

## ПРЕДИСЛОВИЕ

**И**сследование распространения электромагнитных волн в различных средах, законов их излучения и поглощения есть задача классической электродинамики, основы которой были положены великим английским ученым Максвеллом в его уравнениях, впервые опубликованных в 1864 г. С тех пор классическая электродинамика прошла длинный путь развития и в настоящее время является одной из наиболее важных частей теоретической физики, находящей множество практических применений: радиолокация, телекоммуникации, радиоастрономия, ускорительная техника, радиоспектроскопия, технология, биология и медицина. При этом используются волны в очень широком спектральном диапазоне — от десятков килогерц до сотен гигагерц. Распространение волн различных участков этого спектра обладает своими особенностями, которые необходимо учитывать при построении соответствующих систем.

В последнее время появились новые материалы, распространение электромагнитных волн в которых обладает рядом особенностей — это фотонные кристаллы, двумерные структуры, такие как графен, и некоторые другие.

Для анализа распространения электромагнитных волн широко используются методы аналитической и вычислительной математики, которые необходимо правильно применять к той или иной конкретной задаче.

Классической электродинамике посвящено много книг и учебников, среди которых можно отметить книги К. Шимони, В. В. Никольского и Т. И. Никольской, Л. Д. Гольдштейна и Н. В. Зернова и ряд других. Однако, эти книги

изданы достаточно давно и в них не описываются последние достижения электродинамики.

Ввиду фундаментальности классической электродинамики и многочисленности ее приложений, основы этой области знаний необходимо знать инженерам и исследователям, специализирующимся в области микроволновой электроники и микроволновой техники, что и послужило основанием для издания настоящей книги. В ее основу положен курс лекций по электродинамике, читаемый на факультете электроники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ».

Предполагается, что студенты, изучающие классическую электродинамику, ознакомились с такими разделами высшей математики, как «векторная алгебра и векторный анализ», «ряды Фурье и преобразования Фурье», «уравнения в частных производных», а также с разделами физики «электромагнетизм» и «оптика».

Автор выражает искреннюю благодарность своим коллегам по кафедре, ценные замечания которых позволили улучшить содержание книги, а также сотрудникам издательства «Лань», помогавшим готовить книгу к печати.

## ВВЕДЕНИЕ

Электродинамика — часть теоретической физики, в которой изучается электромагнитное взаимодействие заряженных частиц. Согласно современным представлениям, это взаимодействие осуществляется путем обмена квантами электромагнитного поля — фотонами. Фотоны обладают свойствами как частицы, так и волны, не имеют массы покоя и поэтому всегда находятся в движении. Скорость их распространения  $c = 299792458$  м/с — одна из фундаментальных физических констант, называемая скоростью света в свободном пространстве. Законы излучения и поглощения фотонов заряженными частицами изучаются в квантовой электродинамике.

В большинстве макроскопических электромагнитных явлений корпускулярные свойства фотонов практически не проявляются (за некоторыми исключениями — например, явление фотоэффекта). Так как в них участвует огромное число фотонов, допустимо считать, что пространство, в котором находятся заряженные тела, заполнено особым видом материи — электромагнитным полем. Существование электромагнитного поля проявляется в том, что оно воздействует с определенной силой

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (B.1)$$

называемой силой Лоренца, на заряженные тела. В этом выражении электромагнитное поле характеризуется вектором напряженности электрического поля  $E(\mathbf{r}, t)$  и вектором магнитной индукции  $B(\mathbf{r}, t)$ ;  $q, \mathbf{v}$  — электрический заряд и скорость тела в данной инерциальной системе

координат;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор тела в момент времени  $t$ . Поскольку электромагнитное поле воздействует на заряженные тела с определенной силой, оно способно производить работу по их перемещению. Следовательно, оно обладает энергией, массой и количеством движения. Закономерности протекания макроскопических электромагнитных процессов в различных средах (без учета квантовых эффектов) составляют предмет изучения классической электродинамики.

Свойства электромагнитного поля существенно зависят от характера его изменения во времени. Во многих случаях зависимостью электромагнитного поля от времени можно пренебречь. Такие поля называют *статическими*. В данной книге они не рассматриваются. Часто можно полагать, что электромагнитное поле изменяется во времени по гармоническому закону

$$a(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi), \quad (B.2)$$

где  $a$  — любая составляющая вектора напряженности или индукции поля,  $A$  — ее амплитуда,  $\phi$  — начальная фаза,  $\omega$  — круговая частота, связанная с частотой изменения поля  $f$ , периодом изменения  $T$  и длиной волны в свободном пространстве  $\lambda$  соотношениями

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T = 2\pi c/\lambda.$$

Частоты изменения наблюдаемых электромагнитных полей лежат в очень широких пределах. Весь спектр электромагнитных колебаний разделен на отдельные диапазоны, в каждом из которых электромагнитное поле обладает определенными особенностями распространения и взаимодействия с веществом. Микроволновый ди-

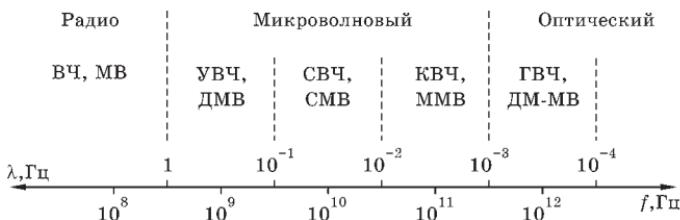


Рис. В.1  
Часть спектра электромагнитных колебаний

пазон, в частности, расположен между радио- и оптическим диапазонами (рис. В.1). Он занимает участок спектра между частотами  $f_{\min} = 3 \cdot 10^8$  Гц (длина волны в свободном пространстве  $\lambda_{\max} = 1$  м) и  $f_{\max} = 3 \cdot 10^{11}$  Гц ( $\lambda_{\min} = 1$  мм). В радиодиапазоне характерные размеры устройства, как правило, много меньше длины волны, что позволяет использовать для анализа приближенные методы теории цепей. В оптическом диапазоне, напротив, размеры большинства объектов много больше длины волны, и к их анализу применимы методы геометрической оптики. В микроволновом диапазоне характерные размеры устройств соизмеримы с длиной волны. Это обстоятельство вынуждает производить анализ микроволновых устройств с помощью строгих методов классической электродинамики.

Микроволновый диапазон, в свою очередь делится на три поддиапазона:

- $f = 0,3 \dots 3$  ГГц,  $\lambda = 1 \dots 0,1$  м — ультравысокие частоты (дециметровые волны);
- $f = 3 \dots 30$  ГГц,  $\lambda = 10 \dots 1$  см — сверхвысокие частоты (сантиметровые волны);
- $f = 30 \dots 300$  ГГц,  $\lambda = 10 \dots 1$  мм — крайне высокие частоты (миллиметровые волны).

Иногда к микроволновому диапазону относят также поддиапазоны, прилегающие к нему со стороны радиодиапазона:

- $f = 30 \dots 300$  МГц,  $\lambda = 10 \dots 1$  м — высокие частоты (метровые волны),

и со стороны оптического диапазона:

- $f = 0,3 \dots 3$  ТГц,  $\lambda = 1 \dots 0,1$  мм — гипервысокие частоты (децимиллиметровые волны).

Освоение микроволнового диапазона началось позже, чем соседних, — только в 30-х гг. прошлого века. Это объясняется серьезными трудностями, с которыми столкнулись ученые и инженеры при разработке соответствующих технологий:

- соизмеримостью длины волны и характерных размеров приборов и устройств, что делает малоэффективным применение обычных линий передачи и колебательных контуров;

- соизмеримостью периода колебаний и времени проleta носителей заряда в активной области прибора. Проявляющаяся при этом инерция носителей заряда нарушает нормальную работу приборов, эффективно функционирующих в радиодиапазоне;
- незначительной, по сравнению с энергией теплового движения частиц при обычной температуре, энергией кванта электромагнитного поля, что затрудняет использование квантовых эффектов, успешно применяющихся в оптическом диапазоне для генерации и регистрации электромагнитных (световых) волн.

В то же время было известно, что электромагнитные колебания и волны микроволнового диапазона обладают целым рядом преимуществ по сравнению с другими диапазонами:

- большей информационной емкостью каналов связи, пропорциональной произведению ширины полосы пропускания канала на отношение мощности сигнала к мощности шума. Так как ширина полосы пропускания канала пропорциональна несущей (центральной) частоте, а мощность шумов атмосферного, космического и искусственного происхождения в микроволновом диапазоне наименьшая, именно в этом диапазоне достигается наибольшая скорость передачи информации по открытым каналам связи;
- возможностью направленной передачи и приема электромагнитной энергии, так как размеры антенн могут быть много больше длины волны;
- прозрачностью земной атмосферы для электромагнитных волн микроволнового диапазона (за исключением нескольких узких полос поглощения в миллиметровом поддиапазоне), что открывает возможность приема излучения от внеземных объектов и космической связи;
- избирательным поглощением микроволнового излучения веществом, особенно при низких температурах, позволяющим анализировать тонкие детали строения вещества.

Указанные особенности и преимущества обусловили разработку специальных методов генерации, усиления и

преобразования электромагнитных колебаний микроволнового диапазона, что потребовало значительных усилий многочисленных коллективов ученых и инженеров и больших материальных затрат. Эти усилия, стимулированные, прежде всего, необходимостью развития радиолокации, привели к тому, что в настоящее время электромагнитные колебания и волны микроволнового диапазона исследуются и применяются в самых разнообразных областях науки и техники. К важнейшим из них относятся:

- 1) радиолокация (исторически первая и до сих пор наиболее важная область применения электромагнитного поля микроволнового диапазона);
- 2) сотовые системы мобильной связи;
- 3) глобальные спутниковые системы мобильной связи и позиционирования;
- 4) системы ближней беспроводной связи (Blue Tooth, Wi-Fi, UWB и др.);
- 5) дальняя радиорелейная и кабельная связь;
- 6) космическая связь (непосредственное телевизионное вещание, связь с космическими аппаратами и орбитальными станциями);
- 7) радиоастрономия (прием и анализ микроволнового излучения космических объектов);
- 8) экспериментальная физика (нагрев и диагностика плазмы, радиоспектроскопия);
- 9) метрология (атомные стандарты времени и частоты);
- 10) технология (нагрев, сушка, спекание различных материалов);
- 11) энергетика (передача мощности на расстояние, питание интенсивных источников света);
- 12) химия (микроволновый органический синтез, пропаривание);
- 13) биология и медицина (изучение влияния микроволнового излучения на биологические объекты, анализ их собственного электромагнитного излучения, лечение различных заболеваний).

Основы классической теории электромагнитного поля были заложены М. Фарадеем, Дж. Максвеллом, Г. Герцем, Г. Лоренцем, А. Эйнштейном. Основы теории микроволновых линий передачи, резонаторов, замедляющих

систем заложили Л. Хаксли, Л. Бриллуэн, С. Рамо, Дж. Уинери, Р. Фано, Дж. Саусворт, Н. Марковиц, Л. Левин, Дж. Гинзтон и целый ряд других ученых. Большой вклад в электродинамику и микроволновую технику внесли российские ученые — И. Е. Тамм, Л. И. Мандельштам, Я. Н. Фельд, Л. А. Вайнштейн, Ю. А. Юров, Б. В. Каценеленбаум, Г. В. Кисунько, В. В. Никольский и многие другие исследователи.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Скалярные величины обозначаются символами, набранными курсивом:  $a, v, A, B$  и т. д. Векторные и тензорные величины, а также матрицы обозначаются символами, набранными прямым полужирным шрифтом:  $a, b, A, B$  и т. д. В необходимых случаях обозначения тензоров и матриц заключаются в прямые скобки:  $|A|, |B|$ , или надчеркиваются:  $\bar{e}, \bar{\mu}$ . Комплексные амплитуды обозначаются точкой над символом:  $\dot{A}, \dot{A}$ . Величины электрического типа обозначаются верхним индексом  $e$ , а величины магнитного типа — верхним индексом  $m$ .

- A**<sup>e,m</sup> — векторные потенциалы электрического и магнитного типов;  
**B** — магнитная индукция;  
**B** — реактивная проводимость;  
 $c = 2,9979 \cdot 10^8$  м/с — скорость света в вакууме;  
**C** — емкость;  
**D** — электрическая индукция;  
 $e = 2,71828$  — основание натуральных логарифмов;  
 $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл — абсолютная величина заряда электрона;  
**E** — напряженность электрического поля;  
**f** — частота;  
**g** — фактор Ланде;  
**G** — активная проводимость;  
**H** — напряженность магнитного поля;  
**i** — мнимая единица;  
 $i, I$  — ток;  
**j, J** — плотность тока;  
 $k, k$  — волновое число, волновой вектор;  
**L** — индуктивность;  
**M** — взаимная индуктивность;  
**M** — намагниченность;  
 $n$  — показатель преломления среды;

$n_p, n_g$  — замедление фазовой и групповой  
 скоростей волны;  
 $P$  — мощность;  
 $p$  — плотность мощности (плотность потока  
 энергии);  
 $P$  — электрическая поляризация;  
 $Q$  — добротность;  
 $q$  — заряд;  
 $R$  — активное сопротивление;  
 $u, U$  — напряжение (разность потенциалов);  
 $v$  — скорость;  
 $W$  — энергия;  
 $w$  — плотность энергии;  
 $X$  — реактивное сопротивление;  
 $Y$  — полная проводимость;  
 $Y_0$  — характеристическая проводимость  
 среды;  
 $Y_c$  — характеристическая проводимость  
 линии передачи;  
 $Y_b$  — волновая проводимость линии передачи;  
 $Z$  — полное сопротивление;  
 $Z_0$  — характеристическое сопротивление  
 среды;  
 $Z_c$  — характеристическое сопротивление  
 линии передачи;  
 $Z_b$  — волновое сопротивление линии передачи;  
 $\alpha$  — постоянная затухания;  
 $\beta$  — постоянная фазы;  
 $\gamma = 3,52 \cdot 10^4 \text{ Гц/(А/м)}$  — гиromагнитная постоянная;  
 $\Gamma$  — вектор Герца;  
 $\delta$  — глубина проникновения;  
 $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость;  
 $\eta_0$  — характеристическое сопротивление  
 вакуума;  
 $\kappa$  — диэлектрическая восприимчивость;  
 $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве;  
 $\lambda_c$  — критическая длина волны в линии  
 передачи;  
 $\lambda_b$  — длина волны в линии передачи;  
 $\mu$  — магнитная проницаемость;  
 $\Pi$  — вектор Пойнтинга;  
 $\rho$  — плотность объемного заряда;  
 $\rho_c$  — удельное сопротивление;  
 $\rho_b$  — волновое сопротивление резонатора;  
 $\sigma$  — электропроводность;  
 $\tau$  — постоянная релаксации;  
 $\phi$  — фаза;  
 $\phi^e, \phi^m$  — скалярный потенциал;  
 $\Phi$  — магнитный поток;  
 $\chi$  — магнитная восприимчивость;  
 $\psi$  — подвижность;  
 $\omega$  — круговая частота.

## ГЛАВА 1

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

### 1.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

**В** основе классической электродинамики лежат *уравнения Максвелла*, впервые сформулированные им в 1864 г. В современных обозначениях они имеют следующий вид:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}; \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0; \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho; \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

Все величины, входящие в эти уравнения, являются функциями координат (радиус-вектора  $\mathbf{r}$ ) и времени  $t$ . Плотность электрического тока  $\mathbf{J}$  и удельная плотность заряда  $\rho$  характеризуют распределение источников электромагнитного поля в пространстве и во времени. С этими величинами связаны «функции источников» — *электрическая индукция* (электрическое смещение)  $\mathbf{D}$  и *напряженность магнитного поля*  $\mathbf{H}$ . Кроме этого, в уравнения Максвелла входят «силовые функции» — *напряженность электрического поля*  $\mathbf{E}$  и *магнитная индукция*  $\mathbf{B}$ <sup>1</sup>, определяющие в соответствии с выражением (B.1) силу, действующую на заряженные тела. Знаком « $\times$ » обозначается векторное произведение, а знаком « $\cdot$ » — скалярное. Знак скалярного произведения опускается, если это не может вызвать неправильного толкования.

<sup>1</sup> Логичнее было бы называть напряженностью магнитного поля вектор  $\mathbf{B}$ , а магнитной индукцией — вектор  $\mathbf{H}$ , однако исторически сложились используемые в книге определения.

Плотность электрического тока, входящая в правую часть уравнения (1.1), складывается из двух составляющих:  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{пр}} + \mathbf{J}_{\text{ст}}$ , где  $\mathbf{J}_{\text{пр}}$  — *плотность тока проводимости*, обусловленная движением зарядов под действием электромагнитного поля, а  $\mathbf{J}_{\text{ст}}$  — *плотность стороннего тока*, обусловленного силами неэлектромагнитного происхождения (например, химическими реакциями, градиентом температуры и т. п.) или внешними по отношению к данной задаче.

Рассмотрим некоторые следствия из уравнений Максвелла. Применив операцию дивергенции к обеим частям (1.1), найдем

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) = 0,$$

так как дивергенция ротора любого вектора равна нулю. Изменив порядок дифференцирования по координатам и времени в правой части уравнения, с учетом (1.3) получим *уравнение непрерывности*

$$\nabla \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = 0. \quad (1.5)$$

Для выяснения физического смысла полученного выражения проинтегрируем его по объему  $V$ , ограниченному замкнутой поверхностью  $S$ . Изменяя порядок дифференцирования и интегрирования и используя теорему Гаусса, получим закон сохранения электрического заряда:

$$I + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0,$$

где  $Q$  — заряд, содержащийся в объеме  $V$ ,  $I$  — ток, протекающий через поверхность  $S$ . Таким образом, этот закон содержится в уравнениях Максвелла и может быть выведен из них как следствие. Уравнение непрерывности (1.5) выражает закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме.

Величину  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , которую Дж. Максвелл ввел в уравнение (1.1), он назвал *плотностью тока смещения*  $\mathbf{J}_{\text{см}}$ . Введя *плотность полного тока*  $\mathbf{J}_{\text{п}} = \mathbf{J}_{\text{см}} + \mathbf{J}_{\text{пр}} + \mathbf{J}_{\text{ст}}$ , это уравнение можно записать в виде

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{п}}. \quad (1.6)$$

Применив к (1.6) операцию дивергенции, получим закон полного тока:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_n = 0. \quad (1.7)$$

Согласно этому закону, поле полного тока не имеет источников, его линии либо замкнуты, либо начинаются в бесконечности и уходят в бесконечность. Поток вектора  $\mathbf{J}_n$  (полный ток  $I_n = \oint_S \mathbf{J}_n d\mathbf{S}$ ) через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю. Из уравнения (1.4) следует, что аналогичными свойствами обладает поле вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ .

Как известно, в настоящее время уединенные магнитные заряды (монополи) в природе не обнаружены, хотя теория предсказывает их образование на ранних стадиях эволюции Вселенной. Соответственно, отсутствуют и магнитные токи. Тем не менее, для упрощения решения многих практических задач часто искусственно вводят плотность магнитного тока  $\mathbf{J}^m$  и заряда  $\rho^m$ . В результате такой модификации уравнения Максвелла приобретают симметричный вид:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}^e; \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{J}^m; \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho^e; \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho^m. \quad (1.11)$$

В этих уравнениях верхним индексом  $e$  обозначены плотности электрических токов и зарядов, соответственно.

Выделим в пространстве, занимаемом электромагнитным полем, некоторую поверхность  $S$ , ограниченную замкнутым контуром  $L$ . Вычислив интеграл по этой поверхности от обеих частей уравнения (1.8) и воспользовавшись теоремой Стокса для преобразования левой части, получим обобщенный закон Ампера:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} = I^e, \quad (1.12)$$

где  $\Psi = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}$  и  $I^e = \int_S \mathbf{J}^e d\mathbf{S}$  — поток вектора электрической индукции и электрический ток через поверх-

ность  $S$ . Проделав аналогичные преобразования с уравнением (1.9), получим закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -I^m. \quad (1.13)$$

В этом выражении  $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$  и  $I^m = \int_S \mathbf{J}^m d\mathbf{S}$  — поток вектора магнитной индукции и магнитный ток через поверхность  $S$ .

Проинтегрируем уравнения (1.10) и (1.11) по конечному объему  $V$ , ограниченному замкнутой поверхностью  $S_0$ , и используем теорему Гаусса. В результате получим

$$\oint_{S_0} \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q^e; \quad (1.14)$$

$$\oint_{S_0} \mathbf{B} d\mathbf{S} = Q^m. \quad (1.15)$$

В выражениях (1.14), (1.15)  $Q^{e,m} = \int_V \rho^{e,m} dV$  — электрический и магнитный заряды, содержащиеся в объеме  $V$ .

Соотношения (1.12)–(1.15) образуют систему уравнений Максвелла в интегральной форме. Эта система обладает большей общностью, чем дифференциальные уравнения Максвелла, так как применима и в том случае, когда функции поля имеют разрывы в объеме  $V$  и (или) на поверхности  $S$ .

В уравнениях (1.8)–(1.11) источниками поля служат как электрические, так и магнитные токи и заряды. В соответствии с принципом суперпозиции, справедливым в линейных средах, полное поле можно рассматривать как сумму поля, возбуждаемого электрическими источниками (поле «электрического» или Е-типа) и поля, возбуждаемого магнитными источниками (поле «магнитного» или Н-типа):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^m; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^m; \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^m; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^e + \mathbf{B}^m. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Поле Е-типа при этом удовлетворяет уравнениям (1.1)–(1.4), а поле Н-типа — дуальным уравнениям

$$\nabla \times \mathbf{H}^m - \frac{\partial \mathbf{D}^m}{\partial t} = 0; \quad (1.17)$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно  
в интернет-магазине  
«Электронный универс»  
[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)