

ПРЕДИСЛОВИЕ

С недавних пор обучение в высших учебных заведениях стало менее строгим, и я слышал, что бывают студенты электротехнических факультетов, которые плохо понимают работу электрических цепей. И я сам, преподавая в университете как раз на подобном факультете, сталкивался со студентами, которые не могут решить простых задач, связанных с электрическими цепями. И я стал думать, как же решить эту проблему. Я не смог найти никакого магического средства, но понял, что многие студенты, не понимающие электрических цепей, не понимают комплексных чисел. И тогда, посоветовавшись с издательством Ohmsha, мы решили сделать эту книгу.

Мнимое число, по-английски Imaginary number, – это число, созданное воображением. При этом почему-то по-русски оно называется «мнимым», и это название вызывает не самые хорошие ассоциации. Но разве числа, называемые действительными, при этом существуют в реальном мире? Люди придумали числа, но природные явления до чисел и после их появления одинаковы. Просто с помощью чисел и формул люди описывают явления природы, чтобы лучше их понять.

Итак, комплексные числа являются мощным инструментом для расчёта колебаний силы тока и напряжения в электрических цепях, особенно для переменного тока. А поскольку на электротехнических факультетах изучают в основном переменный ток, то если студент не умеет представлять напряжение и силу тока в виде комплексных чисел, то он не сможет получать хорошие оценки. Кроме того, есть и множество других специализаций, так или иначе связанных с электричеством, то есть и на квалификационных экзаменах других факультетов часто попадаются задачи по переменному току, для решения которых нужно использовать мнимые и комплексные числа.

Моя цель – чтобы эту книгу в качестве руководства по мнимым и комплексным числам прочитало как можно больше людей. И если кто-то из них после прочтения будет лучше разбираться в комплексных числах, почувствует интерес к решению задач по электрическим цепям с использованием мнимых и комплексных чисел, я буду счастлив.

Я хочу поблагодарить за помощь и советы по работе над книгой всех сотрудников отдела по развитию издательства Ohmsha, сделавших интересными и понятными мою скучную рукопись господина Нагакава Наруки и господина Исино Тои, а также всех сотрудников TREND-PRO.

И в заключение хочу подчеркнуть, что эта книга не является профессиональным руководством, и с точки зрения математики в ней, возможно, появляются не совсем корректные выражения. Но главной задачей этой книги было дать простое и наглядное объяснение для начинающих, что из себя представляют комплексные и мнимые числа. И именно это ставилось во главу угла.

Ноябрь 2010

Оучи Масаси

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----------|
| Пролог. НАЧАЛО ИСТОРИИ | 1 |
| 1. ВИДЫ ЧИСЕЛ | 13 |
| 1. ВИДЫ ЧИСЕЛ | 17 |
| ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ | 18 |
| ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА | 19 |
| ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА | 20 |
| 2. ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ | 22 |
| 3. ВВЕДЯ МНИМОЮ ЕДИНИЦУ i , МОЖНО РЕШИТЬ ЛЮБОЕ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ | 28 |
| 4. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ | 34 |
| 5. ВЫВЕДЕНИЕ ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ | 36 |
| 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ | 38 |
| 2. ОТ МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ i К КОМПЛЕКСНОМУ ЧИСЛУ $a + bi$ | 41 |
| 1. ПЕРЕХОД К КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМ | 45 |
| 2. СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ (МОДУЛЬ, АРГУМЕНТ) И КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ | 48 |
| 3. ОСНОВНЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ | 57 |
| 4. ИЗОБРАЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ | 60 |
| 5. СОПРЯЖЁННЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА | 63 |
| 6. УПРАЖНЕНИЯ | 71 |
| 3. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ | 77 |
| 1. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ | 82 |
| 2. УПРАЖНЕНИЯ | 91 |
| 4. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА, СВЯЗЫВАЮЩАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА | 97 |
| 1. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА | 98 |





| | |
|---|-----|
| 2. ЧИСЛО НЕПЕРА (ОСНОВАНИЕ НАТУРАЛЬНОГО ЛОГАРИФМА) e | 102 |
| 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА | 106 |
| 4. ФОРМУЛА МУАВРА | 109 |
| 5. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА | 110 |
| 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ e^x | 113 |
| 7. ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЧИСЛА e | 115 |

5. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ 119

| | |
|---|-----|
| 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ | 124 |
| 2. ВЫВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ | 128 |
| 3. УПРАЖНЕНИЯ | 133 |

6. СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ. 139

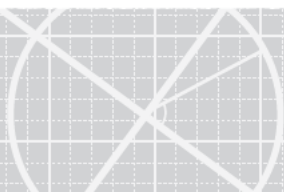
| | |
|--|-----|
| 1. УМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ | 143 |
| 2. ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ | 151 |
| 3. ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАЗНЫХ УГЛОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ГРАДУСНОЙ И РАДИАННОЙ МЕРАХ | 157 |
| 4. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ. | 158 |
| 5. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ | 159 |
| 6. ПОЧЕМУ $(-1) \cdot (-1) = 1$? | 161 |

7. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. 163

| | |
|--|-----|
| 1. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК | 168 |
| 2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ | 172 |
| 3. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ СЕТЕВОГО НАПРЯЖЕНИЯ | 193 |
| 4. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ. | 193 |

ПРИЛОЖЕНИЕ 201

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ. 222





Пролог

НАЧАЛО ИСТОРИИ





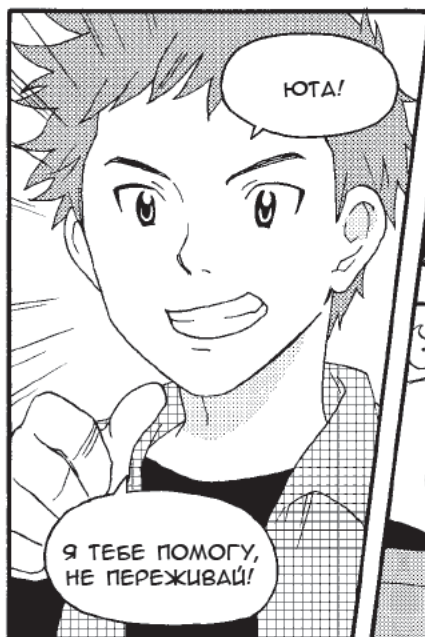
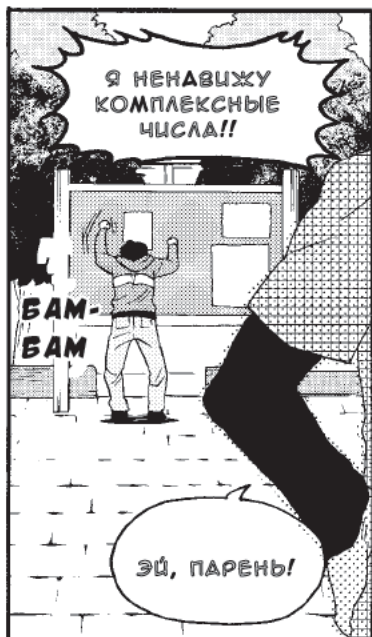
ТИШИНА.
ИДЁТ
ЭКЗАМЕН.



НЕ ПОНИМАЮ Я ЭТИ
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА...
НО ОДНУ ВЕЩЬ
Я ХОРОШО ПОНЯЛ...

БАЦ!

ПО РЕЗУЛЬТАТАМ
ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ
СЛЕДУЮЩИЕ СТУДЕНТЫ
ОТПРАВЛЯЮТСЯ НА ПЕРЕДАЧУ:
1011023 САКУРАЙ ЮТА
1011041 ХАСИМОТО РЁ



* Сенпай – обращение к более старшему по возрасту, рангу или более опытному коллеге/соученику
В данном случае означает, что Масаси учится на более старшем курсе



ПОВТОРНЫЙ
ЭКЗАМЕН
ПО МАТЕМАТИКЕ

ШУР

ШУР



СЕНПАЙ ЖЕ САМ
НА ПЕРЕСАДЧЕ!!

И чего у него такое
самолюбное лицо?!

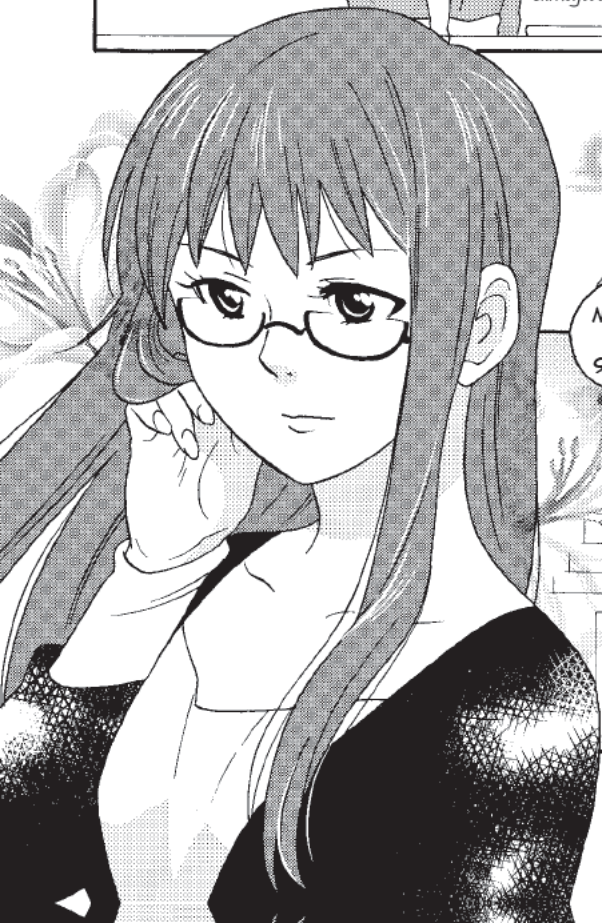


ЕСЛИ ЗАВАЛИМ,
ТО ЕЩЁ ОДИН ГОД
ВМЕСТЕ ПРОУЧИМСЯ!

.ХА-ХА-ХА

ПАМ

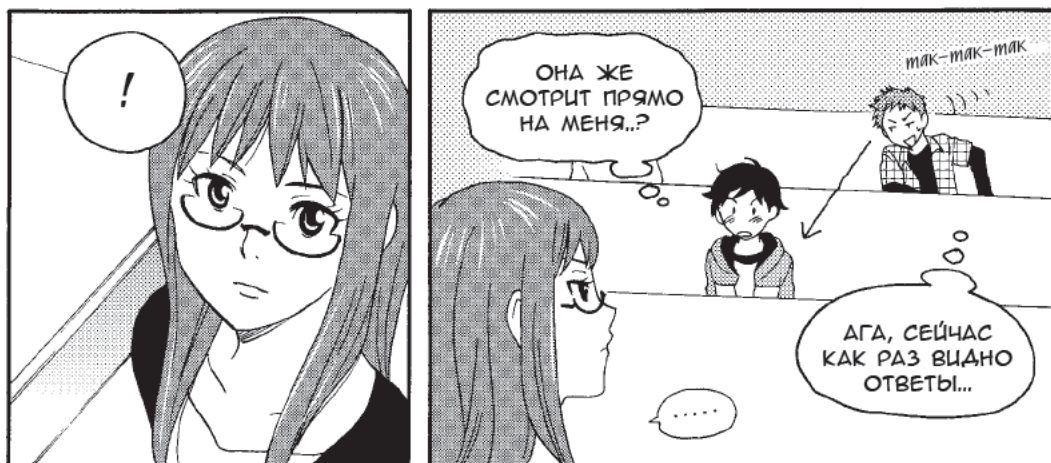
АА НА ЭТОГО
СЕНПАЯ НЕЛЬЗЯ
ПОЛАГАТЬСЯ...

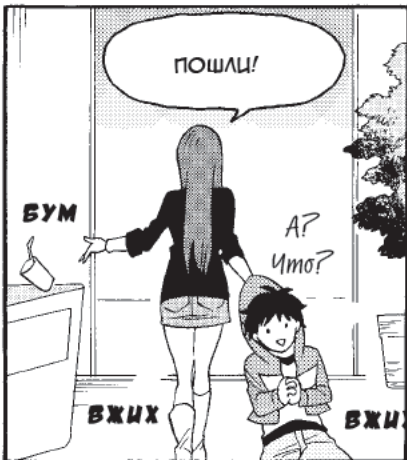


СТУК
СЕРДЦА

МОЯ ФАМИЛИЯ
ХИМУРО,
Я АСПИРАНТКА.

У ПРЕПОДАВАТЕЛЯ
ПОЯВИЛИСЬ СРОЧНЫЕ ДЕЛА,
ТАК ЧТО ЗА ЭКЗАМЕНОМ
БУДУ НАБЛЮДАТЬ Я.







ИТАК...

...к числу "1"!

Мнимая единица "i"

ДАВАЙ ПОГОВОРИМ
О ЛЮБВИ...



НЕ ОБ ЭТОМ МНЕ
ХОТЕЛОСЬ ПОГОВОРИТЬ...
УЖ НИКАК НЕ ПРО
ПУСТОЕ ЧИСЛО "1"...

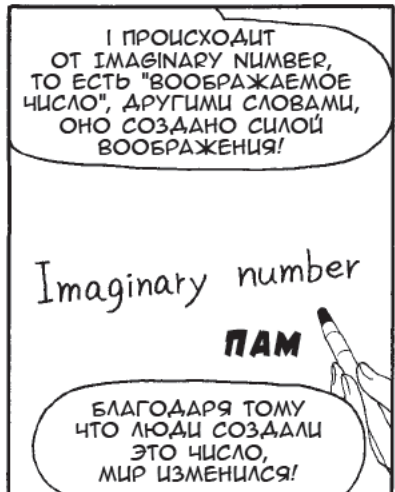
Мнимая e

ЕСЛИ ЧИСЛО МНИМОЕ,
ЭТО НЕ ЗНАЧИТ,
ЧТО ОНО ПУСТОЕ!



РАЗВЕ?
НО РАЗ ОНО
НАЗЫВАЕТСЯ
"МНИМЫМ"...

РАЗВЕ ЭТО
НЕ ОЗНАЧАЕТ, ЧТО
ЕГО НЕ СУЩЕСТВУЕТ
И ОНО ПУСТОЕ?



И ПРОИСХОДИТ
ОТ IMAGINARY NUMBER,
ТО ЕСТЬ "ВООБРАЖАЕМОЕ
ЧИСЛО", ДРУГИМИ СЛОВАМИ,
ОНО СОЗДАНО СИЛОЙ
ВООБРАЖЕНИЯ!

Imaginary number
ПАМ

БЛАГОДАРЯ ТОМУ
ЧТО ЛЮДИ СОЗДАЛИ
ЭТО ЧИСЛО,
МИР ИЗМЕНИЛСЯ!



ВОТ О ЧЁМ
Я ХОТЕЛА
ПОГОВОРИТЬ...

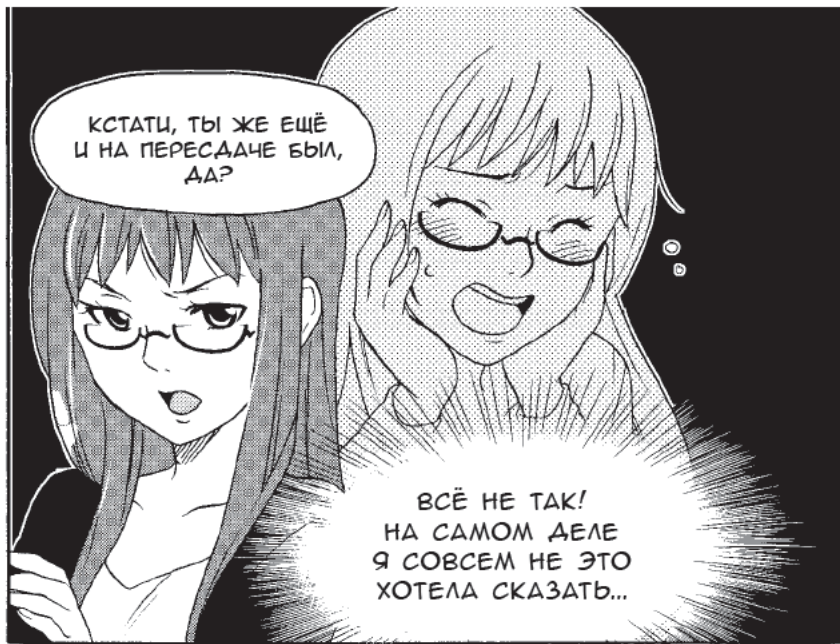
number

ИТАК, ЧТО ТЫ
ЗНАЕШЬ О МНИМОЙ
ЕДИНИЦЕ?



ХММ ЕСЛИ ЕЁ
ВОЗВЕСТИ
В КВАДРАТ, ТО
ПОЛУЧИТСЯ "-1"...

ТОЛЬКО ЭТО...

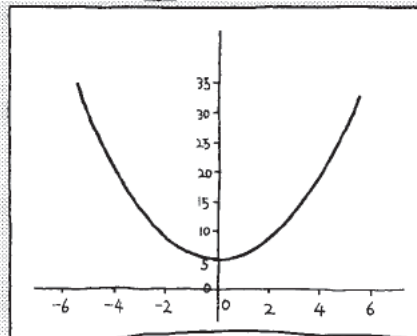


ВОТ ВЫ СКАЗАЛИ,
ЧТО ЭТО ЧИСЛО СОЗДАНО
ЧЕЛОВЕЧЕСКИМ ВООБРАЖЕНИЕМ,
А ДЛЯ ЧЕГО ЕГО СОЗДАЛИ?



АГА...
С ЧЕГО БЫ НАМ
ЛУЧШЕ НАЧАТЬ?

НУ УЖ, ПО КРАЙНЕЙ МЕРЕ,
КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ТЫ ЗНАЕШЬ, НЕ ТАК ЛИ?



И ПОМНИШЬ, ЧТО ЕСТЬ ТАКИЕ
СЛУЧАИ, КОГДА КВАДРАТНОЕ
УРАВНЕНИЕ НЕЛЬЗЯ РЕШИТЬ?
ВОТ ЭТОТ ГРАФИК, КОТОРЫЙ
МЕНЯ ВСЕГДА РАЗДРАЖАЕТ.



ХММ

РЕШЕНИЙ НЕТ,
ЕСЛИ ГРАФИК
НЕ ПЕРЕСЕКАЕТ
ОСЬ X, ТАК?

НО Я НЕ ПОЙМУ,
ЧТО В ЭТОМ МОЖЕТ
ТАК РАЗДРАЖАТЬ?

КОГДА Я УЧИЛАСЬ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ,
Я, БЫВАЛО, ВСЮ НОЧЬ НЕ СПАЛА,
ВСЁ СМОТРЕЛА НА ЭТОТ ГРАФИК,
И ТАК ОН МЕНЯ БЕСИЛ!



Как это так,
нет решения?!

МОЖЕТ, ВАМ
ПРОСТО КАЛЬЦИЯ
НЕ ХВАТАЛО?

ОДНАКО ЕСЛИ
ИСПОЛЬЗОВАТЬ
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА,
ТО МОЖНО СЧИТАТЬ,
ЧТО ЭТО УРАВНЕНИЕ
ИМЕЕТ РЕШЕНИЕ
В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ.

ВОТ КАК?



ТАКОВА СИЛА
МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ!

ХММ... ЭЭЭ...

ЕСЛИ ЧТО-ТО
НЕ ПОНЯТНО,
ТО ТАК И СКАЖИ.



РАССМОТРИМ ЕЩЁ
ОДИН ПРИМЕР.
ТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ ЗНАЕШЬ?

ни...

А... ДА, ЭТО
ОЧЕНЬ ХОРОШИЙ
ПРИМЕР.

ПЕРЕСТАНЬ
ПРИТВОРЯТЬСЯ,
ЧТО ТЫ ЗНАЕШЬ!

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2} V_m \sin(\omega t)$$

Дифференциальное
уравнение
для силы тока.

СКРИП



НИЧЕГО НЕ
ПОНИМАЮ...

Ох, и устал,
маленький...

ПРОСНИСЬ!

ЭТО УРАВНЕНИЕ НЕ ПОНЯТЬ, ЕСЛИ
НЕ ЗНАЕШЬ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.
ПОЭТОМУ СЕЙЧАС СМОТРИ ТОЛЬКО
НА ЕГО ФОРМУ.

ПЕРЕПИШЕМ ЭТО УРАВНЕНИЕ,
ИСПОЛЬЗУЯ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

$$RI + j\omega LI = V$$

Алгебраическое уравнение
для силы тока

I и V - здесь
комплексные числа,
а j - мнимая единица.

ээ...

НЕ ОБРАЩАЙ
ВНИМАНИЯ НА СМЫСЛ
ЭТИХ СИМВОЛОВ,
СМОТРИ ТОЛЬКО НА
ФОРМУ УРАВНЕНИЯ.

АГА! ТЕПЕРЬ
ОСТАЛИСЬ ТОЛЬКО
ПРОИЗВЕДЕНИЕ
И СУММА!

А!

ИМЕННО.

ТАК ДАЖЕ СЛОЖНЫЕ УРАВНЕНИЯ
МОЖНО РЕШАТЬ ДОВОЛЬНО
ПРОСТО, ЕСЛИ ИСПОЛЬЗОВАТЬ
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

$$RI + j\omega LI = V$$

ТАААМ!

Превратись
в простое
уравнение!

ОСОБЕННО ЭТО КАСАЕТСЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,
ОПИСЫВАЮЩИХ ТОК, ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ
НАПРЯЖЕНИЕ, ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ,
ЗВУКОВЫЕ И ДРУГИЕ ВОЛНЫ.

ВОТ ОНО
ЧТО! ЧИСЛА.

ЗНАЧИТ, ДЛЯ ЭТОГО И
ПРИДУМАЛИ МНИМЫЕ,
ТО ЕСТЬ
ВООБРАЖАЕМЫЕ, ЧИСЛА.

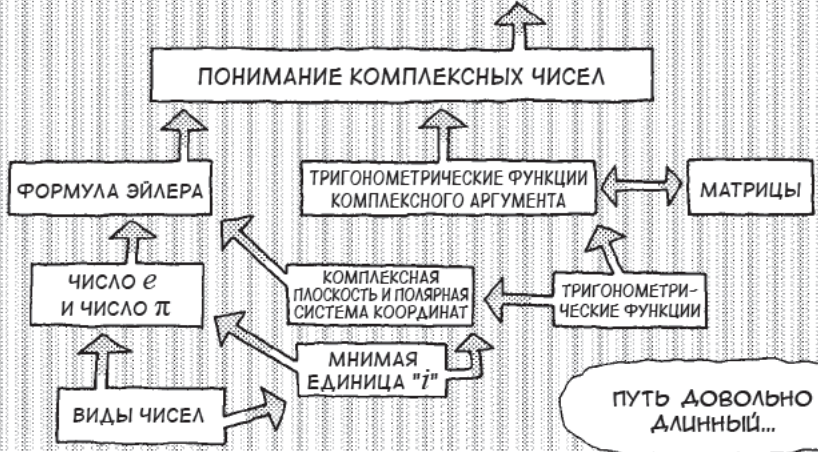
БЛАГОДАРЯ ВАМ,
ХИМУРО-САН,
Я ПОНЯЛ, КАК ВАЖНЫ
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА!

МАЛО ПОНЯТЬ ИХ ВАЖНОСТЬ,
НУЖНО ЕЩЁ НАУЧИТЬСЯ
ИСПОЛЬЗОВАТЬ ЭТИ ЧИСЛА.

ЭТО ПУТЬ, КОТОРЫЙ
НАДО ПРОЙТИ, ЧТОБЫ
НАУЧИТЬСЯ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ
КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ.

ЦЕЛЬ ИЗУЧЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ
ЧИСЕЛ (ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ВЫРАЗИМ
ЧЕРЕЗ КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО V ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ
НАПРЯЖЕНИЕ, А ЧЕРЕЗ I - ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК,
ПОСЛЕ ЧЕГО ЛЕГКО РЕШАЕМ ЗАДАЧУ)



ТАКИМ ОБРАЗОМ,
Я ОБЪЯСНЮ ТЕБЕ
ИСТИННОЕ ЗНАЧЕНИЕ
И ЦЕННОСТЬ
КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.
ТАК ЧТО ГОТОВЬСЯ!

А... АА!



Глава

1

ВИДЫ ЧИСЕЛ







Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru