

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ГИПОТЕЗЫ И ПРИНЦИПЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ	6
1.1. Гипотеза о сплошности тела	6
1.2. Основные понятия	7
1.3. Соотношение между основными изучаемыми величинами в сопротивлении материалов	8
2. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ	10
2.1. Понятие тензора	10
2.2. Обозначения компонентов напряжений вблизи заданной точки	10
2.3. Условия равновесия	12
2.3.1. Равновесие внутри тела	12
2.3.2. Равновесие на границе тела	15
2.4. Напряжения в наклонной грани	16
2.5. Преобразование системы координат	18
2.6. Главные напряжения и главные направления	19
2.6.1. Доказательство наличия трех действительных корней характеристического уравнения	21
2.6.2. Доказательство ортогональности главных направлений	22
2.6.3. Эллипсоид Ламе	22
2.7. Анализ напряжений на гранях элементарного параллелепипеда, совпадающих с главными площадками	23
2.8. Изотропная и девиаторная компоненты тензора напряжений	25
2.9. Октаэдрические напряжения	26
2.10. Определение главных напряжений и направлений	28
2.11. Двухосное напряженное состояние	28
2.11.1. Напряжения на наклонной грани	29
2.11.2. Главные напряжения и направления	31
2.11.3. Частные случаи двухосного напряженного состояния	32
2.11.4. Круг Мора	33
2.12. Трехмерные круги Мора	35
ВЫВОДЫ	37
ПРИМЕРЫ	38
Библиографический список	52

ВВЕДЕНИЕ

Напряженное состояние в окрестности точки элементов конструкций, работающих под нагрузкой, является главной фундаментальной темой в курсе «Сопротивление материалов». Изучая, как напряжения и деформации распределяются по различным направлениям внутри нагруженного тела, мы получаем возможность решать широкий спектр задач, касающихся его надежности и жесткости. Это позволяет не только моделировать поведение конструкции в процессе эксплуатации, но и предвидеть возможные сценарии разрушения, определять наиболее уязвимые места и, как следствие, принимать обоснованные инженерные решения для обеспечения ее долговечности и безопасности.

Настоящее учебно-методическое пособие представляет собой расширенный курс лекций по теории напряженного состояния — важная часть дисциплины «Сопротивление материалов». Отличительной особенностью пособия является акцент на практическое применение теоретических знаний, подкрепленное детальным разбором примеров, иллюстрирующих использование формул и демонстрирующих значимость изучаемой темы в реальных инженерных задачах. Материал адресован обучающимся по направлению подготовки 08.03.01 Строительство профиля «Промышленное и гражданское строительство» и призван облегчить освоение темы, а также подготовку к экзаменационным испытаниям. Кроме того, пособие будет полезно преподавателям дисциплин «Сопротивление материалов» и «Техническая механика», предоставляя гибкий инструмент для выбора актуальных вопросов и задач, соответствующих учебному плану и количеству отведенных часов.

При изложении сложных понятий, физических величин или явлений предпочтение отдавалось физическому подходу, иногда отказываясь от более сложных математических формулировок, поскольку физическое понимание явлений имеет решающее значение для студента-строителя. Таким образом, данный подход изложения материала поможет развить у будущих инженеров интуицию, которая позволит им в своей профессиональной деятельности легче и быстрее распознавать разницу между некачественным и надежным конструктивными решениями.

Первый раздел носит вводный характер и объясняет фундаментальные физические понятия, такие как напряжение, деформация, сплошность и т.д. Второй раздел содержит основные элементы теории напряжений. Данная теория излагается исключительно путем исследования условий равновесия внутри нагруженного тела, постепенно вводится математическое понятие тензора.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ГИПОТЕЗЫ И ПРИНЦИПЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

1.1. ГИПОТЕЗА О СПЛОШНОСТИ ТЕЛА

Любые материалы имеют дискретную природу, поскольку они состоят из атомов и молекул — в случае жидкостей и газов, также из волокон, кристаллов, гранул и т.д. — в случае твердых материалов. Физические взаимодействия между этими составными элементами определяют поведение материалов под действием нагрузки или воздействия.

В сопротивлении материалов поведение различных материалов идеализируется с помощью физических или математических моделей, которые воспроизводят наиболее важные особенности, наблюдаемые в экспериментальных испытаниях. Кроме того, наличие пор, разрывов, которые всегда присутствуют во внутренней структуре материалов (например, интерфейс между двумя кристаллами или двумя гранулами, микротрещины в твердых телах и т.д.), существенно увеличивает степень сложности проблемы. Одной из ключевых гипотез в сопротивлении материалов является предположение о *сплошности* материала. Это означает, что вещество рассматривается как непрерывная среда, полностью заполняющая объем тела без пустот или разрывов. Данная модель позволяет абстрагироваться от молекулярной структуры материала, упрощая расчеты при анализе напряжений и деформаций.

С математической точки зрения гипотеза о сплошности тела может быть выражена утверждением, что функции, описывающие внутренние силы, напряжения, перемещения и прочие деформации точки тела, являются непрерывными функциями пространства и времени.

Обоснованность этой гипотезы принципиально связана с наименьшим геометрическим размером исследуемого тела по сравнению с максимальным размером разрывов (например, поры, дефекты, трещины и т.д.), фактически присутствующих в материале (рис. 1).

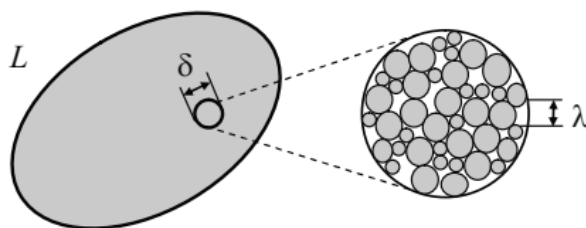


Рис. 1. Дискретная микроскопическая структура металла

Мы будем использовать термины *материальная частица* или *точка тела* по отношению к части тела, заключенной в малой области с материальными границами — в *элементарном объеме*, размеры δ которого в математическом смысле бесконечно малы. Однако с физической точки зрения элементарный объем должен быть достаточно велик, чтобы содержать большое количество структурных неоднородностей реального тела, которые при переходе к модели сплошной среды должны быть усреднены, или, проще говоря, «размазаны» по элементарному объему. Например, характерный размер δ элементарной области для газа должен быть много больше длины свободного пробега молекул, а для железобетонной конструкции много больше характерного расстояния между камнями щебня и элементами металлической арматуры. Таким образом, должно выполняться соотношение (см. рис. 1)

$$\lambda \leq \delta \leq L,$$

где λ — характерный размер структурной неоднородности реального тела; δ — характерный размер элементарной области; L — характерный размер задачи.

В теории напряжений, изложенной в настоящем учебно-методическом пособии, справедливость гипотезы о сплошности тела всегда принимается. Это позволяет определять поведение материала независимо от геометрических размеров исследуемого твердого тела.

1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

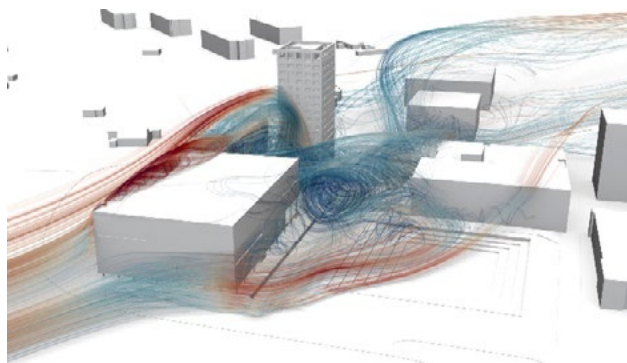
Нагрузки на элементы конструкции определяются как сила, которая может вызвать деформации, ускорения тела и т.д. или изменить его внутреннюю структуру, в результате чего механические характеристики материала могут изменяться. Примерами нагрузок являются внешние силы, действующие на тело, вынужденные перемещения, температурные изменения, химические агрессии, время (в том смысле, что оно вызывает старение и ползучесть материала) и пр. В излагаемой здесь теории напряжений мы анализируем в основном эффекты приложенных сил, вынужденных перемещений и изменений температуры.

Существует несколько способов классификации нагрузок, применяемых в расчетах строительных конструкций. Рассмотрим некоторые из наиболее распространенных критериев.

Поверхностные нагрузки возникают при взаимодействии несущих элементов конструкций зданий и сооружений с окружающей средой или другими объектами, воздействуя непосредственно на граничные поверхности рассматриваемого тела. Примерами этих нагрузок являются: вес неструктурных частей здания, оборудования и т.д., действующий на исследуемую несущую конструкцию; ветровые нагрузки на здание; аэродинамические давления в фюзеляже и крыльях самолета; гидростатическое давление на верхнюю поверхность плотины или на корпус судна; реактивные силы на опоры конструкции и пр. (рис. 2).



а



б

Рис. 2. Примеры распределенных поверхностных нагрузок:
а — снеговая нагрузка; *б* — ветровая нагрузка

При малой площади распределения поверхностную нагрузку с той или иной степенью точности можно считать сосредоточенной (рис. 3) или распределенной по линии (рис. 4).

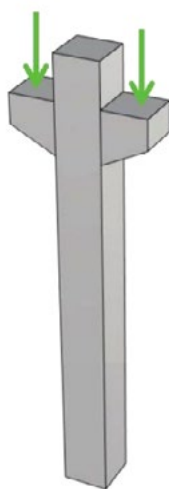


Рис. 3. Сосредоточенные нагрузки, моделирующие опирание балки на колонну

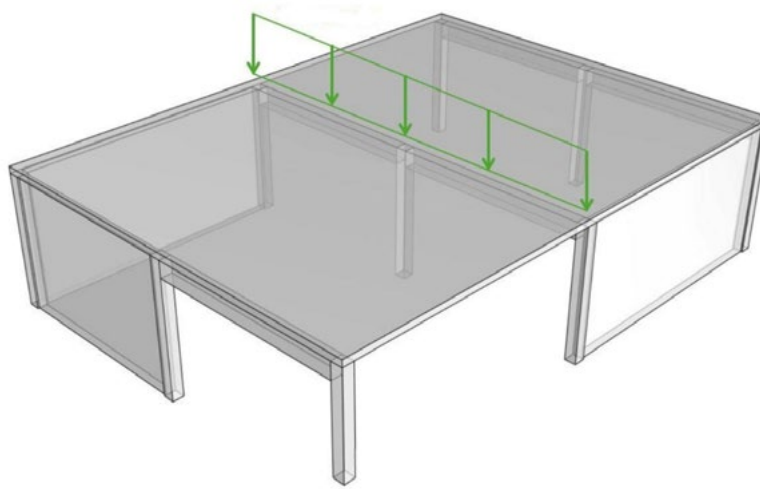


Рис. 4. Распределенная нагрузка по линии, моделирующая вес перегородки на покрытие здания

Объемные нагрузки прикладываются к каждой точке внутри тела. К ним относятся: сила тяжести, действующая на несущие элементы; инерционные силы, возникающие при землетрясениях или других динамических явлениях, таких как удары, вибрация, а также при движении транспортных средств (рис. 5) и летательных аппаратов по криволинейным траекториям с ускорением или замедлением.

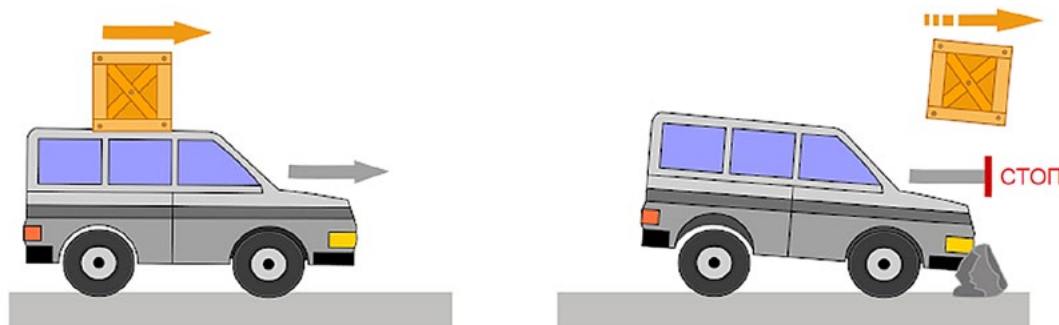


Рис. 5. Объемная сила инерции при торможении транспортных средств

Под *внутренней силой* понимают силу взаимодействия между различными частями тела, возникающую в ответ на приложенную нагрузку. Для определения внутренних сил, возникающих при деформации твердого тела, используют *метод сечений*. Суть метода заключается в следующем: тело мысленно рассекается плоскостью, после чего одна из полученных частей мысленно удаляется. Воздействие отброшенной части на оставшуюся заменяется системой внутренних сил, распределенных по поверхности сечения (см. рис. 8).

Эти определения являются общими и действительными независимо от предположения, является ли материал сплошным или нет. В случае сплошных сред можно определить еще два важных понятия:

- *напряжение* — внутренняя сила на единицу поверхности (см. формулу (1));
- *деформация* — изменение расстояния между двумя точками внутри твердого тела, деленное на исходное расстояние (линейная деформация), или половина изменения прямого угла (угловая деформация).

1.3. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ОСНОВНЫМИ ИЗУЧАЕМЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Сопротивление материалов направлено на поиск соотношений между четырьмя основными физическими величинами, определенными выше (внешние и внутренние силы (напряжения), перемещения и деформации).

При справедливости гипотезы о сплошности тела эти соотношения могут быть сгруппированы в три группы (рис. 6).

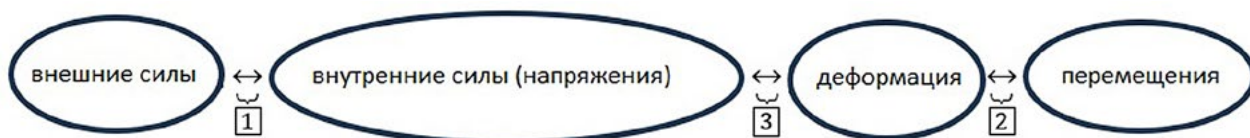


Рис. 6. Три группы соотношения в сопротивлении материалов

1. *Сила – напряжение* — группа соотношений, основанных на условиях равновесия сил. Напряженное состояние любой точки тела описывают через тензор напряжений и его компоненты, которые связывают с внешними силами. Этот набор соотношений определяет *теорию напряжений*. Она полностью независима от свойств материала, из которого изготовлено тело, за исключением того, что гипотеза о сплошности тела должна быть приемлемой (иначе напряжение не может быть определено).

2. *Перемещения – деформации* — соотношения, основанные на условиях кинематической совместности. Деформированное состояние любой точки тела определяет тензор деформации. Компоненты тензора деформации связывают с функциями, описывающими перемещения точек тела. Этот набор соотношений определяет *теорию деформации*. Она также независима от характеристик материалов. Теория деформации, построенная в сопротивлении материалов, верна только в том случае, если деформации достаточно малы, чтобы их можно было рассматривать как бесконечно малые величины.

3. *Напряжения – деформации* — отражают физико-механические свойства материала и устанавливают зависимость между тензорами, описывающими эти величины. Как упоминалось выше, физико-механические свойства материала определяются сложными физическими явлениями, которые происходят во внутренней структуре материала на уровне атома, молекулы, кристалла и т.д. под действием нагрузки. Вследствие этой сложности поведение материала все еще не может быть количественно определено методами теоретической механики. Феноменологический подход, основанный на экспериментальном наблюдении, следует использовать при установлении связей напряжений с деформациями. Для этого внешние силы прикладываются к стандартному образцу материала (для таких строительных материалов, как цементный камень и бетон, при испытаниях на сжатие применяют стандартные образцы в виде кубиков, для стали при испытаниях на растяжение — круглые или плоские образцы) и измеряются соответствующие деформации (рис. 7). Экспериментально полученные соотношения сила – смещение затем используются для построения диаграммы деформирования материала.

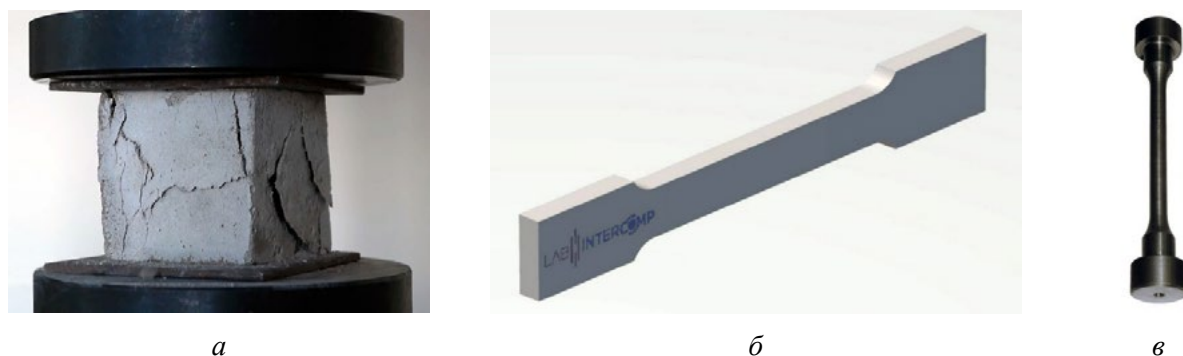


Рис. 7. Стандартные образцы бетона (а) и стали (б, в)

Связь напряжений с деформациями является наиболее сложным элементом в цепочке, изображенной на рис. 6, которая связывает внешние силы с перемещениями, поскольку она может быть обусловлена несколькими факторами, такими как пластичность, вязкость, анизотропия, нелинейное поведение и т.д. По этой причине определение адекватных связей напряжений с деформациями для описания поведения материалов является одной из самых обширных областей исследований в механике деформированного твердого тела и сопротивлении материалов.

2. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

2.1. ПОНЯТИЕ ТЕНЗОРА

Некоторые физические величины, такие как масса тела, его объем, плотность и т.д., математически представлены скаляром. Это означает, что для их определения необходим только один компонент (одно число). Другие величины, такие как силы, перемещение, скорости перемещения и т.д., являются векторными объектами, для определения которых в трехмерном пространстве требуются три компонента, или два — в случае двумерного пространства. Физические величины, такие как состояния напряжения и деформации в окрестности материальной точки внутри тела под действием внутренних сил, будут *тензорными величинами*, которые могут быть описаны девятью компонентами в трехмерном пространстве, или четырьмя — в двумерном пространстве.

В более общем и систематическом смысле скаляр можно определить, как тензор нулевого порядка с $3^0 = 1$ компонентом, а вектор — как тензор первого порядка с $3^1 = 3$ компонентами. *Тензор второго порядка*, или просто тензор, имеет $3^2 = 9$ компонент. Также могут быть определены тензоры более высокого порядка. Тензор n -го порядка будет иметь 3^n компонентов в трехмерном пространстве (или 2^n в двумерном пространстве) (рис. 8). Как будет видно позже, компоненты тензора не обязательно все независимы.

Скаляр	Вектор	Матрица
компонент 1	компонент 1 компонент 2 компонент 3	компонент 1 компонент 2 компонент 3 компонент 4 компонент 5 компонент 6 компонент 7 компонент 8 компонент 9
Тензор нулевого порядка	Тензор первого порядка	Тензор второго порядка

Рис. 8. Графическое представление тензора

Ниже определяется тензор напряжений и анализируются некоторые его свойства.

2.2. ОБОЗНАЧЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ЗАДАННОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим деформируемое твердое тело под действием системы самоуравновешивающихся внешних сил, как показано на рис. 9, *а*. Тело мысленно рассекается на две части сечением. *Внутренние силы* действуют на левой поверхности сечения, представляя действие правой части тела на левую часть. Эти силы, как правило, изменяются от точки к точке (рис. 9, *б*). Аналогично, вследствие условия равновесия, на правой поверхности сечения внутренние силы действуют с одинаковой величиной и в противоположных направлениях. Сила F и момент M на рис. 9, *в* представляют собой равнодействующую внутренних сил, распределенных в сечении, и называются *внутренними усилиями* в сечении.

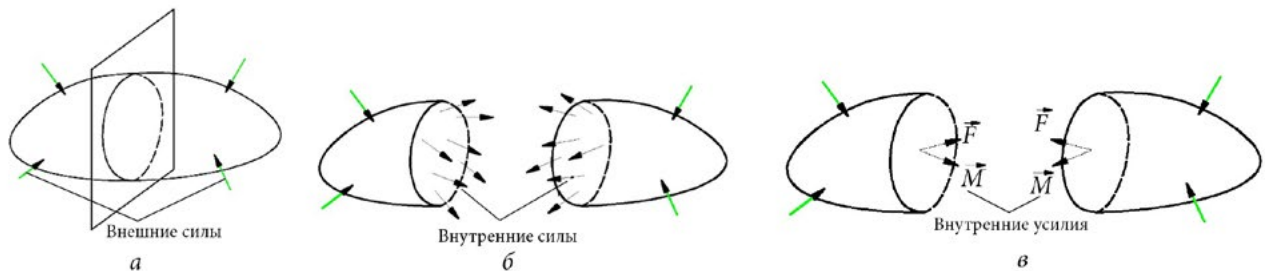


Рис. 9. Внутренние силы в деформируемом твердом теле под действием самоуравновешивающейся системы сил: *а* — рассматриваемое сечение деформируемого твердого тела; *б* — внутренние силы в сечении; *в* — равнодействующая сила и момент в сечении

Рассматривая бесконечно малую площадку dF на поперечном сечении (рис. 10, а), мы можем представить распределение внутренней силы в этой малой области. Разделив бесконечно малую внутреннюю силу dP , которая действует в бесконечно малой площадке dF , мы получим внутреннюю силу на единицу площади, или *напряжение*:

$$P = \frac{dP}{dF}. \quad (1)$$

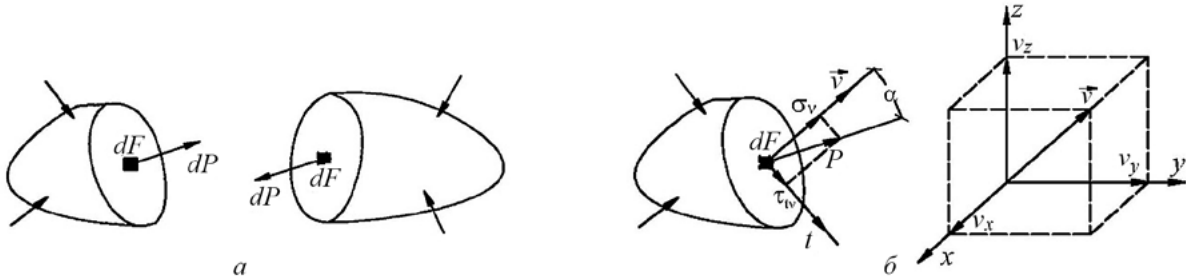


Рис. 10. Напряжение в бесконечно малой площадке:
а — бесконечно малая внутренняя сила dP , действующая на бесконечно малой площадке dF ;
б — разложение dF на составляющие

Ориентация бесконечно малой площадки dF в прямоугольной декартовой системе отсчета x, y, z может быть определена единичным вектором $\vec{n}$, который перпендикулярен плоскости сечения и указывает на внешнее направление по отношению к рассматриваемой части тела (рис. 10, б). Этот вектор $\vec{n}$ является *нормалью к площадке*, как единичный вектор, его компоненты — косинусы углов между вектором $\vec{n}$ и осями координат есть *направляющие косинусы нормали*:

$$\begin{cases} v_x = |\vec{n}| \cos(\vec{n}, x) = \cos(\vec{n}, x) = l; \\ v_y = |\vec{n}| \cos(\vec{n}, y) = \cos(\vec{n}, y) = m; \\ v_z = |\vec{n}| \cos(\vec{n}, z) = \cos(\vec{n}, z) = n. \end{cases}$$

Поскольку вектор $\vec{n}$ имеет единичную длину, имеем

$$|\vec{n}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (2)$$

Напряжение, действующее на площадке dF , можно разложить на две составляющие: нормальную, с направлением нормали площадки $\sigma_n = P \cos \alpha$; касательную, или сдвиговую составляющую, $\tau_{tn} = P \sin \alpha$, где α — угол между нормалью $\vec{n}$ и вектором полного напряжения P (см. рис. 10, б).

На правой поверхности сечения (см. рис. 10, а) мы можем определить грань, которая совпадает с левой, но имеет противоположную полуормаль с направляющими косинусами $-l$, $-m$, $-n$, и напряжения σ и τ той же величины, что и на левой грани, но противоположного направления.

Далее, выделим из тела, находящегося под нагрузкой, в окрестности точки P элементарный параллелепипед, ориентированный таким образом, чтобы его грани были параллельны координатным плоскостям (рис. 11).

Грань параллелепипеда будет положительной, если ее нормаль имеет то же направление, что и координатная ось, которой она параллельна, и отрицательной — в противоположном случае. На рис. 11 грани $EFGH$, $GFBC$ и $HGCD$ положительные, а остальные грани отрицательные. Так как нормальное напряжение σ в этих гранях параллельно одной из осей координат, касательное напряжение τ может быть разложено по направлениям двух других осей координат.

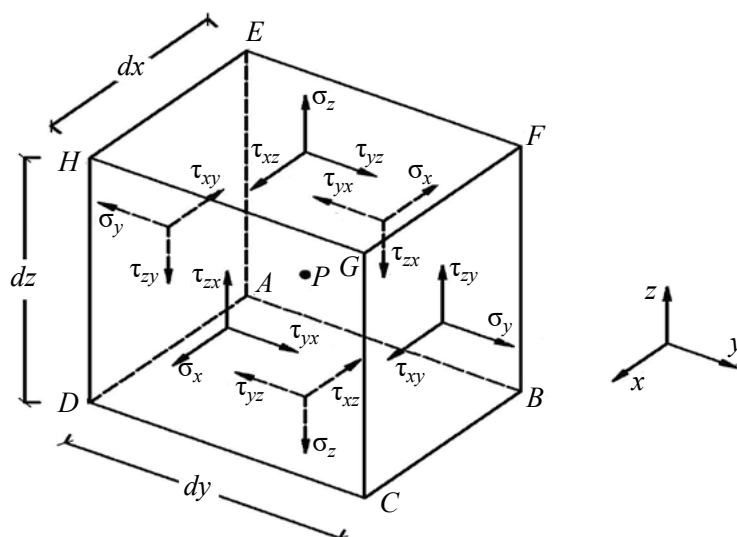


Рис. 11. Положительные нормальные и касательные напряжения на элементарном параллелепипеде

В последующем изложении для напряжений будет использоваться соглашение фон Кармана (Theodore von Karman). Согласно этому соглашению, напряжения положительны, если они имеют то же направление, что и ось координат, которой они параллельны, в случае положительной грани. В случае отрицательной грани напряжения будут положительными, если они имеют направление, противоположное соответствующей оси координат.

Мы будем обозначать нормальные напряжения, параллельные осям x , y и z , как σ_x , σ_y и σ_z соответственно. Касательные напряжения представлены обозначением τ_{ij} , где индекс i представляет направление вектора касательного напряжения, а j — направление нормали грани. Например, τ_{yz} обозначает компонент касательного напряжения, который параллелен оси координат y и действует в грани, нормаль которой параллельна оси z . На рис. 11 показаны напряжения, действующие на параллелепипеде.

Компоненты внешней силы положительны, если они имеют то же направление, что и оси координат, которым они параллельны.

2.3. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

Напряжения внутри тела и внешние силы на поверхности тела должны подчиняться статическим и динамическим условиям равновесия. Используя эти условия, можно установить некоторые соотношения внутри тела, а также на его границе. Эти фундаментальные соотношения выводятся в следующих двух подразделах.

2.3.1. Равновесие внутри тела

Рассмотрим элементарный параллелепипед в окрестности точки P внутри тела (см. рис. 11). Статическое равновесие параллелепипеда под действием системы внутренних сил требует, чтобы равнодействующая сила и равнодействующий момент обращались в нуль. Если равнодействующий момент равен нулю, мы имеем *вращательное равновесие*; если равнодействующая сила равна нулю, достигается *поступательное равновесие*.

Силы, действующие в прямоугольном параллелепипеде, определяемом тремя парами граней на рис. 11, находятся в поступательном равновесии, поскольку векторы напряжений в каждой паре граней равны (точнее, разность между ними бесконечно мала, и ею можно пренебречь) и имеют противоположные направления. Объемные силы, таким образом, уравновешиваются бесконечно малой разницей между напряжениями в отрицательных и положительных гранях пары. Соответствующие выражения приведены ниже. Сначала проанализируем условия вращательного равновесия.

Вращательное равновесие

Вращательное равновесие гарантировано в том случае, если моменты сил относительно трех осей, имеющих общую точку, непараллельны и не лежат в одной плоскости, равны нулю. Для простоты рассмотрим оси, которые параллельны координационным осям и проходят через геометрический центр P бесконечно малого параллелепипеда (рис. 12). Рассматривая, например, ось x' , параллельную x , единственными силами, имеющими ненулевой момент относительно этой оси, являются равнодействующие τ_{xz} и τ_{zx} .

Условие нулевого момента сил, которые возникают из-за напряжений, представленных на рис. 12, вокруг оси x' , может быть выражено уравнением

$$2\left(\tau_{xz}dxdy\frac{dz}{2}\right) - 2\left(\tau_{zx}dydz\frac{dx}{2}\right) = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (3)$$

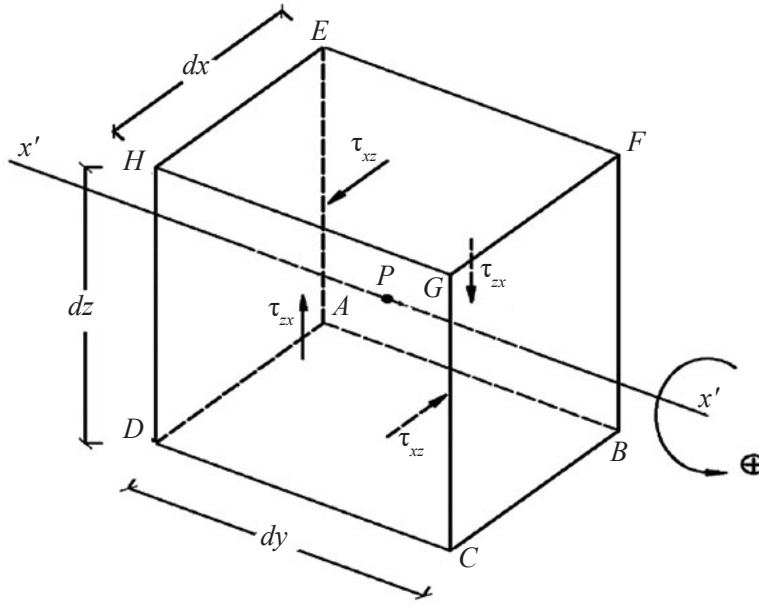


Рис. 12. Вращательное равновесие вокруг оси x'

Условия, которые выражают вращательное равновесие вокруг осей y' и z' , параллельных координационным осям y и z , соответственно приводят к выводу, что $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Эти выражения вместе с выражением (3) представляют собой закон *парности касательных напряжений* на двух взаимно перпендикулярных гранях. Поскольку оси отсчета (x' , y' и z') могут иметь любую пространственную ориентацию, закон парности касательных напряжений может быть выражен следующим образом: *две взаимно перпендикулярные грани, компоненты касательных напряжений которых перпендикулярны общему краю двух граней, имеют одинаковую величину и либо обе указывают на этот край, либо обе расходятся от него.*

Поступательное равновесие

Как указано выше, напряжения, которые действуют на грани бесконечно малого параллелепипеда (см. рис. 11), уже находятся в условии поступательного равновесия. Равнодействующие силы напряжения являются бесконечно малыми величинами второго порядка: например, сила, соответствующая напряжению σ_y , равна $\sigma_y dxdz$. Объемные силы, действующие в параллелепипеде, — бесконечно малые величины третьего порядка: например, сила, соответствующая объемной силе X на единицу объема в направлении x , равна $Xdxdydz$. По этим причинам объемные силы можно связать с силами, соответствующими изменению напряжения, которые также являются бесконечно малыми величинами третьего порядка. Поскольку $\sigma_x, \dots, \tau_{zy}$ есть средние значения напряжений на гранях, необходимо только вычислить изменение напряжения в направлении координаты, соответствующей нормали грани, на которую

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru