ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие посвящено изложению раздела «Виброакустика тонкостенных конструкций» дисциплины «Современные проблемы в области прикладной механики». В пособии даются основы теории и методов анализа динамического взаимодействия с внутренней и окружающей акустической средой упругих элементов строительных и иных конструкций как единой колебательной системы. Рассматриваются закономерности формирования и передачи виброакустических воздействий элементами конструкций и обратного влияния виброзвукоизлучения на формы и частоты их колебаний. Значительное внимание уделено вопросам снижения шумности и вибраций элементов конструкций.

Изложение материала проводится на аналитически решаемых модельных задачах, для которых показано как создается математическая модель взаимодействия двух разнородных механических структур: тонкостенной конструкции и акустической среды. Для чего это нужно и где может быть применено? В курс теории оболочек и пластин, который читается для студентов механических специальностей, включаются обычно статика, динамика и устойчивость тонкостенных элементов конструкций. При этом не ставится вопрос, в какой среде происходят, например, колебания оболочки. Конечно, они могут происходить и в вакууме, и тогда известные теории адекватно отобразят поведение конструкции. Однако в массе технических приложений — вибрации топливных баков, плотин, акустических систем в радиотехнике, перекрытий, стен, окон зданий, вентиляционных систем, корпусов кораблей и подводных лодок, самолетов и дирижаблей, трубопроводов, оболочек атомных реакторов, волновых передач, даже льда в канале и во многих других случаях (мембранная технология, турбины, гироскопы на жидкостном подвесе и т.д.) — уже не обойтись без учета в той или иной степени обратного влияния среды на колебания конструкции. А влияние это может быть весьма значительным и проявляться в перестройке резонансного спектра системы, искажениях форм колебаний, дополнительном демпфировании и других эффектах. Учет такого взаимодействия со средой требует расширения рамок расчетной модели тонкостенной конструкции.

С другой стороны, вибрации машин, оборудования и корпусных элементов конструкций сопровождаются, как правило, интенсивным звукоизлучением, которое играет все более возрастающую негативную роль в современной жизни. Становятся актуальными вопросы создания акустически комфортной технической среды как одного из элементов экологического проектирования, например, в защите от транспортного шума. В немалой степени это относится к конструкциям авиастроения,

не говоря уже о гидроакустике и излучателях звука, где этот параметр имеет первостепенное значение.

Тем самым виброакустические критерии выходят в первый ряд требований при проектировании новых машин и сооружений. Следует также отметить, что специалисты по расчету звуковых полей (акустики) используют, как правило, упрощенные модели механических излучателей звука, в недостаточной степени учитывающие упругие свойства последних или (что также немаловажно) измененные обратным влиянием акустической среды свойства системы. Это может привести и приводит к большим погрешностям при расчете волновых полей.

Предметом данного курса является изучение гармонических колебаний тонкостенных упругих пластин и оболочек в контакте с идеальной акустической средой. Это могут быть бесконечная и ограниченная пластины, бесконечная и ограниченная цилиндрические оболочки, замкнутые сферические, сфероидальная оболочки и оболочки других форм. Акустическая среда (газ, жидкость) может находиться вне или внутри оболочки, быть одновременно снаружи и внутри. Оболочки могут также обладать конструктивной или физической анизотропией упругих свойств, быть неидеально упругими, иметь изолированные подкрепляющие элементы в виде колец, пластин и т.д. Разнообразным может быть и спектр динамических нагрузок, среди которых особо выделим сосредоточенные нагружения, являющиеся, с одной стороны, удобной математической идеализацией локальных воздействий, обеспечивающих отыскание фундаментальных решений и с их помощью — решений при любом распределении нагрузок. С другой стороны, сосредоточенные нагрузки реально моделируют передачу на оболочку сил и моментов от присоединяемых к ней трубопроводов и других подкрепляющих элементов с малыми участками контакта между этими элементами и оболочкой.

Таким образом, широкая сфера применения и потребность правильного решения совместных задач механики и акустики требуют изучения динамики тонкостенных элементов конструкций во взаимодействии с окружающей или внутренней акустической средой как единой колебательной системы. Данное направление подготовки магистров имеет значительный инновационный потенциал в плане создания перспективных методов и аппаратуры оперативной и производительной бесконтактной акустической диагностики сплошных и многослойных конструкций, анализа их живучести, степени старения, остаточного ресурса, создания акустически комфортной производственной и жизненной среды.

Большая часть материала, представленного в пособии, основана на оригинальных результатах, полученных автором. Исключениями являются некоторые части разделов 6 и 7, материал которых содержит известные соотношения по одно- и двухкаскадной виброизоляции, преобразованиям вибрационных и акустических волн на стандартных препятствиях.

1. ПРЕДМЕТ «ВИБРОАКУСТИКА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ». ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ И ОБЗОР МЕТОДОВ ИХ РЕШЕНИЯ

Предмет «Виброакустика тонкостенных конструкций» посвящен изучению теории и методов анализа динамического взаимодействия упругих элементов строительных и иных конструкций с акустической средой и источниками виброакустического излучения как единой колебательной системы, закономерностей формирования и передачи виброакустического поля элементами конструкций и обратного влияния виброзвукоизлучения на формы и частоты их колебаний. Значительное внимание в этом разделе дисциплины «Современные проблемы в области прикладной механики» уделено вопросам снижения шумности и вибраций элементов конструкций, возможностям идентификации дефектов по искажениям излучаемого конструкцией акустического поля.

Знание этого предмета позволяет проводить исследования в направлении создания методов и аппаратуры для оперативной и производительной бесконтактной акустической диагностики поверхностных и скрытых дефектов в сплошных и многослойных конструкциях, анализа живучести, степени старения материалов и конструкций, остаточного ресурса, создания акустически комфортной производственной и жизненной среды.

Постановка основных задач проводится в рамках модели идеальной, т.е. невязкой и потенциальной (отсутствие вихрей) акустической среды. Считается, что возмущения в такой среде передаются только посредством сжатия — расширения [5; 9; 12].

Возмущение — избыточное давление в среде — подчиняется волновому уравнению

$$\Delta \mathcal{P} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} = 0, \qquad (1.1)$$

где $\mathcal{P}$ — функция динамичного давления, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x, y, z, t)$; c – скорость звука (в металле скорость звука 5 км/с, в воде — 1,5 км/с, в воздухе — 340 м/с); Δ — оператор Лапласа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

На рис. 1.1 показан общий случай контакта тонкостенной оболочки толщиной h с акустическими средами внутри и снаружи оболочки.

В ряде литературных источников, например [5; 12], оперируют не функцией давления, а потенциалом скорости $\Phi(x, y, z, t)$. Скорость движения частиц среды V и функция давления в ней выражается через потенциал по формулам

$$V = \operatorname{grad} \Phi, \quad \mathcal{P} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad (1.2)$$

где ρ — плотность среды.

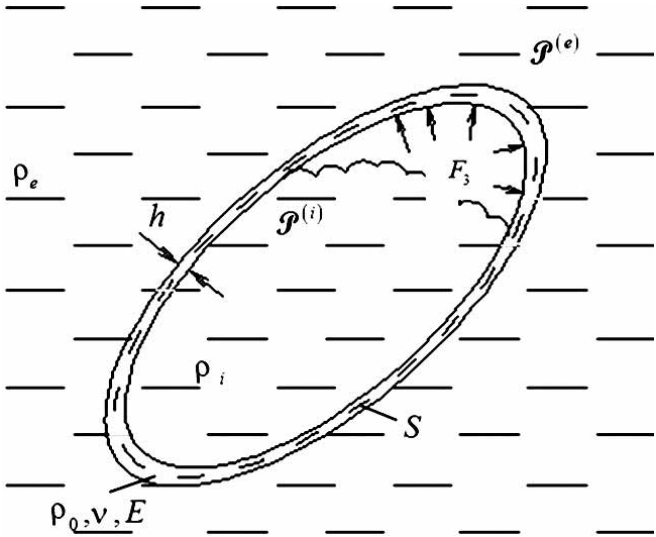

Рис. 1.1. Общий случай контакта упругой оболочки толщиной h с акустическими средами внутри (i) и снаружи (e) оболочки: ρ_0 — плотность; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; S — срединная поверхность оболочки; ρ_i, $\mathcal{P}^{(i)}$, ρ_e, $\mathcal{P}^{(e)}$ — плотности и функции динамичного давления внутри и снаружи оболочки, соответственно; $F_з$ — нормальная компонента заданной гармонической нагрузки

При условии гармоничности колебаний среды функция давления и потенциал отличаются на постоянный множитель

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{P}(x,y,z,t)\\ \Phi(x,y,z,t)\end{matrix}=\begin{Bmatrix}P(x,y,z)\\ \tilde{\Phi}(x,y,z)\end{Bmatrix}e^{i\omega t},\ i=\sqrt{-1}\ \right\}, \qquad (1.3)$$

где ω — круговая частота колебаний.

Подставляя (1.3) в (1.2), получим

$$P = i\rho\omega\tilde{\Phi}.$$

В дальнейшем будем оперировать только с функцией давления как имеющей ясный физический смысл.

На поверхности оболочки или другого упругого тела ставятся условия безотрывности колебаний (или условия непротекания)

$$\left.\frac{1}{\rho_e}\frac{\partial\mathcal{P}^{(e)}}{\partial n}\right|_S=\left.\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial\mathcal{P}^{(i)}}{\partial n}\right|_S=-\ddot{w}, \qquad (1.4)$$

где w — функция динамического прогиба оболочки; n — внешняя нормаль к ее срединной поверхности.

Уравнения колебаний оболочки также являются частью постановки задачи. Принимая, что все динамические величины, входящие в них, имеют зависимость от времени в виде множителя $e^{-i\omega t}$ и отбрасывая этот множитель, запишем эти уравнения в перемещениях с учетом давления акустической среды снаружи и изнутри оболочки:

$$\sum_{j=1}^{3} L_{ij}U_j - \lambda^2 U_i + \delta_{3i}\left[h_t^2 N_{33}U_3 + \frac{1}{Eh}\left(P^{(e)}\Big|_S - P^{(i)}\Big|_S\right)\right] = \frac{1}{Eh}F_i,\ i = 1,2,3; \quad (1.5)$$

$$\lambda = \frac{\omega}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}},\ h_*^2 = \frac{h^2}{12\left(1-\nu^2\right)}, \quad \delta_{3i} = \begin{cases} 0, & i \neq 3 \\ 1, & i = 3 \end{cases}.$$

Здесь F_i — компоненты внешней нагрузки; U_1, U_2, U_3 — компоненты вектора перемещений оболочки, $U_3 \equiv w$; L_{ij}, N_{33} — безмоментные и моментные операторы теории оболочек.

После исключения аналогичной временной компоненты волновые уравнения для функций давления в акустических средах типа (1.1) переходят в уравнения Гельмгольца:

$$\Delta P^{(e)} + k_e^2 P^{(e)} = 0,\ \Delta P^{(i)} + k_e^2 P^{(i)} = 0,\ k_e = \frac{\omega}{c_e},\ k_i = \frac{\omega}{c_i}, \quad (1.6)$$

в которых через c_i, c_e обозначены скорости звука в средах внутри и снаружи оболочки.

Преобразуются также и условия непротекания уравнения (1.4):

$$\frac{1}{\rho_e}\frac{\partial P^{(e)}}{\partial n}\bigg|_{n=0} = \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial P^{(i)}}{\partial n}\bigg|_{n=0} = \omega^2 w. \quad (1.7)$$

Кроме представленных уравнений, в случае неограниченной внешней среды ставится условие Зоммерфельда [12]:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial P^{(e)}}{\partial r} - ik_e P^{(e)}\right) = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.8)$$

Это условие выделяет волны, расходящиеся от оболочки; здесь оно записано для зависимости от времени вида $e^{-i\omega t}$.

Для внутренней среды должно выполняться условие регулярности функции давления в любой точке среды.

В общем случае точные решения задач (1.5)...(1.8) получены лишь для бесконечных пластин, бесконечной цилиндрической оболочки, замкнутой сферической оболочки и для оболочек и пластин, продолженных экранами. Однако в ряде случаев возможны упрощения общей постановки задач. Так, например, если k — мало (k — волновое число среды),

то вместо уравнения Гельмгольца можно использовать уравнение Лапласа и среду при этом считать несжимаемой.

Часто реальные условия на поверхности конструкции заменяют идеальными. Например, полагают $P\big|_S = 0$ — условие абсолютно мягкой поверхности (свободная поверхность жидкости) либо $\left.\dfrac{\partial P}{\partial n}\right|_S = 0$ — абсолютно жесткая поверхность (экран). Эти условия обладают мажорирующими свойствами к реальным граничным условиям задачи.

Упрощение на характер звукоизлучения в дальнем поле: какова бы ни была сложной излучающая поверхность, на большом удалении от нее акустическое давление может быть описано формулой

$$P^{(e)}\Big|_{r\to\infty} = A(\varphi,\theta)\frac{e^{ik_e r}}{r}. \qquad (1.9)$$

Функция $A(\varphi, \theta)$ называется диаграммой направленности излучения (φ, θ — сферические координаты).

Таким образом, излучение любой поверхности на большом расстоянии от источника любой формы подобно излучению точечного источника. Заметим, что для гармонических колебаний выражение (1.9) следует из условия излучения Зоммерфельда.

При решении сформулированных задач часто используется интеграл Кирхгофа (Гельмгольца — Гюйгенса), дающий связь между давлением в произвольной точки среды (A) и давлением и его нормальной производной на граничной поверхности:

$$\int_S \left[P(B)\frac{\partial G(A,B)}{\partial n_{\text{В}}} - \frac{\partial P(B)}{\partial n_{\text{В}}} G(A,B) \right] dS = \begin{cases} P(A), A \in V \\ \dfrac{1}{2} P(A), A \in S \\ 0, A \in V. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Здесь $n_{\text{В}}$ — нормаль, внешняя по отношению к среде; $G(A,B)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца;

$$\left(\Delta + k^2\right) G = \delta(A),$$

где $\delta(A)$ — дельта-функция.

Для трехмерного пространства

$$G = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \quad R = |AB|.$$

Для двумерного пространства

$$G = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR),$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

В одномерном случае

$$G = \frac{e^{ikR}}{2ik}, \quad R = \left| x_A - x_B \right|.$$

С помощью интеграла Кирхгофа исходная задача в случае идеализированных граничных условий сводится к граничному интегральному уравнению, а для условия с упругой поверхностью — к интегро-дифференциальному уравнению.

Для решения исходной задачи часто применяют численные методы — метод конечных элементов, метод сеток и метод прогонки. Ограничения, связанные с использованием этих методов, состоят в том, что плохо отображаются сосредоточенные нагрузки, бесконечные области.

Для замкнутой сферической оболочки и пластины конечных размеров применяются методы разложения по собственным формам колебаний этих объектов в вакууме. Здесь также имеются ограничения: на низких частотах метод собственных форм дает хорошие результаты, а на высоких частотах и при значительной изменяемости решения для обеспечения сходимости требуется учитывать большое число членов рядов, которые становятся плохо сходящимися.

Методы, основанные на интеграле Кирхгофа, объединены под общим названием метода граничных интегральных уравнений (ГИУ). Их тоже можно отнести к точным. К точным методам относятся также применения интегральных преобразований Фурье, Ханкеля и других в зависимости от типа нагружения и формы объекта.

При использовании приближенных методов делается допущение о характере взаимодействия оболочки со средой, например о замене среды некоторой присоединенной массой, при использовании асимптотических — задается или отыскивается малый или большой параметр; уравнения раскладываются по нему и далее решается рекуррентная система более простых уравнений.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ

1.1. Как будет выглядеть условие излучения звука для зависимости от времени с положительным знаком в показателе экспоненты?

1.2. Изобразить диаграмму направленности излучения при $A = \cos 4\theta$.

1.3. Поставить краевую задачу для стоящего на жестком основании и наполненного идеальной жидкостью открытого сверху прямоугольного сосуда с упругими стенками.

2. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ АКУСТОУПРУГОСТИ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

К числу простейших задач динамики тонкостенных конструкций, взаимодействующих с акустической средой, относят задачи, связанные с колебаниями бесконечной упругой пластины постоянной толщины на акустическом полупространстве.

Рассмотрим находящуюся в одностороннем контакте с акустической средой бесконечную пластину с постоянной толщиной h (рис. 2.1).

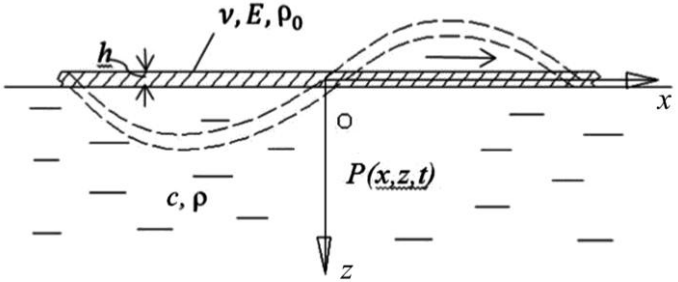

Рис. 2.1. Плоская изгибная волна, бегущая по пластине на акустическом полупространстве

Зададим декартовую систему координат так, чтобы оси x, y лежали в срединной плоскости пластины, а ось z была направлена вглубь среды.

Допустим, что по пластине в положительном направлении оси x распространяется плоская изгибная волна, фронт которой параллелен оси y. В такой постановке задача двумерная; решение ее зависит только от x и z.

Постановка задачи для волнового уравнения в двумерном случае имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2}=0;\\
&\mathrm{D}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\rho_0 h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\mathcal{P}(x,0,t)=0 \text{ — уравнение колебаний пластины}\\
&\qquad\qquad \text{с учетом давления среды на ее поверхности,}\\
&D=E\frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \text{ — цилиндрическая жесткость пластины,}\\
&\left.\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z}\right|_{z=0}=-\rho\ddot{W} \text{ — условие непротекания.}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Ввиду того, что среда по z неограничена, кроме записанных уравнений должно выполняться условие ограниченности $\mathcal{P}$ при $z \to \infty$.

Будем искать решение системы (2.1) в виде бегущих волн:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{P}(x,z,t) \\ W(x,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(z) \\ W_0 \end{Bmatrix} \exp\left[i\left(\frac{\pi x}{L} - \omega t \right) \right], \quad i = \sqrt{-1}, \tag{2.2}$$

где ω — круговая частота (несущая частота); L — длина волны.

Считаем, что ω известна, а $P(z)$, W_0 и L — величины, подлежащие определению.

Подставим выражение (2.2) в систему (2.1). Отделяя экспоненциальные множители, приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2P}{dz^2} + \left(k^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) P(z) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}; \\ &\left[D\left(\frac{\pi}{L} \right)^4 - \Omega^4 \right] W_0 + P(0) = 0, \quad \Omega^4 = \omega^2 \rho_0 h; \\ &\left. \frac{dP}{dz} \right|_{z=0} = \omega^2 \rho W_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Получилась система, представляющая собой краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) относительно $P(z)$ со смешанными граничными условиями.

Характер решения первого уравнения (2.3) зависит от знака коэффициента при недифференциальном члене, который определяется соотношениями между длинами упругой $2L$ и акустической $2L_{\text{а}} = \dfrac{2\pi}{k}$ волн. Предположим, что $L_{\text{а}} > L$, а затем проверим, при каких параметрах среды и диапазонах частот выполняется данное предположение. В этом случае решение уравнения (2.3) имеет экспоненциальный характер. С учетом требований ограниченности решения при $z \to \infty$ можно принять

$$P(z) = P(0)e^{-az}, \qquad a = \sqrt{\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - k^2}. \tag{2.4}$$

Подстановка (2.4) в условие непротекания (2.3) приводит к соотношению между давлением среды на поверхности пластины и амплитудой прогиба пластины

$$P(0) = -\frac{\omega^2 \rho}{a} W_0 \cdot$$

С учетом этого соотношения второе уравнение системы (2.3) будет выполнено, если показатель экспоненты a удовлетворяет алгебраическому уравнению пятой степени:

$$D(a^2+k^2)^2-\Omega^4-\omega^2\rho/a=0,$$

или

$$a^5+2k^2a^3+\left(k^4-\Omega^4/D\right)a-\omega^2\rho/D=0. \qquad (2.5)$$

Здесь учтено также равенство $\pi^2/L^2=a^2+k^2$, вытекающее из (2.4).

Так как показатель a, а через него и длина волны зависят от частоты, то уравнение (2.5) называют дисперсионным. Это уравнение нечетной степени; в нем знаки коэффициента при неизвестном с показателем высшей степени и свободного члена — противоположны, следовательно, это уравнение имеет хотя бы один положительный корень $a=a_1>0$, удовлетворяющий условию задачи.

Используя правило Декарта о числе перемен знака в коэффициентах уравнения (2.5) [7], устанавливаем, что этот корень — единственный положительный корень данного уравнения (число положительных корней алгебраического уравнения не превышает числа перемен знака в коэффициентах данного уравнения при их последовательном сравнении от старшего к младшему без учета нулевых коэффициентов). Таким образом, установлено, что по бесконечной пластине, контактирующей с акустическим полупространством, могут распространяться только изгибные волны, сопровождающиеся неоднородными поверхностными волнами в среде. Это справедливо для любых соотношений между параметрами среды, пластины и частоты в пределах применимости исходной системы уравнений.

Тем самым, получено точное соотношение между характером изменения давления в среде и колебательного процесса в пластине, позволяющее сводить решение общей трехмерной задачи к решению на поверхности контакта.

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ

Выписанное в разделе 2 дисперсионное уравнение (2.5) показывает в неявном виде связь между длинами изгибных волн, бегущих по пластине, контактирующей с акустической средой, и показателем затухания образующихся при этом поверхностных волн в среде. Ввиду того, что это уравнение 5-й степени, его корни в общем случае не имеют аналитического выражения. В то же время, если бы было установлено, что коэффициенты этого уравнения имеют разный асимптотический поря-

док, то появилась бы возможность построения асимптотической процедуры его решения и получения уточняемых приближенных выражений его корней.

Для выявления большого параметра в коэффициентах уравнения (2.5) рассмотрим две вспомогательные задачи:

Задача 2.1. *Сопоставить дисперсионные уравнения в случаях изгибных волн, бегущих по пластине в контакте и без контакта с акустической средой.*

Р е ш е н и е. При отсутствии среды дифференциальное уравнение, описывающее динамический прогиб пластины, имеет вид

$$D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\rho_0 h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0\cdot$$

Подставляя в него выражение для изгибных волн вида (2.2), приходим к дисперсионному уравнению

$$D\left(\pi/L\right)^4-\Omega^4=0. \qquad (2.6)$$

Сравнивая его с (2.5), видим, что при учете жидкости левая часть равенства (2.6) положительна, т.е. на одной и той же несущей частоте длина акустоупругой волны в пластине меньше, чем длина изгибной волны в пластине, не соприкасающейся с жидкостью. С повышением частоты эта разница уменьшается. Данный вывод объясняет снижение резонансных частот пластин (да и оболочек!) ограниченных размеров, так как одна и та же длина волны резонансных колебаний для пластины, контактирующей с жидкостью, образуется на меньшей частоте, чем для «сухой» пластины. Таким образом, общим правилом является снижение резонансных частот упругой системы при погружении ее в жидкость. Акустическая среда оказывает (в главном) воздействие на пластину наподобие присоединенной массы, значение которой зависит от частоты колебаний; с ростом частоты влияние ее уменьшается, но полностью не исчезает ни при каких частотах.

Задача 2.2. *Выполнить оценку предела применимости динамических уравнений классической теории пластин по изменяемости решений и частотному параметру.*

Р е ш е н и е. В предшествующем теоретическом разделе говорилось, что сделанный вывод об образовании неизлучающей поверхностной волны в акустической среде при распространении плоской изгибной волны по контактирующей с ней пластине справедлив для любых соотношений между параметрами среды, пластины и частоты в преде-

лах применимости исходной системы уравнений. В качестве таких пределов могут быть использованы ограничения по применимости исходных гипотез Кирхгофа — Лява, лежащих в основе вывода уравнений колебаний пластин из уравнений теории упругости [3]. Главное ограничение здесь накладывается на изменяемость напряженно-деформированного состояния (НДС) пластины, которая при изгибе определяется отношением толщины пластины h к длине полуволны упругой деформации L: $h / L << 1$.

Примем для определенности $\max \frac{h}{L} = \frac{1}{10}$ и перепишем уравнение (2.6) в виде

$$D\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 = \Omega^4 \cdot$$

Учитывая, что $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, а $\Omega^4 = \omega^2 \rho_0 h$, приходим к равенству

$$\max kh = \frac{1}{\beta_0} \max(\frac{\pi h}{L})^2, \quad \beta_0 = \sqrt{12(1-\nu^2)}\,\frac{c}{c_0}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \ .$$

При соотношении материалов пластины и среды типа металл —вода, которое введено для обезразмеривания коэффициентов, параметр β_0 мало отличается от единицы. Вследствие этого даже при максимальной частоте колебаний на границе применимости уравнений классической теории пластин значение параметра kh остается малым: $\max kh \approx 1/10$. Отсюда следует, что в коэффициентах дисперсионного уравнения (2.5) можно использовать в качестве большого параметра величину $p = 1/kh$.

Задача 2.3. *Выделить большой параметр в коэффициентах дисперсионного уравнения (2.5).*

Р е ш е н и е. Производя в уравнении (2.5) замену $a = k\alpha$, путем тождественных преобразований приводим его к виду, содержащему большой параметр p при первой и нулевой степенях неизвестного α:

$$\alpha^5 + 2\alpha^3 + (1-\beta_0^2 p^2)\alpha - \beta_1 p^3 = 0, \quad \beta_1 = \beta_0^2 \frac{\rho}{\rho_0}. \qquad (2.7)$$

Коэффициент β_1, входящий в уравнение (2.7) и независящий от частоты колебаний, можно, также как и β_0, считать неасимптотической ве-

личиной в сравнении с большим параметром p (это, очевидно, выполняется для таких соотношений параметров пластины и среды, как, например, алюминий — вода). При больших отличиях в параметрах плотности пластины и среды коэффициенты β_0 и β_1 должны вводиться с определенными степенями параметра p, что несколько усложняет асимптотический анализ уравнения (2.7), разбивая его, в зависимости от материалов пластины и среды, на несколько частотных диапазонов. Ниже, для демонстрации процедуры асимптотического решения уравнения (2.7) будет рассмотрен простейший вариант с неасимптотическими величинами коэффициентов β_0 и β_1.

Задача 2.4. *Построить главное и второе асимптотические приближения для положительного корня дисперсионного уравнения (2.7).*

Р е ш е н и е. Так как уравнение (2.7) содержит слагаемые с асимптотически большими коэффициентами, то приближенное определение его единственного положительного корня может быть выполнено в форме асимптотической процедуры метода Ньютона —Пьюизе — Лагранжа [8]. В соответствие с этим методом решение уравнения (2.7) в главном приближении отыскивается в виде

$$\alpha = A_0 p^{\mu}, \tag{2.8}$$

где A_0 и μ — неасимптотические постоянные, подлежащие определению.

Подставим выражение (2.8) в уравнение (2.7). Получим уравнение относительно искомых постоянных:

$$A_0^5 p^{5\mu} + 2A_0^3 p^{3\mu} + (1-\beta_0^2 p^2) A_0 p^{\mu} - \beta_1 p^3 = 0. \tag{2.9}$$

Параметр μ в главном приближении должен принимать наибольшее значение. Исходя из этого, претендовать на наиболее асимптотически значимые пары, наряду с первым слагаемым в левой части (2.9), могут предпоследнее и последнее слагаемые. Следовательно, для выбора наибольшего значения μ могут быть записаны два уравнения: $5\mu = 2+\mu$ и $5\mu = 3$. Отсюда видно, что значение $\mu = 3/5$, получаемое из второго уравнения, является наибольшим. Поэтому асимптотически главными слагаемыми в уравнении (2.9) являются первое и последнее. Приравнивая коэффициенты в этих слагаемых, находим $A_0 = \beta_1^{1/5}$. Таким образом, положительный корень уравнения (2.7) определяется в главном приближении по формуле

$$\alpha = \alpha_1 = \beta_1^{1/5} p^{3/5}.$$

Второе приближение для положительного корня отыскивается в виде

$$\alpha = \alpha_1(1 + A_1 p^{-\mu_1}), \quad \mu_1 > 0. \qquad (2.10)$$

Подстановка выражения (2.10) в уравнение (2.7) приводит к уравнению относительно искомых постоянных A_1, μ_1:

$$\alpha_1^5(1 + 5A_1 p^{-\mu_1} + ...) + 2\alpha_1^3(1 + 3A_1 p^{-\mu_1} + ...) + (1 - \beta_0^2 p^2)\alpha_1(1 + A_1 p^{-\mu_1}) - \beta_1 p^3 = 0$$

(многоточиями в этом уравнении отмечены невыписанные слагаемые с заведомо асимптотически более низкими порядками, чем у выписанных).

Выбор показателя μ_1 во втором приближении производится исходя из критерия его минимальности. Перебирая варианты аналогично предыдущему, находим для μ_1 наименьшее положительное значение — $\mu_1 = 2/5$, а для весового слагаемого — $A_1 = \frac{1}{5}\beta_0^2\ \beta_1^{-4/5}$. Таким образом, положительный корень уравнения (2.7) определяется в двух приближениях по формуле

$$\alpha = \beta_1^{1/5} p^{3/5} + \frac{1}{5}\beta_0^2\ \beta_1^{-3/5} p^{1/5}.$$

Построение последующих приближений при больших p практически не изменит найденное значение корня.

Отметим, что асимптотическое решение дисперсионного уравнения для изгибных волн, бегущих по пластине, контактирующей с акустическим полупространством, позволяет выявить наиболее существенные физические факторы математической модели. Так, при контакте пластины из легкого металла с тяжелой жидкостью главным фактором является присоединенная масса жидкости, выраженная последним слагаемым левой части уравнения (2.5), за ней идет инерция пластины; сжимаемость среды, пропорциональная параметру k в уравнении (2.5), играет второстепенную роль.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ

2.1. Зависит ли длина волны от частоты в случае изгибных волн, бегущих по пластине без контакта с акустической средой?

2.2. Вывести дисперсионное уравнение для изгибных волн, бегущих по пластине, при двустороннем контакте пластины с акустической средой.

3. КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ, ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Рассмотрим возбуждаемые линейно-сосредоточенной нагрузкой $q\delta(x)\exp(-i\omega t)$ вынужденные колебания бесконечной пластины на акустическом полупространстве (рис. 3.1).

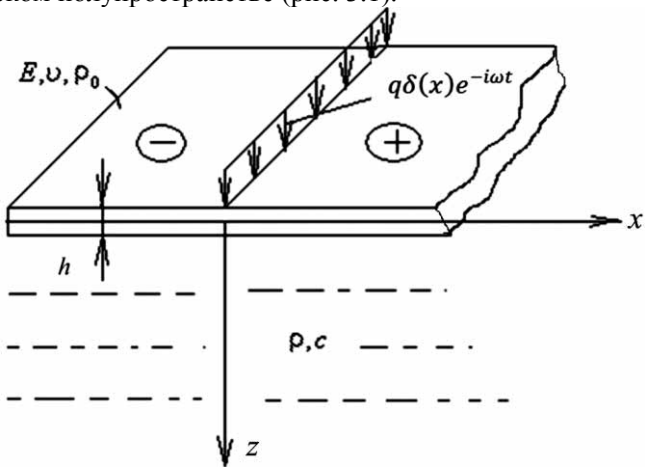

Рис. 3.1. Бесконечная пластина на акустическом полупространстве под линейно-сосредоточенной нагрузкой

В такой постановке задача сохраняет плоский характер и ее решение будет зависеть только от координат x и z.

Нагрузки такого типа, как показано на рис. 3.1, с одной стороны, обеспечивают фундаментальное решение, с помощью которого решение для любой нагрузки, зависящей только от x, находится прямым интегрированием; с другой стороны, такие нагрузки моделируют реальные взаимодействия между пластиной и линейными подкрепляющими элементами.

Запишем исходную систему уравнений, отделив в ней временную компоненту:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta P + k^2 P = 0; \\ &Dw^{\mathrm{IV}}(x) - \Omega^4 w(x) + P(x,0) = q\delta(x); \\ &\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=0} = \omega^2 \rho w(x). \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Опираясь на решение для свободных волн, будем искать частное решение уравнения Гельмгольца в виде

$$P(x,z) = P(x,0)e^{-az}, \qquad \operatorname{Re} a > 0. \tag{3.2}$$

Подставляя выражение (3.2) в условие протекания, получим связь между интегралами функций давления и прогиба пластины:

$$P(x,0) = -\frac{\omega^2 \rho}{a} w(x).$$

Учитывая эту связь в первом и во втором уравнениях системы (3.1), приходим к системе двух уравнений относительно функции прогиба пластины:

$$\left.\begin{aligned} & w^{\text{II}}(x) + (a^2 + k^2) w(x) = 0\ ; \\ & Dw^{\text{IV}}(x) - \Omega^4 (1 + \frac{g}{a}) w(x) = 0, \quad g = \frac{1}{h} \cdot \frac{\rho}{\rho_0}. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Эта система уравнений — для частных решений. Нагрузка будет учитываться далее в условиях стыка решений слева и справа от линии ее приложения (см. рис. 3.1).

Для совместности уравнений (3.3) необходимо, чтобы после двойного дифференцирования первого из них оказались равными коэффициенты при недифференциальных членах; в данном случае этим условием является дисперсионное уравнение пятой степени относительно параметра затухания давления *a*, т.е.

$$D(a^2 + k^2)^2 - \Omega^4 (1 + \frac{g}{a}) = 0, \tag{3.4}$$

совпадающее с формулой (2.5).

Определив из дисперсионного уравнения (3.4) корни *a* и подставив их в систему уравнений (3.3), получим систему с известными коэффициентами.

Заметим, что при найденных из уравнения (3.4) значениях *a* совместность системы (3.3) понимается в том смысле, что все интегралы первого уравнения (3.3) будут и интегралами второго уравнения; обратное справедливо не для всех интегралов второго уравнения (3.3). Вследствие этого первое уравнение системы (3.3) является *определяющим*.

Из сказанного выше известно, что дисперсионное уравнение (3.3) имеет один положительный корень $a_1 > 0$, с помощью которого могут быть описаны осциллирующие решения системы (3.3). Однако это еще не все решения, необходимые для выполнения условий на линии приложения нагрузки. Решение аналогичной задачи о колебаниях пластины в вакууме содержит, кроме осциллирующих интегралов, также и быст-

розатухающие в окрестности линии приложения нагрузки решения типа краевого эффекта. Для нахождения таких решений системы (3.3) используем другие интегралы и корни уравнения (3.4).

Анализ коэффициентов уравнения (3.4) по критерию Рауса — Гурвица [7] показывает, что наряду с положительным корнем уравнение (3.4) должно иметь две пары комплексно-сопряженных корней, одна из которых ($a_{2,3}$) имеет положительную действительную часть ($\mathrm{Re}\, a_{2,3} > 0$), а другая — отрицательную. Условиям невозрастания решения (3.2) на бесконечности удовлетворяют корни $a_{2,3}$, которые используем для построения затухающих в окрестности линия действия нагрузки решений системы (3.3). Таким образом, подставляя корни $a_{1,2,3}$ в систему (3.3), приходим к уравнениям

$$w_j^{\mathrm{II}}(x) + (a_j^2 + k^2) w(x) = 0, \quad j = 1,2,3,$$

решения которых можно представить в единообразном виде

$$w_j^{\pm}(x) = e^{\pm i s_j x}, \; s_j^2 = a_j^2 + k^2 .$$

Как видим, здесь имеются отличия от случая колебаний пластины в вакууме, так как корням $a_{2,3}$ соответствуют интегралы типа краевого эффекта, не просто затухающие, а затухающие с осцилляцией.

Общее решение для функций прогиба пластины и пристеночного давления в акустической среде для участков слева ($x < 0$) и справа ($x > 0$) от линии приложения нагрузки может быть представлено в виде

$$\left.\begin{aligned} w_{\pm}(x) &= \sum_{j=1}^{3} c_j^{\pm} e^{\pm i s_j x}; \\ P_{\pm}(x,z) &= -\omega^2 \rho \sum_{j=1}^{3} \frac{c_j^{\pm}}{a_j} e^{\pm i s_j x - a_j z}, \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

где $c_j^{\pm}$, j — произвольные постоянные; j = 1,2,3.

Тем самым решение для прогиба пластины увязывается с поведением акустического давления по всем компонентам.

Для определения шести постоянных $c_j^{\pm}$, $j = 1,2,3$ используем условия непрерывности функции прогиба и двух ее производных при переходе через линию x = 0: