ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета.

Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Авторы надеются, что данное пособие поможет студентам в овладении методами теории функций нескольких переменных, в их самостоятельной работе над предметом. Они также выражают надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримут все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции одной переменной не охватывают всех зависимостей, существующих в природе.

Так, **например**, площадь прямоугольника $S = xy$ есть произведение длин его сторон. Таким образом, значение S зависит от переменной упорядоченной пары чисел $(x; y)$ или, как говорят, S есть функция двух переменных x и y.

Температура T, измеряемая в различных точках водоема, есть функция от координат точки, в которой она измеряется, и от момента времени $t, T = f(x; y; z; t)$. Таким образом, значение T зависит от переменной упорядоченной четверки чисел $(x; y; z; t)$ или, T есть функция четырех переменных x, y, z и t.

Мы ставим себе целью научиться исследовать функции многих переменных так же, как мы научились исследовать функции одного переменного. Как и в случае функций одного переменного, изучение функций многих переменных начинается с описания их области определения.

1. Некоторые определения и обозначения

Систему из двух чисел x и y геометрически можно интерпретировать как точку плоскости, а функцию одной переменной $y = f(x)$ можно геометрически представить ее графиком. Желая распространить геометрические методы на теорию функций любого числа переменных, в анализе введено понятие n-мерного пространства при любом натуральном n. Условимся через $\mathbf{R}^n$ обозначать множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, состоящих из n вещественных чисел

$$x_i \in \mathbf{R} \ (i = 1,2, \cdots, n).$$

В соответствии с удобной геометрической терминологией каждый такой набор будем называть точкой ***множества*** $\mathbf{R}^n$. Число x_i в ***наборе*** $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ называют i-й координатой точки $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Множество всевозможных таких точек образует так называемое ***n - мерное*** пространство, которое иногда называют ***арифметическим***. Точку ***n - мерного*** пространства в случаях $n = 1, n = 2$ и $n = 3$ можно представить геометрически как точку прямой, плоскости или трехмерного пространства соответственно.

Геометрические аналогии можно продолжить и ввести на ***множестве*** $\mathbf{R}^n$ расстояние между двумя любыми точками $\mathbf{R}^n$ по формуле

$$\boxed{\rho(M'; M'') = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i'' - x_i')^2}}. \qquad (1.1)$$

- При значении $n = 1$ получаем $\boxed{\rho(M'; M'') = |x_i'' - x_i'|}$ –расстояние между точками $M'(x_i')$ и $M''(x_i'')$ прямой ($\mathbf{R}^1 \equiv \mathbf{R}$).
- При значении $n = 2$ имеем

$$\rho(M'; M'') = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2} \ -$$

расстояние между точками $M'(x_1'; x_2')$ и $M''(x_1''; x_2'')$ плоскости $(\mathbf{R}^2)$.

Функция $\rho(M';M'')$, определенная формулой (1.1), очевидно, обладает следующими свойствами:

1. $\rho(M';M'') > 0$;
2. $\rho(M';M'') = 0 \Leftrightarrow (M' = M'')$;
3. $\rho(M';M'') = \rho(M'';M')$;
4. $\rho(M';M''') \leq \rho(M';M'') + \rho(M'';M''')$.

Последнее неравенство называется (по геометрической аналогии) ***неравенством треугольника***.

Функцию, определенную на парах $(M';M'')$ точек некоторого ***множества*** $\mathbf{R}^n$ и обладающую свойствами 1 – 4, называют ***метрикой*** или расстоянием в $\mathbf{R}^n$. ***Множество*** $\mathbf{R}^n$ вместе с ***фиксированной*** в нем ***метрикой*** называют ***n - мерным евклидовым*** пространством.

Таким образом, мы превратили $\mathbf{R}^n$ в ***n-мерное евклидово*** пространство, наделив ***множество*** $\mathbf{R}^n$ ***метрикой***, заданной соотношением (1.1). В частности, ***евклидово*** пространство $\mathbf{R}^1$ называется ***координатной*** прямой, а $\mathbf{R}^2$ – ***координатной*** плоскостью.

Множество точек $\{M\}$ пространства $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условию $\rho(M;M_0) < \varepsilon$, где ε – ***положительное*** число, называется ε- окрестностью ки M_0 этого пространства.

В частности,

- при $n = 1$ ε- окрестность точки M_0 образует открытый промежуток с центром в точке M_0, длина которого равна 2ε,
- при $n = 2$ – круг радиуса ε с центром в точке M_0 без ограничивающей его ***окружности***.

Определение. Пусть точка $M_0(x_1^0;x_2^0;\cdots;x_n^0) \in \mathbf{R}^n$ и пусть $\varepsilon > 0$ – вещественное число. Совокупность всех точек $M \in \mathbf{R}^n$ таких, что $\rho(M;M_0) < \varepsilon$, называется ***n-мерным*** (***открытым***) ***шаром*** в точке M_0 радиусом ε, или ***шаровой*** ε-окрестностью точки $M_0 \in \mathbf{R}^n$.

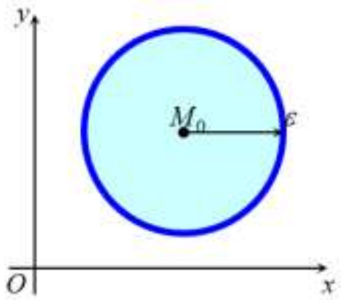


Рис. 1.1

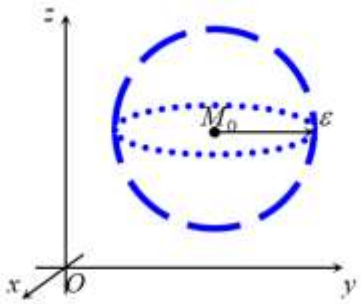


Рис. 1.2

- В случае $n = 2$ имеем $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$. Это внутренность ***круга*** с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$ радиуса ε (***круг*** без ограничивающей его окружности; рис. 1.1).
- Для значения $n = 3$ имеем $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2$. Это ***шар*** радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (***шар*** без ограничивающей его ***сферы***; рис. 1.2).

Наряду с ***шаровыми*** окрестностями рассматривают ***прямоугольные*** окрестности точки $M_0(x_1^0; x_2^0; \cdots; x_n^0)$.

Это совокупность всех точек $M(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ таких, что

$$x_i^0 - \varepsilon_i < x_i < x_i^0 + \varepsilon_i, \varepsilon_i > 0 \ (i = 1,2, \cdots, n).$$

- В случае $n = 1$ имеем обычную ε-окрестность $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \eta$ точки x_0 на прямой числовой линии.
- Если $n = 2$, то это прямоугольник со сторонами длины $2\varepsilon_1$ и $2\varepsilon_2$ (без границы, рис. 1.3).
- Если $n = 3$, то это (открытый) параллелепипед с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, ребра которого имеют длины $2\varepsilon_1,\ 2\varepsilon_2,\ 2\varepsilon_3$ (рис. 1.4).

Рассмотрим некоторое ***бесконечное множество*** **E** точек пространства $\mathbf{R}^n$.

Точка M_0 пространства $\mathbf{R}^n$ называется ***внутренней*** точкой ***множества*** **E**, если она принадлежит **E** вместе с некоторой окрестностью точки M_0.

Множество **E** называется ***открытым***, если каждая его точка ***внутренняя***.

Примером ***открытого множества*** пространства $\mathbf{R}^2$ является ***множество*** точек, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 < 1$.

Определение. Пусть ***множество*** $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}^n$. Точка $M \in \mathbf{E}$ называется ***внутренней*** точкой ***множества*** **E**, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что точка M содержится во множестве **E** вместе со своей ε-окрестностью.

Если все точки множества **E** внутренние для ***множества*** **E**, то ***множество*** **E** называется ***открытым множеством***.

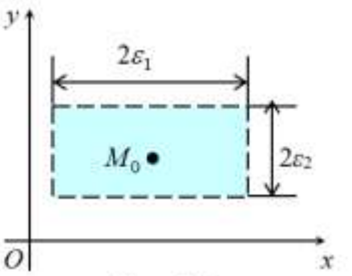


Рис. 1.3

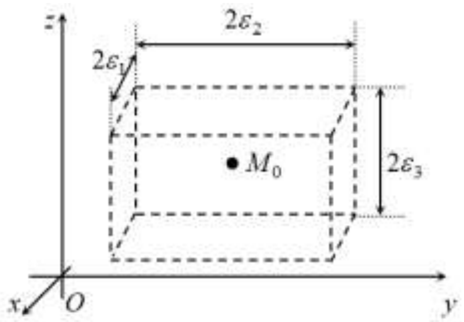


Рис. 1.4

- Так, в случае $n = 2$ любой круг без ограничивающей его окружности является примером ***открытого множества***.
- Однако условие $x^2 + y^2 \le 1$ определяет множество, не являющееся открытым, потому что, например, точка $(1; 0)$ нашему ***множеству*** принадлежит, но она не является внутренней точкой рассматриваемого множества.

Определение. Точка $P \in \mathbf{R}^n$ называется ***граничной*** точкой ***множества*** $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}^n$, если в любой окрестности точки P существуют точки, как принадлежащие ***множеству*** **E**, так и не принадлежащие ему. Совокупность всех ***граничных*** точек ***множества*** **E** называется его ***границей*** и **обозначается** $\partial\mathbf{E}$.

Если к ***множеству*** **E** присоединить его ***границу***, то получим ***замкнутое множество*** $\overline{\mathbf{E}}$: $\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cup \partial\mathbf{E}$.

Из определения следует, что характеристическое свойство ***граничной*** точки ***множества*** состоит в том, что в любой ее окрестности имеются как точки этого ***множества***, так и точки, ему не принадлежащие.

Примеры. Каждая точка ***окружности*** $x^2 + y^2 = 1$ является ***граничной*** точкой области, определяемой неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$. Неравенство $x^2 + y^2 \leq 1$ определяет замкнутую область пространства $\mathbf{R}^2$. И вообще, примером замкнутого ***множества*** может служить ***круг*** вместе с ограничивающей его ***окружностью***.

Определение. ***Множество*** $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^n$ называется ***связным***, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой (в частности, ломаной линии), всеми своими точками содержащейся во множестве $\mathbf{E}$ (рис. 1.5).

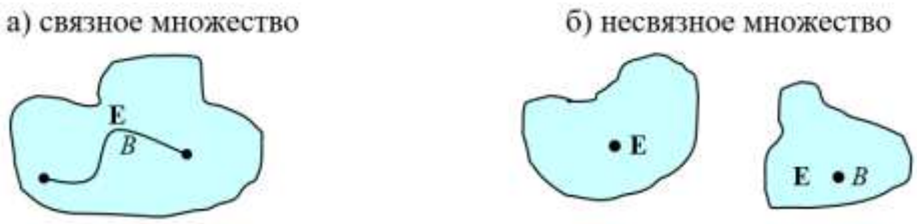


Рис. 1.5

Определение. ***Открытое связное множество*** называется областью. Область называется ***ограниченной***, если существует ***шар*** (***круг***), содержащий эту область.

Например, ***множество*** точек, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < a, |y - y_0| < b,$$

есть область пространства $\mathbf{R}^2$.

Всякую область, содержащую данную точку M_0, будем называть окрестностью точки M_0 (просто окрестностью, в отличие от ε-окрестности). В частности, ε-окрестность точки является ее окрестностью.

Предельной точкой ***множества*** $\mathbf{E}$, называется точка P пространства $\mathbf{R}^n$, в любой окрестности которой имеются точки ***множества*** $\mathbf{E}$, отличные от точки P. Каждая ***предельная*** точка области является либо ее ***внутренней*** точкой, либо ее ***граничной*** точкой.

2. Понятие функции нескольких переменных

В нашем курсе наиболее подробно рассматривается случай функции двух переменных. Однако все введенные понятия и полученные результаты могут быть соответственно обобщены на случай функции любого числа независимых переменных.

Пусть $\mathbf{E}$ есть область изменения независимых переменных x и y.

Переменная z называется функцией независимых переменных x и y на ***множестве*** $\mathbf{E}$, если каждой паре чисел x, y из ***множества*** $\mathbf{E}$ соответствует определенное значение z. Переменные x, y называются также аргументами функции z.

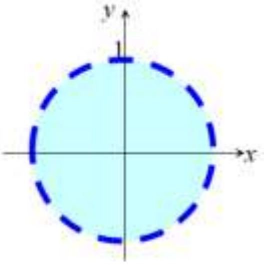
Множество $\mathbf{E}$ пар чисел x, y, на котором определена функция, называется ***областью определения***, или ***областью существования*** функции.

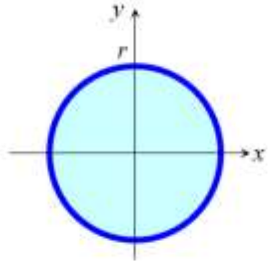
Областью определения $\mathbf{E}$ функции двух переменных может быть область плоскости (***открытое связное множество*** точек ***евклидова*** двумерного пространства $\mathbf{R}^2$). Ею может быть линия или какое-либо иное ***множество*** точек плоскости $\mathbf{R}^2$.

2.1. Способы задания функции

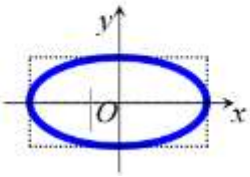
I. ***Аналитический способ*** – задание функции с помощью формул.

1. Функция задана формулой $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ внутри ***круга***, определяемого неравенством $x^2 + y^2 < 1$.





2. Функция задана формулой $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ внутри и на границе ***круга***, определяемого неравенством $x^2 + y^2 \le r^2$.
3. Функция задана формулой $z = x - y$ на ***эллипсе*** $x^2 + 4y^2 = 4$.



Обозначение. В общем случае тот факт, что z есть функция аргументов x и y, изображается символом $z = f(x; y)$ или $z = z(x; y)$ и т.п.

II. ***Табличный способ*** – задание функции с помощью таблицы с двойным входом.

$y_j \setminus x_i$	x_1	x_2	…	x_n
y_1	$f(x_1; y_1)$	$f(x_2; y_1)$	…	$f(x_n; y_1)$
y_2	$f(x_1; y_2)$	$f(x_2; y_2)$	…	$f(x_n; y_2)$
…	…	…	…	…
y_n	$f(x_1; y_n)$	$f(x_2; y_n)$	…	$f(x_n; y_n)$

III. ***Геометрический способ*** – это задание функции $z = f(x; y)$ в виде поверхности в ***прямоугольной*** системе координат в пространстве.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области G на сти Oxy. Тогда каждой точке $(x; y) \in G$ будет отвечать точка $(x; y; f(x; y))$ трехмерного пространства.

Множество всех таких точек $(x; y; f(x; y))$, где точка $(x; y) \in G$, называется графиком функции $z = f(x; y)$.

Например, график функции $z = x^2 + y^2$ – ***параболоид вращения*** (рис. 2.1).

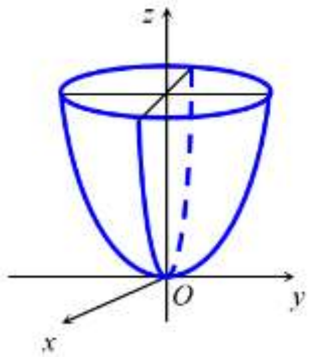


Рис. 2.1

Для изучения характера изменения функции $z = f(x;y)$ пользуются ***линиями уровня***.

Линией уровня называется ***множество*** точек на плоскости Oxy, в которых функция f принимает данное постоянное значение $z = c$.

Эту линию можно также получить, пересекая график функции $z = f(x;y)$ плоскостью $z = c$, параллельной плоскости Oxy, и проектируя линию пересечения ортогонально на плоскость Oxy.

Система ***линий уровня*** $f(x;y) = c_m$ $(1 \le m \le k)$, где $c_{m+1} - c_m = h = const$, позволяет судить о ходе изменения уровня. Там, где ***линии*** расположены густо, функция изменяется быстро, а где ***линии*** расположены редко, функция изменяется медленно.

Для функции $z = x^2 + y^2$ ***линии уровня*** – концентрические ***окружности*** с центром в начале координат.

Этот прием изучения функции может быть распространен и на функции $u = f(x;y;z)$ трех независимых переменных.

Вместо ***линий уровня*** тогда возникают

поверхности уровня – ***множество*** точек $M(x;y;z)$ пространства, в которых функция $f(M)$ принимает данное постоянное значение.

Например, для функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ поверхности уровня – концентрические ***сферы*** с центром в начале координат.

Понятие функции двух независимых переменных легко обобщается на случай функции любого числа независимых переменных.

Если каждой точке $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ***множества*** **E** точек ***n-мерного евклидова*** пространства $\mathbf{R}^n$, по некоторому закону, поставлено в соответствие определенное вещественное число u, то говорят, что на ***множестве*** **E** определена функция точки M или функция n переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n$, и пишут $u = f(M)$ $M \in \mathbf{E}$, или $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Множество **E** называется ***областью определения*** функции f.

Функция $u = f(M)$ с областью определения **E** есть отображение ***ства*** **E** на ***множество*** **U**, представляющее ***область изменения*** переменной u.

3. Предел функции нескольких переменных

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности Ω точки $M_0(x_0; y_0)$, кроме, быть может, самой точки M_0.