Содержание

Введение

Все, кто изучали историю, технологию или теорию вычислительных машин, вероятно, сталкивались с понятием *машины Тьюринга*. Машина Тьюринга – это воображаемый, не совсем даже гипотетический, компьютер, изобретенный в 1936 году английским математиком Аланом Тьюрингом (1912–1954) для того, чтобы помочь решить проблему математической логики. В качестве побочного продукта Тьюринг создал новое поле исследований, известное как теория вычислений или вычислимость, которая изучает возможности и ограничения компьютеров.

Хотя машина Тьюринга – довольно неправдоподобный компьютер, она полезна тем, что является чрезвычайно простой. Элементарная машина Тьюринга выполняет лишь несколько простых операций. Если бы эта машина делала чуть меньше, чем она делает, она не делала бы вообще ничего. Однако за счет комбинаций этих простых операций машина Тьюринга может выполнить любое вычисление, на которое способен современный цифровой компьютер.

Разобрав компьютер до оснований, мы можем лучше понять его возможности и, что немаловажно, его ограничения. Задолго до того, как было показано, что может компьютер, Тьюринг доказал, чего он *никогда* не сможет сделать.

Машина Тьюринга остается популярной темой для суждений и толкований. (Попробуйте набрать «машина Тьюринга» в вашем любимом поисковике в Интернете.) Однако я подозреваю, что оригинальная статья Алана Тьюринга, описывающая его изобретение, читается редко. Возможно, такое пренебрежение связано с ее заголовком «О вычислимых числах применительно к Entscheidungsproblem». Даже если вы можете выговорить без запинки это слово, сделав ударение на втором слоге и произнеся его как «шай», и знаете, что оно значит («проблема разрешимости»), у вас все же остается подозрение, что Тьюринг предполагает предварительное знакомство своего читателя с трудными немецкими математическими рукописями. Беглый просмотр статьи, где для обозначения состояний машины используется готический шрифт, отнюдь не помогает унять эти страхи. Так может ли читатель в наши дни взяться за статью, опубликованную 70 лет назад в *Трудах Лондонского математического общества*, и остаться на плаву достаточно долго, чтобы в полной мере проникнуться ею и, возможно, даже получить от нее удовольствие?

Обо всем этом – наша книга. Она содержит оригинальную 36-страничную статью Тьюринга «О вычислимых числах применительно к Entscheidungsproblem»[1] и последующие трехстраничные Исправления[2], а также вспомогательные главы и развернутые комментарии.

Чтение оригинальной статьи Тьюринга – это уникальное путешествие в его изобретательный и захватывающий образ мыслей, когда он создает машину, которая имела такие далеко идущие последствия для вычислений и, больше того, для нашего понимания ограничений математики, человеческого мышления и, возможно даже, природы вселенной. (Конечно, самого термина «машина Тьюринга» в статье Тьюринга нет. Он назвал ее «вычислительной машиной». Но термин «машина Тьюринга» использовался уже с начала 1937 года[3] и с тех пор остается общепринятым.) В своих комментариях к статье Тьюринга я счел полезным часто прерывать его изложение своими пояснениями и уточнениями. Я пытался (не всегда успешно) не прерывать его посреди предложения. В большей части своих объяснений я сохранял терминологию и систему обозначений самого Тьюринга, но время от времени ощущал необходимость ввести термины, которые Тьюринг не использует, но которые я счел полезными при объяснении его работы.

Текст статьи Тьюринга выделяется затененным фоном:

> Мы избежим путаницы, говоря чаще о вычислимых последовательностях, нежели о вычислимых числах.

Мы (то есть мой издатель и я) попытались сохранить типографский набор и верстку оригинальной статьи, за исключением некоторых причуд (таких, как пробелы перед двоеточиями), которые вызывали «панику» в современных текстовых редакторах. Сохранены все оригинальные разрывы строк. В статье Тьюринга есть несколько опечаток, ошибок и пропусков. Они оставлены без изменений, но я обращаю на них внимание в своих комментариях. Тьюринг часто

---

[1] Turing A. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2nd series, Vol. 42 (1936), pp. 230–265.

[2] Turing A. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. A Correction, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2nd series, Vol. 43 (1937), pp. 544–546.

[3] Alonzo Church, review of «On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem», *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 2, No. 1 (Mar. 1937), 42–43.

ссылается на предыдущие части своей статьи путем указания номера страницы оригинала в журнале. Я оставил эти ссылки в покое, но снабдил свои комментарии подсказкой для поиска определенной страницы в этой книге. Иногда в тексте Тьюринга вы увидите номер в квадратных скобках:

> Если буквы заменить числами, как в §5, мы получим числовое
> [243]
> описание полной конфигурации, которое можно назвать ее описательным номером.

Это – конец одной и начало следующей страницы оригинала с ее номером. Мои сноски – номерные; сноски Тьюринга – символьные и тоже оттенены фоном. Если вы удалите страницы этой книги, вырезав и выбросив все, что не затенено, а потом склеите вместе остатки, у вас получится полная статья Тьюринга и один несчастный автор. Но гораздо интереснее, наверное, сначала прочитать эту книгу, а потом вернуться назад и прочитать саму статью Тьюринга без моих грубых вмешательств.

Статья Тьюринга расположена на страницах 84–362 этой книги, а исправления к ней – на страницах 349–362. Статья Тьюринга делится на 11 разделов (и приложение), которые начинаются на следующих страницах книги:

Первоначальным толчком к написанию Тьюрингом этой статьи было намерение решить задачу, сформулированную немецким математиком Давидом Гильбертом (1862–1943). Гильберта интересовал общий процесс определения доказуемости произвольных утверждений в математической логике. Нахождение этого «общего процесса» было известно как Entscheidungsproblem (с нем. – «решаемость задачи»). Хотя побуждением к написанию статьи для Тьюринга была, конечно же, Entscheidungsproblem, на деле бо́льшая часть статьи – о вычислимых числах. По определению Тьюринга, это числа, которые могут быть вычислены машиной. Исследование вычислимых чисел составляет первые 60% статьи Тьюринга, которые могут быть прочитаны и поняты без знания работ Гильберта по математической логике или Entscheidungsproblem.

Различие между вычислимыми числами и «вещественными числами» крайне важно для изложения Тьюринга. По этой причине первые главы данной книги представляют собой предварительную подготовку к нашей классификации чисел, охватывающей целые числа, рациональные числа, иррациональные числа, алгебраические числа и трансцендентные числа, все из которых относятся также к вещественным числам. Я старался не полагаться на какие-либо предварительные знания, более сложные, чем математика средней школы. Понимая, что некоторых читателей от радостей средней школы могут отделять несколько десятилетий, я попытался освежить эти воспоминания. Прошу простить, если мое педагогическое рвение привело к таким объяснениям, которые унижают или оскорбляют кого-то.

Хотя я подозреваю, что эта книга будет читаться главным образом специалистами по информатике, программистами и прочими «технарями», я постарался доставить радость и непрограммистам, используя дружелюбный жаргон и терминологию из области искусства. Статья Тьюринга – это «один из интеллектуальных ориентиров прошедшего столетия»[1], и я надеюсь, что данная книга сделает эту статью доступной еще более широкой аудитории.

Чтобы угодить запросам разных читателей, я поделил эту книгу на четыре части:

- Часть I («Основы») охватывает исторический и математический фон, который необходим, чтобы приступить к чтению статьи Тьюринга.
- Часть II («Вычислимые числа») содержит бо́льшую часть статьи Тьюринга и будет особенно полезна читателям, интересующимся машиной Тьюринга и вопросами вычислимости.

---

[1] John P. Burgess, предисловие к George S. Boolos, John P. Burgess, and Richard C. Jeffrey, *Computability and Logic*, fourth edition (Cambridge University Press, 2002), xi.

- Часть III («Entscheidungsproblem») начинается совсем коротким введением в математическую логику и продолжается разбором оставшейся части статьи Тьюринга.
- В части IV («И далее») обсуждается, как случилось, что машина Тьюринга стала важным инструментом для понимания компьютеров, человеческого сознания и самой вселенной.

Математическое содержание части III, конечно, гораздо сложнее, чем в предыдущих главах, и излагается в более быстром темпе. Те, кто не очень интересуется значением статьи Тьюринга для математической логики, могли бы даже при желании пропустить пять глав части III и перейти сразу к части IV.

Эта книга затрагивает несколько больших разделов математики, включая вычислимость и математическую логику. Я выбрал и предпочел только наиболее важные для понимания статьи Тьюринга темы и понятия. Многие детали опущены, и эта книга не заменит глубины и строгости, которую вы найдете в книгах, специально посвященных вычислимости и логике. Те читатели, которые намерены глубже покопаться в этих захватывающих областях исследований, могут руководствоваться библиографией.

За всю свою жизнь Алан Тьюринг опубликовал около 30 работ и статей[1], но не написал ни одной книги. Две статьи Тьюринга стали причиной его неугасающей известности. Конечно же, первая из них – «О вычислимых числах». Вторая – гораздо менее техническая статья под названием «Вычислительные машины и интеллект» (опубликована в 1950 году), где Тьюринг придумал то, что теперь в искусственном интеллекте называется тестом Тьюринга. Суть его в том, что если машина может заставить нас поверить, что она – человек, то мы с большой вероятностью должны считать, что она обладает интеллектом.

Машина Тьюринга и тест Тьюринга – это две заявки Алана Тьюринга на литературное и культурное бессмертие. На первый взгляд, они могут казаться двумя совершенно разными понятиями, но это не так. Машина Тьюринга – это, в сущности, попытка описать чисто механически действия человека, выполняющего математический ал-

---

[1] Эти и другие документы доступны в четырехтомнике *The Collected Works of A. M. Turing* (Amsterdam: Elsevier, 1992, 2001). Большая часть очень ценного материала была собрана Б. Джеком Коуплендом (B. Jack Copeland) в *The Essential Turing* (Oxford University Press, 2004) и в *Alan Turing's Automatic Computing Engine* (Oxford University Press, 2005). Первая книга содержит работы и статьи о машине Тьюринга, а вторая – о проекте компьютера ACE второй половины 1940-х годов.

горитм; тест Тьюринга – это оценка человеком действий компьютера. С самых ранних своих математических исследований и до самых поздних Тьюринг изучал связь между человеческим разумом и вычислительной машиной способом, который продолжает оставаться захватывающим и побуждающим.

Можно обсуждать работы Тьюринга, ничего не говоря о Тьюринге-человеке, и многие учебники по вычислимости не утруждают себя подробностями его биографии. Я не счел это возможным здесь. Секретная работа Тьюринга по криптоанализу во время Второй мировой войны, его участие в перспективных компьютерных проектах, его размышления об искусственном интеллекте, его сексуальная ориентация, его арест и судебное преследование за преступление в «грязной непристойности» и его ранняя смерть в результате явного самоубийства в возрасте 41 года – все это заслуживает внимания.

Моя работа по изложению основных фактов жизни Тьюринга была очень облегчена замечательной биографией *Алан Тьюринг: Загадка* (Simon & Schuster, 1983) английского математика Эндрю Ходжеса (род. 1949). Ходжес заинтересовался Тьюрингом отчасти из-за своего собственного участия в освободительном движении геев в 1970-х годах. Написанная Ходжесом биография вдохновила Хью Уайтмора на пьесу под названием *Взлом кода* (1986). На сцене и в сокращенной версии для телевидения в 1996 году роль Алана Тьюринга была исполнена Дереком Якоби.

Подобно ранним английским математикам и компьютерным первопроходцам Чарльзу Бэббиджу (1791–1871) и Аде Лавлейс (1815–1852), Тьюринг стал символом компьютерного века. Премия Тьюринга – это ежегодная награда в 100 000 долларов, вручаемая Ассоциацией вычислительных машин (ACM) за большой вклад в вычислительную технику. Существуют язык программирования Тьюринг (производный от Паскаля) и программное обеспечение «Мир Тьюринга» для сборки машин Тьюринга.

Имя Тьюринга стало почти нарицательным в программировании, причем настолько, что А. К. Дьюдни смог озаглавить свои «Экскурсии по информатике» как *Омнибус Тьюринга* (Dewdney A. K. *The Turing Omnibus: Excursions in Computer Science*. Computer Science Press, 1989). Книга «Западная культура в век компьютеров» Дж. Дэвида Болтера называется *Человек Тьюринга* (Bolter J. D. *Turing's Man: Western Culture in the Computer Age*. University of North Caroline Press, 1984), а критический анализ Брайена Ротмана традиционных математических понятий бесконечности *До бесконечности* получила забавный подзаголовок «Призрак в машине Тьюринга» (Rotman B. *Ad Infinitum: The Ghost in Turing's Machine*. Stanford University Press, 1993).

Алан Тьюринг вызывал некоторый научный интерес и за пределами математики и информатики. Сборник *Новый взгляд: Странные толкования в фантастике* (*Novel Gazing: Queer Readings in Fiction*, Duke University Press, 1997) содержит эссе Тайлера Кертина под заглавием «'Дурман' машин: *Neuromancer*, интернет-сексуальность и тест Тьюринга» (Tyler Curtain. *The 'Sinister Fruitiness' of Machines: Neuromancer*, Internet Sexuality, and the Turing Test). Заголовок доктора Кертина ссылается на известный «киберпанк»-роман Уильяма Гибсона *Neuromancer* (Gibson W. *Neuromancer*. Ace, 1984), в котором полиция Тьюринга помогает убедиться в том, что существа с искусственным интеллектом не стремятся повысить свой собственный интеллект.

Тьюринг появлялся в названиях еще нескольких романов. Марвин Минский (известный исследователь MIT в области искусственного интеллекта) сотрудничал с писателем-фантастом Гарри Харрисоном в *Варианте Тьюринга* (Harry Harrison, Marvin Minsky. *The Turing Option*. Warner Books, 1992), а профессор информатики из Беркли Христос Х. Пападимитриу разрешился сочинением *Тьюринг* (*Роман о вычислении*) (Christos H. Papadimitriou. *Turing (A Novel About Computation*. MIT Press, 2003).

В *Бреде Тьюринга* боливийского романиста Эдмундо Пас Сольдена (Soldán Edmundo Paz. *Turing's Delirium*. Trans. Lisa Carter. Houghton Mifflin, 2006) криптоаналитик по прозвищу Тьюринг вскрывает опасности использования его навыков для коррумпированного правительства. В романе Жанны Левин *Сумасшедшие мечты машин Тьюринга* (Levin Janna. *A Madman Dreams of Turing Machines*. Knopf, 2006) вымышленные жизни Алана Тьюринга и Курта Гёделя странно взаимодействуют в пространстве и времени.

Алан Тьюринг – персонаж книг *Криптономикон* Нила Стефенсона (Stephenson Neal. *Cryptonomicon*. Avon, 1999), *Загадка* Роберта Харриса (Harris Robert. *Enigma*. Hutchinson, 1995), *Кембриджский Квинтет: Работа научного предположения* Джона Л. Касти (Casti John L. *The Cambridge Quintet: A Work of Scientific Speculation*. Perseus Books, 1998) и, конечно, *Гёдель, Эшер, Бах* Дугласа Хофштадтера (Hofstadter Douglas. *Gödel, Escher, Bach*. Basic Books, 1979). От лица Алана Тьюринга ведется рассказ в новелле «Доктор Кто» Пола Леонарда – одной из частей *Теста Тьюринга* (Leonard Paul. Dr. Who. *The Turing Test*, BBC, 2000).

Хоть и приятно, что Алан Тьюринг почитается такими разными способами, существует опасность, что настоящая работа Тьюринга окажется забытой. Даже тех, кто изучал теорию вычислений и полагает, что знает о машинах Тьюринга все, ждет, я надеюсь, несколько сюрпризов при знакомстве с самой первой машиной Тьюринга, построенной самим автором.

* * *

Эта книга была задумана в 1999 году. Потом в течение следующих пяти лет я писал понемногу и нерегулярно. Первые одиннадцать глав в основном были закончены в 2004 и 2005 годах. Последние семь глав я написал в 2007 и 2008 годах, прервав работу лишь для того, чтобы жениться (наконец!) на моей давней лучшей подруге и любви моей жизни Дирдре Синнотт.

Большое спасибо Лондонскому математическому обществу за разрешение перепечатать в полном объеме статью Алана Тьюринга «О вычислимых числах применительно к Entscheidungsproblem».

Уолтер Вильямс и Ларри Смит прочли ранние черновики этой книги, обнаружив ряд ошибок и предложив несколько полезных улучшений.

Людям из Wiley я вечно благодарен за их работу по превращению этого любимого моего проекта в реально изданную книгу. Крис Вебб продвигал книгу, исполняющий редактор Кристофер Ривера и производственный редактор Анджела Смит решили множество конструктивных и типографских проблем, а технический редактор Питер Бонфэнти помог мне приложить чуть больше усердия к техническим материалам. Многие из Wiley работали бескорыстно, помогая сделать эту книгу как можно лучше. Все остальные недостатки, недочеты или ужасные ошибки можно отнести только к автору.

Любой автор стоит на плечах тех, кто пришел раньше. В избранной библиографии перечислены лишь несколько из множества книг, которые помогали мне при написании этой книги. Кроме того, я хотел бы поблагодарить персонал Публичной библиотеки Нью-Йорка и особенно Библиотеку по науке, промышленности и бизнесу (Science, Industry, and Business Library, SIBL). Для получения оригинальных статей я широко пользовался JSTOR и обнаружил, что Wikipedia, Google Book Search и MathWorld Уолфрэма тоже полезны.

* * *

Информацию и ресурсы, относящиеся к этой книге, можно найти на веб-сайте www.TheAnnotatedTuring.com.

Чарльз Петцольд,
Нью-Йорк Сити и Роско, Нью-Йорк
Май, 2008

Часть I

Основы

Глава 1

Прах Диофанта покоится в этой могиле

Много веков назад в древней Александрии старик должен был хоронить своего сына. Убитый горем, он утешал себя составлением большого сборника алгебраических задач с решениями в книге, названной им *Арифметика* (*Arithmetica*). Вот, пожалуй, и все, что известно о Диофанте из Александрии, и большая часть этого исходит от загадки, которая, как полагают, была написана его близким другом вскоре после его смерти[1]:

> Прах Диофанта покоится в этой могиле. И она, о чудо, искусно поведает нам, сколь долог был его век. Шестую часть жизни Бог одарил его детством; когда минула еще одна двенадцатая часть, пушком покрылись его щеки; спустя седьмую долю жизни, Он зажег его брачную свечу, а на пятом году его брака Он послал ему сына. Увы, поздний и слабый ребенок, достигнув половины жизни отца своего, был забран холодной могилой. Еще четыре года горе свое утешал он наукой о числах, и тут конца жизни своей он достиг[2].

Эпитафия немного неоднозначна в отношении смерти сына Диофанта. Как в ней сказано, тот умер, «достигнув половины жизни отца своего», но что значит эта половина жизни отца – половина возраста Диофанта – момент смерти его сына или на момент его собственной смерти? Задачу можно решать любым способом, но вторая версия – сын Диофанта прожил половину лет, которые в итоге прожил сам

---

[1] Thomas L. Heath, *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra*, second edition (Cambridge University Press, 1910; Dover Publications, 1964), 3.

[2] *Greek Mathematical Works II: Aristarchus to Pappus of Alexandria* (Loeb Classical Library No. 362), translated by Ivor Thomas (Harvard University Press, 1941), 512–3.

Диофант, – имеет хорошее, простое решение в целых числах без долей лет.

Пусть x – это общее количество лет, прожитых Диофантом. Каждый отрезок жизни Диофанта – это либо доля его полной жизни (например, $x/6$ – это его детство), либо целое число лет (например, до рождения сына он был женат 5 лет).

Сумма всех этих периодов жизни Диофанта равна x, поэтому загадку можно записать просто алгебраически:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей – 84, поэтому умножим на него все члены уравнения слева и справа:

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x.$$

Собрав множители x в левой части, а константы – в правой, получим:

$$84x - 14x - 7x - 12x - 42x = 420 + 336.$$

Или:

$$9x = 756.$$

А само решение:

$$x = 84.$$

Итак, до 14 лет Диофант был мальчиком, а через 7 лет смог, наконец, отрастить бороду. Спустя двенадцать лет, в возрасте 33 года, он женился, а через 5 лет у него родился сын. Сын умер в возрасте 42 года, когда Диофанту было 80, а сам Диофант умер 4 года спустя.

На самом деле есть более быстрый способ решения этой загадки: если задуматься глубже, то можно понять, что у автора загадки нет намерения утруждать нас дробными числами. «Двенадцатая часть» и «седьмая часть» жизни Диофанта должны быть целыми числами, поэтому возраст в год его смерти делится одинаково и на 12, и на 7 (и еще на 6 и на 2). Вот и умножьте 12 на 7, чтобы получить 84. Для зрелого возраста это близко к истине и потому, наверно, правильно.

Возможно, Диофант умер в 84 года, но крайне важный исторический вопрос – *когда?* Когда-то оценки периода жизни Диофанта колебались от 150 года до н. э. до 280 года н. э.[1] Это довольно расплывчатый диапазон: он определенно ставит Диофанта после таких ранних александрийских математиков, как Евклид (блистал ок. 295 г. до н. э.[2]) и Эратосфен (ок. 276–195 г. до н. э.), но может сделать его современником Герона Александрийского (известного и как Герой и блиставшего в 62 г. н. э.), который написал книги по механике, пневматике и автоматах и, видимо, изобрел прообраз парового двигателя. Возможно, Диофант знал и александрийского астронома Птолемея (ок. 100–170 г. н. э.), известного главным образом по *Альмагесту*, содержавшему первую тригонометрическую таблицу и заложившему основы математики движения небесных тел, которая не была убедительно опровергнута вплоть до революции Коперника в XVI–XVII веках.

К сожалению, у Диофанта, видимо, не было контактов с другими александрийскими математиками и учеными. В последние примерно сто лет исследователи сходятся во мнении, что Диофант творил около 250 года н. э., и его самый главный труд *Арифметика* датируется, скорее всего, этим временем. Так что время рождения Диофанта приходится примерно на время смерти Птолемея. Пол Теннери, который редактировал каноническое греческое издание *Арифметики* (издано в 1893–1895 гг.), отмечал, что работа была посвящена «уважаемому Дионисию». Несмотря на распространенное имя, Теннери догадался, что это был тот самый Дионисий, который был главой школы Катехизиса в Александрии в 232–247 годах, а затем Епископом Александрийским в 248–265 годах. Таким образом, Диофант мог быть христианином[3]. Если это так, то можно усмотреть злую иронию в том, что один из ранних (но потерянных) комментариев к *Арифметике* был написан Ипатией (Hypatia) (ок. 370–415 гг.), дочерью Теона (Theon) и последней из великих александрийских математиков, которая была забита толпой христиан, настроенной против ее «языческой» философии.

Математика Древней Греции была традиционно сильнейшей в геометрии и астрономии. Диофант был этническим греком, но его отли-

---

[1] Эти даты до сих пор сохраняются в Simon Hornblower and Antony Sprawforth, eds., Oxford Classical Dictionary, revised third edition (Oxford University Press, 2003), 483.

[2] Все остальные даты александрийских математиков – из Charles Coulston Gillispie, ed., Dictionary of Scientific Biography (Scribners, 1970).

[3] Heath, Diophantus of Alexandria, 2, note 2. Сам же автор этой книги, похоже, сомневается в этом.

чало то, что он утешал свое горе после смерти сына «наукой о числах», или, как мы теперь ее называем, *алгеброй*. Видимо, от него исходит несколько алгебраических новшеств, включая использование символов и сокращений, означавших переход от словесной формулировки задачи к современной алгебраической нотации.

Шесть книг *Арифметики* (считается, что изначально их было 13) представляют собой задачи нарастающей сложности, большинство из которых едва ли труднее, чем загадка о возрасте Диофанта. Нередко задачи Диофанта имеют много неизвестных. Некоторые из его задач *неопределенны*, то есть имеют более одного решения. Все, кроме одной, задачи из *Арифметики* абстрактны в том смысле, что они строго числовые и не относятся к объектам реального мира.

Еще один элемент абстракции у Диофанта – возведение в степень. До того времени математикам были известны степени 2 и 3. Квадраты были нужны для вычисления площадей, а кубы – для вычисления объемов тел. Но Диофант допускал в своих задачах и более высокие степени: степень 4 (которую он назвал «квадрат квадрата»), 5 («квадрат куба») и 6 («куб куба»). Такие степени не имели физической аналогии в мире, который был известен Диофанту, и указывали на то, что Диофант не очень беспокоился о практичности своей математики. Это была просто занимательная математика без цели, но для развития ума.

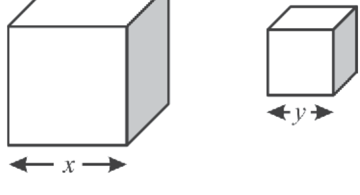
Вот первая задача из Книги IV[1]. Диофант формулирует ее сначала общими словами:

> Разделить заданное число на два куба так, чтобы сумма их сторон была равна другому заданному числу.

Затем он задает эти два числа:

> Заданное число – 370, заданная сумма сторон – 10.

Геометрически он имеет дело с двумя кубами разных размеров. Как современные алгебраисты, мы с вами могли бы обозначить стороны двух кубов x и y:



[1] Heath, Diophantus of Alexandria, 168.

Эти две стороны (x и y) составляют в сумме 10. Объемы двух кубов (x^3 и y^3) в сумме дают 370. Теперь запишем два уравнения:

$x + y = 10;$
$x^3 + y^3 = 370.$

Из первого уравнения следует, что y равно $(10 - x)$, и его можно подставить во второе уравнение:

$$x^3 + (10 - x)^3 = 370.$$

Теперь трижды перемножаем $(10 - x)$ и уповаем, чтобы кубы в конечном счете сократились:

$$x^3 + (1000 + 30x^2 - 300x - x^3) = 370.$$

К счастью, так и происходит, и после небольших группировок получаем:

$$30x^2 - 300x + 630 = 0.$$

Коэффициенты в левой части имеют общий множитель, поэтому желательно сократить обе части на 30:

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Теперь все почти готово. У нас есть два варианта. Если вспомнить формулы квадратных уравнений[1], то можно применить их. Или если еще свеж опыт решения подобных уравнений, можно, пристально взглянув на него и подумав некоторое время, разложить его, как по волшебству, следующим образом:

$$(x - 7)(x - 3) = 0.$$

Таким образом, длины двух сторон – 7 и 3. В сумме они дают 10, а их кубы – 343 и 27 – дают в сумме 370.

Диофант решает задачу совсем не так, как мы с вами. В сущности, он этого просто не может сделать. Хотя часто в задачах Диофанта много неизвестных, его система обозначений позволяет ему представлять только одно неизвестное. Однако он очень изобретательно восполняет данный недостаток. Вместо того чтобы обозначать стороны двух кубов как x и y, он говорит, что эти две стороны равны $(5 + x)$ и $(5 - x)$. Две эти стороны выражаются посредством одного неизвест-

---

[1] Для $ax^2 + bx + c = 0$ решение $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ного x, и они на самом деле дают в сумме 10. Тогда он может возвести их в куб и приравнять сумму к 370:

$$(5 + x)^3 + (5 - x)^3 = 370.$$

Теперь это выглядит хуже того, с чем мы уже сталкивались, но стоит только развернуть кубические скобки, как члены уравнения начинают сокращаться, как сумасшедшие, и у нас остается лишь:

$$30x^2 + 250 = 370.$$

После некоторых простейших перегруппировок и последующего деления на 30 оно сводится к

$$x^2 = 4.$$

Или x равняется 2. Так как стороны – это $(5 + x)$ и $(5 - x)$, то их величины – 7 и 3.

Умение Диофанта решать такие задачи с меньшими, чем современный студент, усилиями – результат его потрясающей способности выражать должным образом две величины посредством одной переменной. Сработает ли этот метод в следующей задаче? Может, да. А может, нет. Разработка общих методов решения алгебраических уравнений – это то, чего у Диофанта, по сути дела, *нет* вообще. Как заметил один математик, «каждый вопрос требует весьма специфического метода, который зачастую не пригоден даже для очень близких задач. Именно поэтому современному математику даже после изучения ста диофантовых задач будет трудно решить сто первую»[1].

Понятно, что когда Диофант предлагает задачу с суммой кубов 370 и суммой сторон 10, он, конечно же, берет числа не с потолка. Он знает, что эти условия приводят к решению в целых числах. Действительно, термин *диофантово уравнение* появился для обозначения алгебраического уравнения, где допустимы только целочисленные решения. Диофантовы уравнения могут иметь множество неизвестных, и эти неизвестные могут возводиться в целочисленные степени, однако решения (если они есть) – всегда целочисленные. Несмотря на то что при формулировке своих задач Диофант часто использует вычитание, его решения никогда не содержат отрицательных чисел. «Очевидно, что об отрицательных величинах *как таковых*, то есть без

---

[1] Это цитата Германа Ганкеля (Hermann Hankel) (1874) из книги Heath, Diophantus of Alexandria, 54–55. Другие математики обнаружили общие подходы в методах Диофанта. См. Bashmakova I. G. Diophantus and Diophantine Equations (Mathematical Association of America, 1997), ch. 4.

некоего положительного значения, которое вычитается из чего-то, Диофант понятия не имел»[1]. Так же, как не было у него ни одной задачи с нулевым решением. Ноль у древних греков не считался числом.

Современные читатели Диофанта – особенно те, кто уже знают, что диофантовы уравнения имеют лишь целочисленные решения, – могут слегка удивиться, обнаружив у Диофанта *рациональные числа*. Рациональными их называют не потому, что они логичны или разумны в некотором смысле, а потому, что их можно представить как *отношение* (*ratio*) двух целых чисел. Например,

$$\frac{3}{6}$$

– рациональное число.

Рациональные числа появляются лишь в одной задаче *Арифметики*, которая содержит настоящие объекты реального мира, особенно такие вечно любимые, как вино и деньги. В условии задачи рациональных чисел будто бы нет, но они потребуются при ее решении:

> Человек покупает некоторое количество мер вина: одно вино – по 8, другое – по 5 драхм за меру. Он платит за них *квадратное* число драхм; а если мы добавим к этому числу 60, то получим квадрат, сторона которого есть целое число мер. Определите, сколько мер он купил по каждой цене[2].

Под «квадратным числом» Диофант понимает результат умножения некоторого числа на себя. Например, 25 – это квадратное число, так как оно равно 5 раз по 5.

После страницы расчетов[3] оказывается, что количество мер по 5 драхм – это рациональное число

$$\frac{79}{12},$$

а количество мер по 8 драхм – это рациональное число

$$\frac{59}{12}.$$

Давайте проверим эти результаты. (Проверить решение гораздо легче, чем найти его.) Если умножить 5 драхм на 79/12 и добавить к этому произведение 8 драхм на 59/12, получится, что человек за-

---

1 Heath, Diophantus of Alexandria, 52–53.
2 Heath, Diophantus of Alexandria, 224.
3 Heath, Diophantus of Alexandria, 225.

платил в общей сложности $72^1/_4$ драхмы. Диофант утверждает, что человек заплатил «*квадратное* число драхм», то есть плата должна быть квадратом чего-то. Довольно любопытно, что Диофант считает $72^1/_4$ квадратным числом, раз оно может быть выражено отношением

$$\frac{289}{4},$$

где и числитель, и знаменатель – квадраты 17 и 2 соответственно. Таким образом, $72^1/_4$ – квадрат 17/2, или $8^1/_2$. Дальше Диофант говорит, что «если мы добавим к этому числу 60, то получим квадрат, сторона которого есть целое число мер». И здесь «целое число мер» не связано с целыми числами. Диофант (или, точнее, его английский переводчик сэр Томас Хит (Thomas Heath)) подразумевает под этим *общее* число мер. Добавление 60 к $72^1/_4$ дает в результате рациональное число $132^1/_4$, или

$$\frac{529}{4}.$$

И снова Диофант считает, что это квадрат, потому что и числитель, и знаменатель – квадраты 23 и 2 соответственно. Таким образом, общее число купленных мер – 23/2, или $11^1/_2$, что можно также получить сложением 79/12 и 59/12.

Наверное, самая известная задача в *Арифметике* – это задача 8 из Книги II: «Разбить заданное квадратное число на два квадрата», то есть найти такие x, y и z, что

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

У этой задачи есть геометрическая интерпретация, связанная с теоремой Пифагора о соотношении сторон прямоугольного треугольника: