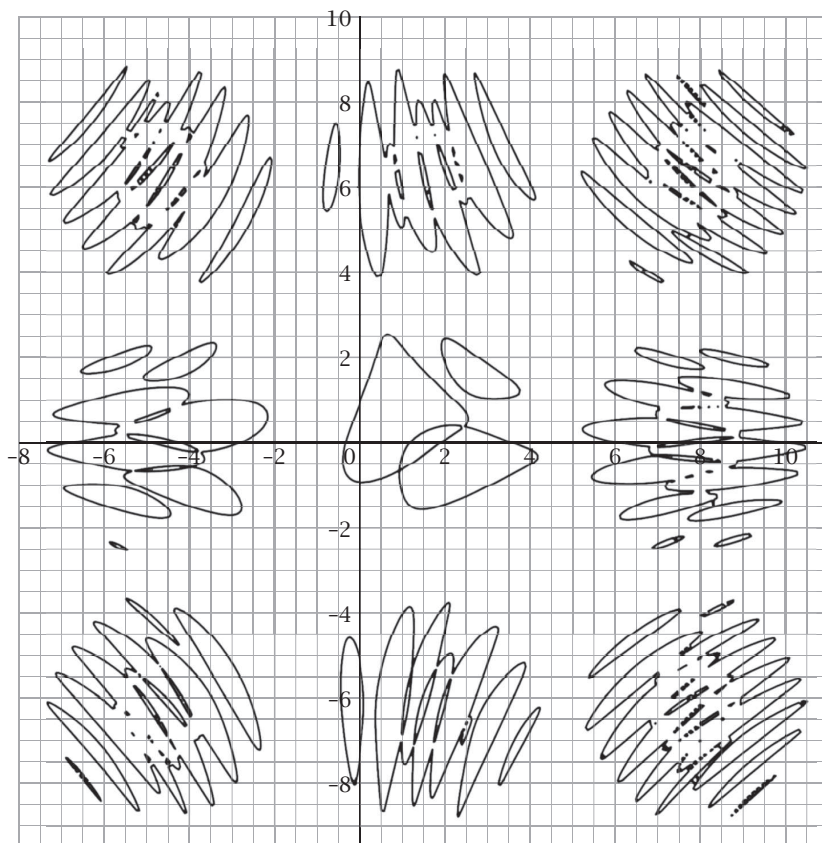


18315337206697857941381316112026049056203
92616665711564966607842166814649870825958
26896046168627213434548372679840038786077
30520751834344363454057224837023166394849
10836103157729423210718408197217705622971
62281857627692632972691882708869450959589
82521973143488463804132789716989507981644
85545448327206383563337271761017072256202
02965299323169703097145697089728882897417
65584388291547542211329679431397905863491
72698057162551575897389997339630723041481
50107992987929819107147019732608436103300
5139248807530985519725061674012692709376

71266188410480659227201446263656645880093
18844197456940725207877835704534451970174
48862888925044952156233497248730061560706
67898686586113351446361025922643828994675
06037387814229999478145338879822045514918
98281495737692621835700841561758423731908
88117948110340670167576139867939940026365
08056189909652731801692183720033396299112
95568769154371794465470889182213946052760
07079940311919423102484304241791034442158
37192267825471649144600624995402793506701
79301774961489551329747583940212148274193
342311392795604983822250971644852273414144

Посвящается тем, кто придет, в память о тех, кто ушел

Математические закорючки



$$\sin(\sin x + \cos y) = \cos(\sin xy + \cos x)$$

Festina lente

Hâtez-vous lentement, et sans perdre courage
Vingt fois sur le métier votre ouvrage:
Polissez-le sans cesse, et le repolissez;
Ajoutez quelquefois, et souvent effacez.

Спешите медленно

Спешите медленно и, мужество утroyа,
Отделявайте стих, не ведая покоя,
Шлифуйте, чистите, пока терпенье есть:
Добавьте две строки и вычеркните шесть¹.

Никола Буало-Депрео (1636–1711)

¹ Перевод Э. Л. Линецкой.

Здесь тоже мерзко: гнусный шум и пьянка, гольф, бургундское, охота, математика, Ньюмаркет, состязания и разные бесчинства...

Лорд Байрон, из письма к мисс Элизабет Пигон
с описанием Тринити колледжа, Кембридж,
26 октября 1807

Оглавление

Предисловие от издательства	12
Предисловие.....	13
Благодарности.....	15
Глава 1. Спираль Эйлера	17
1.1. Необычная параметризация.....	17
1.2 ... но при этом естественная.....	20
1.3. Проблема	23
1.4. Кривая одна, названий много	26
Глава 2. Кривая Вейерштрасса	29
2.1. Наивные мысли.....	29
2.2. Глубокие мысли.....	31
2.3. Дифференцируемость.....	33
2.4. Доказательство Вейерштрасса	35
2.5. Отголоски	39
2.6. Заключительные мысли	41
Глава 3. Кривые Безье.....	43
3.1. Кривая кривых Безье	43
3.3. Безье и де Кастельжо.....	52
3.4. История Лумпа	54
3.5. История буквы О	55
Глава 4. Равнобочная гипербола	59
4.1. Старые логарифмы	59
4.2. Трудная проблема	61
4.3. Вычисление	68
4.4. Новые логарифмы.....	69
Глава 5. Квадратриса Гиппия.....	73
5.1. Античные задачи	73
5.2. Некоторые античные построения	75
5.3. Квадратриса и трисекция	81
5.4. Квадратриса и квадратура круга.....	84
Глава 6. Две кривые, заполняющие пространство	90
6.1. Я вижу, но не верю этому	90
6.2. Функция Пеано.....	94
6.3. Кривая Гильберта	98
6.4. Кривая Пеано.....	104

Глава 7. Кривые постоянной ширины.....	107
7.1. Треугольник Рёло.....	107
7.2. ... и его обобщения	113
7.3. И их обобщение.....	118
7.4. Окружность во всем, кроме названия?	124
Глава 8. Нормальная кривая	126
8.1. Полезный вопрос	126
8.2. Ответ, но не решение.....	128
8.3. Аппроксимация невозможного	130
8.4. Кривые ошибок	137
8.5. Настоящая кривая ошибок	142
8.6. Нормальное распределение	147
Глава 9. Цепная линия	152
9.1. Вопрос симметрии	152
9.2. Исторические ошибки	154
9.3. Оpoznанная кривая.....	159
9.4. Гиперболические функции.....	164
9.5. Перевернутая цепь.....	168
9.6. Ухабистая дорога.....	173
Глава 10. Эллиптические кривые	176
10.1. Эллиптическая неоднозначность	176
10.2. Проблемы, проблемы, проблемы.....	180
10.3. Общий взгляд	184
10.4. Проблема конгруэнтных чисел	188
10.5. Арифметика.....	193
10.6. Плодородные поля	199
10.7. Криптография.....	208
10.8. Апология	213
Приложение А. Титульный лист	215
Приложение В. Все конические сечения в одном флаконе.....	218
Приложение С. Тригонометрический вариант кривой Безье	220
Приложение D. Огибающие	222
Приложение Е. Математика арки	225
Приложение F. Простой маятник	227
Приложение G. Метод Фибоначчи.....	228
Литература	232
Предметный указатель.....	239

Предисловие от издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте www.dmkpress.com, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу http://dmkpress.com/authors/publish_book/ или напишите в издательство по адресу dmkpress@gmail.com.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг – возможно, ошибку в основном тексте или программном коде, – мы будем очень благодарны, если вы сообщите нам о ней. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Если вы найдете какие-либо ошибки в коде, пожалуйста, сообщите о них главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com, и мы исправим это в следующих тиражах.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу dmkpress@gmail.com.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

Я здесь только собрал чужие цветы,
а от меня самого – только нитка, которой они связаны.

— Мишель де Монтень¹

В 1943 г. прославленный британский военачальник, фельдмаршал сэр Арчибалд Уэйвелл, опубликовал антологию стихотворений под названием «Чужие цветы». При этом почитатель поэзии, солдат – обладатель изумительной памяти и разностороннего образования, заметил, что слово «антология» происходит от греческого *anthos*, означающего «цветок», и *logia*, производного от *legein*, означающего «собрание»: стало быть, «собрание цветов». Быть может, букет. В этом контексте слово «цветы» употребляется как метафора подборки образцов чего-то, обычно, но не всегда связанного с поэзией, составленного одним человеком и неизбежно отражающего его вкусы. Лорд Уэйвелл составлял свой букет из образцов поэзии XIX в., мы же – из длинной истории математики, а конкретно – математических кривых.

Любая кривая, имеющая название, имеет и историю, и мы поставили себе цель рассказать историю некоторых кривых в манере, которая, как мы надеемся, понравится читателям с математическим складом ума. Но каких и почему именно их? Составляя первый вариант списка кривых, мы прошерстили множество записных книжек, статей, книг и сайтов, как сорока, выбирая все блестящее только для того, чтобы впоследствии признать, что не все то золото, что блестит, и отказаться от некоторых находок. В результате осталось десять кривых – и нет сомнения, что кто-то другой выбрал бы иные.

Составитель антологии наслаждается ничем не стесненной свободой личного выбора, но и несет ответственность за целостность результата; выбор не должен быть случайным, но и полностью предсказуемым он тоже быть не может, а должен покоиться на надежном основании разумного критерия отбора. Для нас самым важным критерием была двумерность кривой, что включает пространственные кривые и кривые, расположенные в абстрактных математических мирах, – быть может, мы вернемся к ним в другой раз. Кроме того, у кривой должна быть история – интересная и, быть может, неожиданная, – и она должна быть важной в своем роде, по какому бы критерию эту важность ни оценивали. Это может быть ее форма, или угловой коэффициент, или площадь под ней, или еще какая-то значимая характеристика. А быть может, это была первая кривая такого вида. И еще хорошо бы, чтобы она была красивой. Иногда фортуна становилась на нашу сторону, и по закону неожиданных последствий на свет выплывали дополнительные интересные кривые. В част-

¹ Перевод Н. Я. Рыковой.

ности, квадратриса Гиппия сразу привлекла наше внимание и прошла последующий отбор, потому что дает возможность вернуться в мир Древней Греции и красивых построений с помощью циркуля и линейки – умение, в значительной степени утраченное в перегруженных программах математики средней школы. Мы надеемся, что, прочитав эту главу, хотя бы некоторые читатели обратят свои взоры к счастливым воспоминаниям об этих задачах, и, чем черт не шутит, даже захотят порешать еще какие-то.

Но антологии часто судят в большей степени не по тому, что включено, а по тому, что опущено, и мы опустили многое из того, что другим может показаться существенным, – прежде всего конические сечения с их долгой историей и вездесущностью. Но нам кажется, что о них уже было написано так много, так подробно и так по-разному, а их история столь величественна, что наш вклад либо занял бы слишком много страниц, заполненных рабским повторением чужих работ, либо оказался бы слишком поверхностным. Да и то сказать – не каждая же антология стихотворений включает сонеты Шекспира. Однако же конические сечения упоминаются не раз, не в одной главе и по разным поводам. Мы также признаем другие упущения и сожалеем о них, но надеемся, что читатели нас поймут.

У антологий есть особенность – их редко читают подряд. Так и с этой книгой. Главы можно читать в любом порядке, независимо друг от друга, но изредка можно встретить наложение методов, и мы надеемся, что читатель простит вытекающие отсюда незначительные повторы. Не придумав никакого разумного критерия, мы решили расположить главы в порядке возрастания количества слов.

Итак, мы приглашаем читателя присоединиться к нам в этом прихотливом и эклектичном математическом приключении, в котором мы близко познакомимся с Пабло Пикассо, Георгом II, принцем Альбертом, супругом и консортом королевы Виктории, святой инквизицией, императором Священной Римской империи (Фридрихом II) и многими математиками, жившими на протяжении тысячелетий, а также одним никогда не жившим, профессором Онесимом Дюраном. И неизбежно мы встретимся с Леонардом Эйлером. Не считая одной главы, мы не собирались касаться работ этого разностороннего гения из восемнадцатого столетия, но его имя само собой всплывало куда чаще, чем мы могли предвидеть в начале проекта. Ссылки на его работы, начинающиеся буквой «Е», взяты из *индекса Энестрёма*, названного в честь шведского математика Густава Энестрёма, составившего авторитетный список наиболее важных работ Эйлера.

Мы берем на себя ответственность за все прокравшиеся в текст ошибки, приносим свои извинения за них и заверяем читателей, что сделали все, что в наших силах, чтобы их устранить. Имея это в виду, мы и поместили в начало книги французский оригинал и английский (русский) перевод отрывка из поэмы Никола Буало «Поэтическое искусство»: оно довольно хорошо итожит процесс написания книг.

Благодарности

Говорят, что книги сами себя пишут. Это ложь. Книги сами себя не пишут. Вам даже трудно представить себе, сколько размышлений, исследований, боли в пояснице, времени и работы требуется для их написания.

Нил Гейман «Дым и зеркала», АСТ, 2023

Именно так. А еще нужна существенная помощь тех, кто немало сделал, чтобы книга увидела свет, но, как правило, остается в тени; имен этих людей вы не найдете на обложке, но без них книга, которую вы сейчас держите в руках, не появилась бы. В этом небольшом разделе я хочу хотя бы отчасти исправить это положение.

Прежде всего огромное спасибо Вики Кирн, которая недавно ушла с поста исполнительного редактора отдела математики и компьютерных наук в издательстве Принстонского университета. Вики была редактором этой и четырех моих предыдущих книг, всегда невозмутимая, доброжелательная, вдохновляющая и обаятельная. Желаю ей как можно дольше наслаждаться заслуженным отдыхом и исполнения всех желаний. Ее место заняла Сюзанна Шумейкер, которая курировала последние этапы производства и следила, чтобы не возникло никаких проблем, о чем мечтает каждый автор. Также различные немаловажные обязанности выпали на долю Доран Бучча, Пэм Шниттер, Кэтлин Чиоффи и Жаклин Пуарье и, без сомнения, многих других, кого я забыл упомянуть. Спасибо вам всем.

Джон Уэйнрайт и С. Кларк из компании T&T Productions Ltd снова взмахнули своими волшебными палочками и превратили «оконченную» рукопись в готовую книгу, разница между которыми куда больше, чем мне хотелось бы признать. Спасибо им за терпение, учтивость и очевидный опыт общения с авторами, которые знают, чего хотят, но не всегда понимают, как этого добиться. Да и можно ли этого добиться вообще.

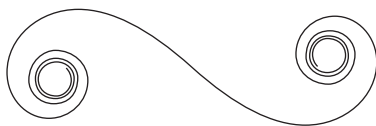
Наконец, спасибо семье и друзьям, основной вклад которых заключался просто в «присутствии». Понадобилась бы целая страница, чтобы перечислить всех, но во главе двух партий стоят моя жена, Энн, и мой давний друг, Колин. «Человек не остров», как заметил Джон Донн, и все они являются частью континента, на котором я живу, – к моему великому счастью и радости.

Что такое кривая? Всякий знает, что такое кривая, пока не выучится математике настолько, что вконец запутается в бесконечных исключениях.

— Феликс Клейн (1958)

Глава 1

Спираль Эйлера



ПОЧЕМУ ИМЕННО ЭТА КРИВАЯ?

С этой кривой связана кое-какая любопытная математика, у нее есть различные неожиданные приложения. А еще она такая восхитительно элегантная. И наша любимая.

1.1. НЕОБЫЧНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ...

Стандартная практика выражения кривой в параметрической форме $x = g(t)$, $y = h(t)$ дает формулы для обычных характеристик: углового коэффициента, площади под кривой, длины дуги и кривизны. В общепринятых обозначениях:

- угловой коэффициент: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$;
- площадь под кривой: $\int_{t_1}^{t_2} y x' dt$;
- длина дуги $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$;
- кривизна $\frac{x' y'' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$,

где штрих обозначает производную по параметру t . Если даны дифференцируемые функции $g(t)$ и $h(t)$, то основная проблема – можно ли вычислить интегралы в замкнутой форме.

Нас интересует то, что на первый взгляд может показаться весьма экзотическим примером параметризации:

$$x = x(t) = \int \cos f(t) dt = \int_0^t \cos f(u) du,$$
$$y = y(t) = \int \sin f(t) dt = \int_0^t \sin f(u) du,$$

где начальное значение параметра равно 0, а $f(u)$ – произвольная дифференцируемая функция от u . Способная поначалу испугать форма интеграла на самом деле упрощает все формулы, кроме площади под кривой:

$$\begin{aligned} x' &= x'(t) = \cos f(t) & x'' &= -f'(t) \sin f(t) \\ y' &= y'(t) = \sin f(t) & y'' &= f'(t) \cos f(t), \end{aligned} \quad \text{и}$$

что дает

- $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin f(t)}{\cos f(t)} = \tan f(t);$
- $s = \int_0^t \sqrt{\cos^2 f(u) + \sin^2 f(u)} du = t;$
- $\kappa(t) = \frac{f'(t) \cos^2 f(t) + f'(t) \sin^2 f(t)}{[\cos^2 f(t) + \sin^2 f(t)]^{3/2}} = f'(t).$

Как видим, параметр t – в точности длина дуги, а кривизна в точке, соответствующей параметру t , равна $f'(t)$ или, после интегрирования,

$$f(t) = \int \kappa(t) dt = \int \kappa(u) du.$$

Поэтому мы можем заменить абстрактный параметр t длиной дуги кривой s и переписать ее в параметрическом виде следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= x(s) = \int_0^s \cos \left(\int^u \kappa(t) dt \right) du, \\ y &= y(s) = \int_0^s \sin \left(\int^u \kappa(t) dt \right) du. \end{aligned}$$

Читатель может убедиться, что эти уравнения описывают прямую линию (ось x), когда $\kappa(t) = 0$, и окружность $(x^2 + (y - 1)^2 = 1)$, когда $\kappa(t) = 1$. Следующий естественный шаг – взять $\kappa(t) = t$ или эквивалентно $\kappa(s) = s$, что приводит к кривой, кривизна которой линейно возрастает с ростом длины дуги. Простейшие параметрические уравнения этой кривой имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= x(s) = \int_0^s \cos \frac{1}{2} u^2 du, \\ y &= y(s) = \int_0^s \sin \frac{1}{2} u^2 du. \end{aligned}$$

Такая кривая должна спирально завиваться внутрь, потому что ее кривизна монотонно возрастает. В итоге мы получаем *спираль Эйлера*, показанную на рис. 1.1 и являющуюся предметом настоящей главы.

При наличии потворствующего вашим целям графопостроителя можно с удовольствием потратить кучу времени на эксперименты с другими вариантами $\kappa(t)$. Например, кривая на рис. 1.2 получена при $\kappa(t) = t^2$, а на рис. 1.3 – при $\kappa(t) \cos t - t \sin t$ (и, следовательно, $f(t) = t \cos t$).

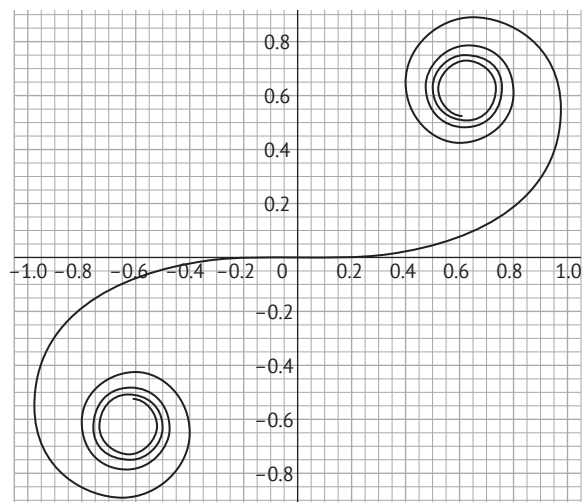


Рис. 1.1. Спираль Эйлера

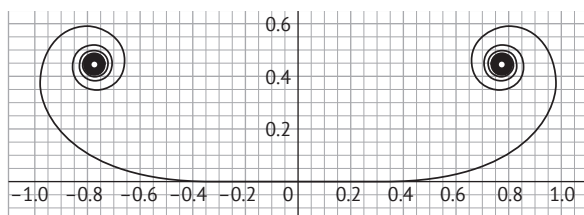


Рис. 1.2. Шезлонг

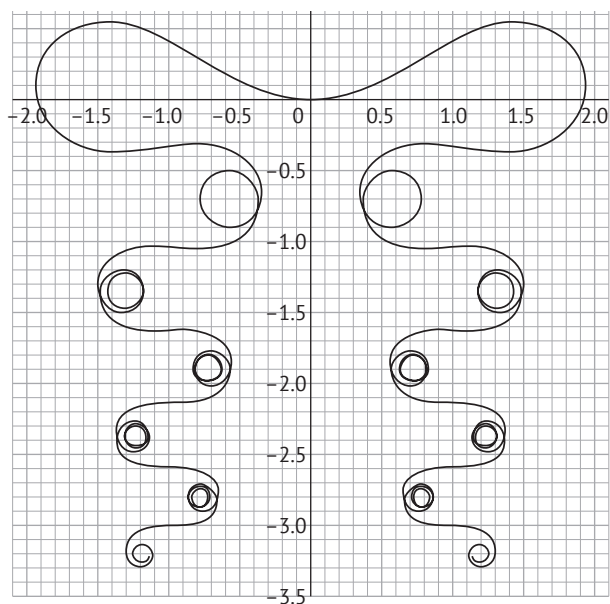


Рис. 1.3. Элегантное безумие

Таким образом, кривая, являющаяся предметом этой главы, дает пример довольно экзотической, на первый взгляд, параметризации с участием длины дуги и кривизны, но, как мы теперь видим, такое построение вовсе не выглядит странным. И даже напротив.

1.2 ... НО ПРИ ЭТОМ ЕСТЕСТВЕННАЯ

Если математическому результату присваивают название, значит считают его важным; если названию предшествует прилагательное «фундаментальный» или «основной», значит важность многократно увеличивается, так как результат занимает центральное место в отдельной теории или даже в математике в целом. Так обстоит дело с *основной теоремой о плоских кривых*, для строгой формулировки которой необходимо привлечь некоторые абстракции, но суть состоит в том, что «кривая определяется своей кривизной». То есть если задана начальная точка на плоскости и функция кривизны, то кривая определена однозначно.

Итак, предположим, что задана функция кривизны $\kappa(s)$, параметризованная длиной дуги, s . Тогда мы имеем две примитивные величины, т. е. не зависящие от таких внешних обстоятельств, как система координат или репер. Они называются *внутренними* переменными, и, помимо длины дуги, есть еще одна: *тангенциальный угол*, ψ .

Это угол, который каждая касательная к кривой составляет с некоторым фиксированным направлением. Обычно его нормируют, так что $s = 0$ при $\psi = 0$, а в качестве направления принимают положительное направление оси x . Из рис. 1.4 ясно, что $dy/dx = \operatorname{tg} \psi$. Более того, – и этот стандартный результат легко доказывается, – имеем $d\psi(s)/ds = \kappa(s)$; на самом деле это даже не *результат*, а *определение* кривизны как (нормированной) скорости вращения касательной к кривой.

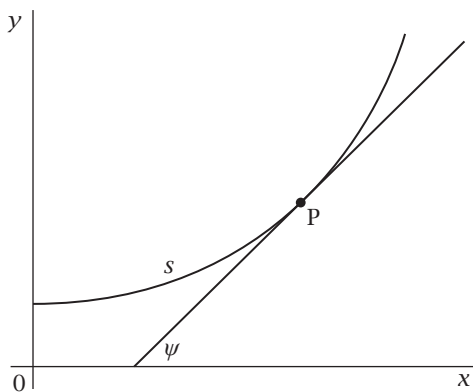


Рис. 1.4. Внутренние координаты

Далее, по определению

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = \sec \psi,$$

поэтому $dx/ds = \cos \psi$, и, так как

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru