли изменяющаяся во времени база и размер надбавки к ней — маржи).

Рассмотрим основные типы моделей финансовых расчетов на основе простых процентов.

Наращение простыми процентами

В общем случае, наращение по ставке простых процентов осуществляют по следующей формуле (*наращение может также осуществляться по учетной ставке d*):

$$FV = PV + PV \cdot r \cdot n = PV \cdot (1 + r \cdot n), \qquad (1.2.1)$$

где n — число периодов;
r — ставка процентов.

График роста по простым процентам представлен на рис. 1.2.1.

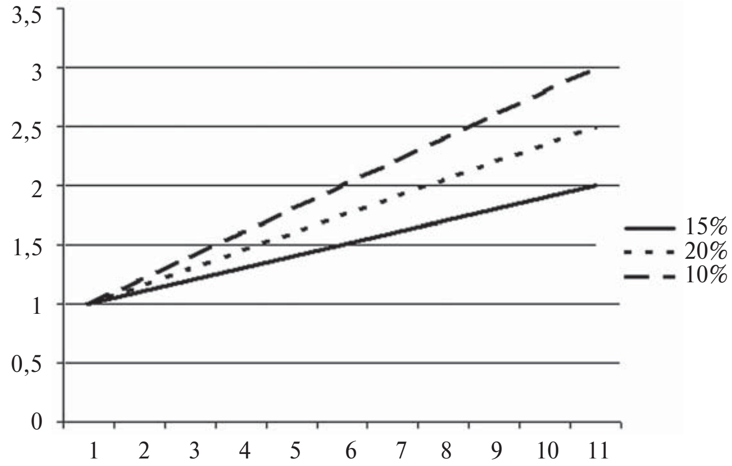

Рис. 1.2.1. График наращения по простым процентам

✍ *Пример 1.2.1*

Вы поместили в банк вклад 10 тыс. руб. под простую процентную ставку 26% годовых. Какая сумма будет на вашем счете через 3 года? Какова будет величина начисленных процентов? Если банк осуществляет регулярные выплаты начисленных процентов, то какую сумму вы будете получать: а) каждый год; б) каждый квартал?

Решение. Полагая в формуле (1.2.1) $PV = 10$ тыс. руб., $n = 3$ года, $r = 0,26$, получим наращенную сумму через 3 года, если не происходят выплаты простых процентов:

$$FV = 10 \cdot (1+3 \cdot 0,26) = 17,8 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, величина начисленных процентов составит:

$$r = FV - PV = 17,8 - 10 = 7,8 \text{ тыс. руб.}$$

Величина начисленных простых процентов, выплачиваемых ежегодно равна ($l = 3$) $r = 7,8/3 = 2,6$ тыс. руб. При ежеквартальных выплатах $l = 0,25$ года, и поэтому величина каждой выплаты составит:

$$r = 0,25 \cdot 0,26 = 0,65 \text{ тыс. руб.}$$

Заметим, что проценты на уже начисленные проценты не начисляются независимо от срока хранения вклада. Поэтому имеет смысл начисленные простые проценты регулярно получать и использовать, например, для иных инвестиций.

В формуле 1.2.1 величину $1 + r \cdot n$ (1.2.2) называют **множителем (коэффициентом) наращения**, или аккумулирующим множителем. Множитель наращения не зависит от величины начальной суммы и показывает, во сколько раз вырос первоначальный капитал.

В случае когда продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет n, наращение по простым процентам определяется по формуле:

$$FV = PV \cdot (1 + \frac{t}{T} r), \qquad (1.2.3)$$

где t — продолжительность финансовой операции в днях;
T — временная база — количество дней в году.

При проведении финансовых операций возможны различные варианты расчетов в зависимости от значений t и T.

Временную базу (T) можно представить по-разному:

- условно состоящую из 360 дней (12 месяцев в году по 30 дней в каждом). В этом случае речь идет об **обыкновенном** (ordinary interest), или **коммерческом, проценте**;
- взять действительное число дней в году (365 или 366 дней). В этом случае получают **точный процент** (exact interest).

Число дней финансовой операции (t) также можно по-разному определять:

- условно, исходя из того, что продолжительность любого целого месяца составляет 30 дней, а оставшиеся дни от месяца считают точно, — в результате получают так называемое **приближенное** число дней финансовой операции;
- используя прямой счет или специальные таблицы порядковых номеров дней года, рассчитывают фактическое число дней между датами — в этом случае получают **точное** число дней.

Таким образом, если время финансовой операции выражено в днях, то расчет простых процентов может быть произведен одним из трех возможных способов:

- точный процент с точным числом дней, обозначаемый условно как **365/365,** или **АСТ/АСТ**, или «английская практика расчета». Этот способ применяется коммерческими банками многих стран, например, в Великобритании, в Португалии, США;

- обыкновенные проценты с точным числом дней, обозначаемые как **365/360,** или **АСТ/360** (t — точное, $T = 360$), или «французская практика расчета». Этот способ имеет распространение во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии;
- обыкновенные проценты с приближенным числом дней, обозначаемые как **360/360** (t — приблизительное, считается, что в месяце 30 дней, $T = 360$). Этот способ часто называют «германская практика расчета». Он принят в практике коммерческих банков Германии, Швеции, Дании.

Следует помнить о том, что при определении продолжительности финансовой операции дата начала и дата окончания финансовой операции считаются за один день.

✍ *Пример 1.2.2*

Предпринимателю 14 февраля была предоставлена ссуда в размере 20 тыс. руб. с погашением 14 июля того же года под процентную ставку 30% годовых. Рассчитайте различными способами сумму к погашению, если начисляются простые проценты и год невисокосный.

Решение. Величина уплачиваемых процентов за пользование ссудой зависит от числа дней, которое берется в расчет. Для упрощения процедуры расчета точного числа дней без использования компьютера применяются специальные таблицы (одна — для обычного года, вторая — високосного), в которых все дни в году последовательно пронумерованы. Продолжительность финансовой операции определяется вычитанием номера первого дня из номера последнего дня.

Находим по таблице порядковых номеров дней в обычном году (Прил. В) точное число дней финансовой операции, рассматриваемой в нашей задаче: $195 - 45 = 150$ дней. Естественно, это число можно найти и непосредственно, исходя из количества дней в соответствующих месяцах.

Приближенное число дней ссуды состоит из 16 дней февраля (30–14); 120 дней (по 30 дней четырех месяцев: март, апрель,