Содержание

От издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте www.dmkpress.com, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу http://dmkpress.com/authors/publish_book/ или напишите в издательство по адресу dmkpress@gmail.com.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты dmkpress@gmail.com.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

Говорят, что во многих странах, особенно в Соединенных Штатах, дети боятся математики и считают ее «непопулярным предметом». Но в Китае ситуация совсем иная. Многие дети любят математику, и их оценки по математике весьма высоки. Действительно, математика – это предмет, в котором китайцы часто преуспевают. Если вы увидите нескольких китайских учеников в начальной и средней школе в Соединенных Штатах, то это, вероятно, будут несколько лучших учеников в классе математики.

Китайские дети уже на раннем этапе обучения счету демонстрируют свои достижения. Они могут складывать целые числа от 1 до 10, используя пальцы одной руки, а не двух рук, как жители других стран. У китайцев давно есть представление о цифрах, и они используют наиболее удобную десятичную систему счисления (во многих странах до сих пор сохранились остатки двенадцатеричной системы счисления или системы счисления на основе 60). Все китайские иероглифы состоят из отдельных слогов, которые легко произносить. Это помогает учащимся быстро освоить таблицу умножения и легко запомнить правило «трижды семь равно двадцати одному». Запомнить таблицу умножения на английском языке, а затем продекламировать ее гораздо сложнее, чем на китайском.

Китайцам требуется одна-две минуты, чтобы запомнить $\pi = 3{,}14159...$ до пятого знака после запятой. Однако чтобы запомнить и воспроизвести эти цифры, в России написали целое стихотворение. Такой способ помогает произнести число π, прочитав стихи. На наш взгляд, это слишком сложный метод.

Прикладные задачи для четырех арифметических операций и их арифметические решения также являются важной особенностью китайской математики. С древних времен китайцы составляли множество прикладных задач, которые имели непосредственное отношение к реальности и повседневной жизни. Их решения просты и элегантны, а также остроумны и разнообразны, что помогает повысить интерес учащихся к учебе и просветить их. Например, такая задача: есть сто монахов и сто булочек. Один большой монах съедает три булочки, а три маленьких монаха съедают одну булочку. Сколько больших монахов, а сколько маленьких монахов?

Большинство иностранцев умеют решать только уравнения, но у китайцев есть множество арифметических решений. Например, можно превратить каждого большого монаха в 9 маленьких монахов, а 100 булочек означают, что есть 300 маленьких монахов, к которым добавлено 200 маленьких монахов. По мере того как каждый большой монах становится маленьким, создается еще 8 маленьких монахов, так что 200/8 = 25 – это число больших монахов, и, естественно, получается 75 маленьких монахов. Другой способ решить проблему – собрать вместе большого монаха и трех маленьких монахов, и таким образом каждый человек съедает в среднем по булочке, что в точности соответствует общему среднему показателю. Таким образом, большие монахи и маленькие монахи не становятся больше и меньше после такой организации, то есть количество больших монахов равно $100/(3 + 1) = 25$. Китайцы хороши в подсчетах, особенно в устной арифметике. В древние времена некоторые люди использовали пальцы для подсчета (так называемый «счет с помощью пальцев»). В то же время в Китае уже давно существуют вычислительные устройства, такие как счетные фишки или доски (абаки). Последние, можно сказать, являются прототипом компьютеров. На вводном этапе изучения математики – изучении арифметики – Китай имеет очевидные преимущества, поэтому математика часто является предметом, который любят китайские дети.

Геометрическое мышление в Древнем Китае было развито слабо (но было много книг по вычислению геометрических фигур), и оно немного уступало грекам. Однако китайцы умеют учиться у других. В настоящее время геометрический уровень учащихся средних школ в Китае значительно вырос. Однажды иностранная делегация из сферы образования посетила класс младших классов средней школы. Они считали, что преподаваемое геометрическое содержание было слишком сложным для понимания студентов, но, посетив урок, они были вынуждены признать, что содержание было не только понято китайскими студентами, но и хорошо усвоено.

Достижения математического образования в Китае достойны восхищения. На международных математических олимпиадах китайские конкурсанты завоевали множество медалей, что является самым убедительным доказательством. С тех пор как страна официально направила свою команду для участия в Международной математической олимпиаде в 1986 году, сборная Китая выиграла 14 командных чемпионатов, что можно назвать очень впечатляющим достижением. Профессор Шиинг-Шен Черн, известный современный математик, когда-то особенно восхищался этим. Он сказал: «В этом году стоит отметить, что Китай занял первое место на международном математическом конкурсе ..., в прошлом году он также занял первое место». (Выступление Шиинг-Шена Черна «Как превратить Китай в математически магическую державу» в университете Ченг Кунг на Тайване в октябре 1990 года.) Профессор Черн также предсказал: «Китай станет математической державой в XXI веке».

Безусловно, стать выдающимся математиком – задача не из легких. Этого нельзя достичь за одну ночь. Это требует неустанных усилий. Целью этой серии книг является: (1) дальнейшая популяризация знаний по математике, чтобы как можно больше молодых людей полюбили математику и смогли достичь хороших результатов; (2) чтобы учащиеся, которые любят математику, могли развиваться дальше и усваивать больше знаний и методов с помощью серии книг. «Все важные вещи в мире должны быть продуманы до мелочей». Мы надеемся и верим, что публикация этой серии книг сыграет свою роль в превращении Китая в математическую державу. Эта серия была впервые опубликована в 2000 году. В соответствии с требованиями реформы учебной программы каждый том пересматривается в разной степени.

Известный математик, академик Китайской академии наук и бывший председатель Китайской математической олимпиады профессор Юань Ван выступил консультантом этой серии книг и написал надписи для юных любителей математики. Мы выражаем нашу искреннюю благодарность. Мы также хотели бы поблагодарить издательство Восточно-Китайского педагогического университета и, в частности, г-на Мин Ни и г-на Линчжи Конга. Без них эта серия книг была бы невозможна.

Шэнь Цзун и Сюн Бинь, май 2018 г.

Глава 1

Понятия множеств и операции с ними

1.1. Основные положения и базовые методы

Множество – одно из важнейших понятий в математике, а теория множеств является основой современной математики. Множество – это базовое понятие, которое не имеет определения. Как правило, некоторые объекты объединяются в набор, называемый множеством, и каждый объект в наборе называется элементом набора. Для данного набора его элементы являются определенными, отличными друг от друга, и порядок их следования не имеет значения. Правильное представление такого набора объектов является основой для изучения математики. Описание – важный метод представления множества. Оно основано на следующем принципе обобщения. Принцип обобщения: при любом свойстве p существует уникальное множество, состоящее из всех объектов, удовлетворяющих этому свойству. Другими словами,

$$S = \{x|p(x)\},$$

где $p(x)$ – это сокращение от определения «свойства p, которому удовлетворяет объект x». Отношения между двумя множествами могут быть отражены с помощью подмножеств, пересечений и объединений. При решении проблем обычно начинают обсуждение с точки зрения элементов. В данном случае это отражает математическую идею «от части к целому». Помимо пересечений и объединений, операции с множествами также включают дополнения и различия. Множество, состоящее из всех элементов A, которых нет в B, называется разностью A и B, обозначаемой $A \backslash B$ (или иногда обозначаемой $A - B$), а именно $A \backslash B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Операции с множествами удовлетворяют следующим правилам:

Законы распределения:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Законы Моргана:

$$\complement_U(\bar{A} \cup B) = (\complement_U \bar{A}) \cap (\complement_U \mathrm{B}),$$

$$\complement_U(\bar{A} \cap \mathrm{B}) = (\complement_U \bar{A}) \cup (\complement_U \mathrm{B}).$$

1.2. Наглядные примеры

Пример 1. Пусть заданы $A = \{2, 0, 1, 3\}$ и $B = \{x | -x \in A, 2 - x^2 \notin A\}$. Вычислите сумму всех элементов в B.

Решение. Согласно предположению, $B \subseteq \{2, 0, 1, 3\}$ ($\subseteq$ означает «каждый элемент B также является элементом из $\{2, 0, 1, 3\}$)». Если $x = -2$ или -3, то $2 - x^2 = -2$ или -7, следовательно, $2 - x^2 \notin A$. Если $x = 0$ или -1, то $2 - x^2 = 2$ или 1, следовательно, $2 - x^2 \in A$. Следовательно, из определения множества B мы знаем, что $B = \{-2, -3\}$, а сумма всех элементов в B равна -5.

Пример 2. Собственное подмножество S из $\mathbf{R}$ (множество всех действительных чисел) называется замкнутым при сложении и вычитании, если для любых $x, y \in S$ мы имеем $x + y \in S$ и $x - y \in S$.

(1) Найдите пример помножества S, замкнутого при сложении и вычитании.

(2) Покажите, что если S_1 и S_2 – два собственных подмножества $\mathbf{R}$, замкнутых при сложении и вычитании, то существует $c \in \mathbf{R}$ такое, что $c \notin S_1 \cup S_2$.

Решение. (1) Примеры включают $S = \{2k | k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) Так как S_1 – это собственное подмножество $\mathbf{R}$, существует $a \in \mathbf{R}$ такое, что $a \notin S_1$. Если $a \notin S_2$, то утверждение верно; в обратном случае $a \in S_2$. Аналогичным образом если существует и $b \in \mathbf{R}$ такое, что $b \notin S_2$, а утверждение справедливо, если $b \in S_1$. Пусть $c = a + b$, и мы покажем, что $c \notin (S_1 \cup S_2)$. Предположим, что верно обратное, и $c \in (S_1 \cup S_2)$. Тогда, не теряя общности, мы можем предположить, что $c \in S_1$, то есть $a + b \in S_1$. Поскольку $b \in S_1$, мы также имеем $a + b - b = a \in S_1$, что приводит к противоречию.

Замечание. Выбор c не уникален. Также подходит выбор комбинации $c = a - b$ или $c = b - a$.

Пример 3 (China West Mathematical Invitational, 2011). Пусть $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 2011\}$ таково, что для любых трех элементов M мы можем найти два из них a и b таких, что $a|b$ *или* $b|a$. Найдите максимальное значение $|M|$ (здесь $|M|$ обозначает количество элементов в наборе M).

Решение. Пусть $M = \{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{10}, 3, 3\times 2, 3\times 2^2, \ldots, 3\times 2^9\}$ удовлетворяет требованиям и $|M| = 21$. Для любого M, удовлетворяющего требованиям задачи, если $|M| \geq 22$, то можно предположить, что элементы M равны $a_1 < a_2 \ldots < a_k$ $(k \geq 22)$. Сначала мы заметим, что $a_{n+2} \geq 2a_n$ для каждого n, потому что в противном случае $a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < 2a_n$, и триплет (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) противоречит правилу. С полученным свойством мы имеем выражения:

$$a_4 \geq 2\ a_2 \geq 4,$$

$$a_6 \geq 2\ a_4 \geq 8,$$

$$\ldots$$

$$a_{22} \geq 2a_{20} \geq 2^{11} > 20^{11},$$

что приводит к противоречию. Следовательно, максимальное значение $|M|$ равно 21.

Пример 4. Пусть задана функция $f(x) = x^2 + ax + b$ для $(a, b \in \mathbf{R})$ и множество

$$A = \{x|x = f(x), x \in \mathbf{R}\}, B = \{x|x = f(f(x)), x \in \mathbf{R}\}.$$

(1) Покажите, что $A \subseteq B$. ($\subseteq$ означает «каждый элемент BA из также является элементом из B.)
(2) Если $a = \{-1, 3\}$, найдите B.

Решение. (1) Для любых $x_0 \in A$ мы получаем $x_0 = f(x_0)$, так что

$$x_0 = f(x_0) = f(f(x_0)),$$

поэтому $x_0 \in B$. Следовательно, $A \subseteq B$.

(2) Если $A = \{-1, 3\}$, то $-1 = f(-1)$ и $3 = f(3)$, и можно записать, что

$$\begin{cases}(-1)^2 + a(-1) + b = -1,\\ 3^2 + a\cdot 3 + b = 3.\end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем, что $a = -1$ и $b = -3$. Поэтому $f(x) = x^2 - x - 3$.

Если $f(x) = f(f(x))$, тогда

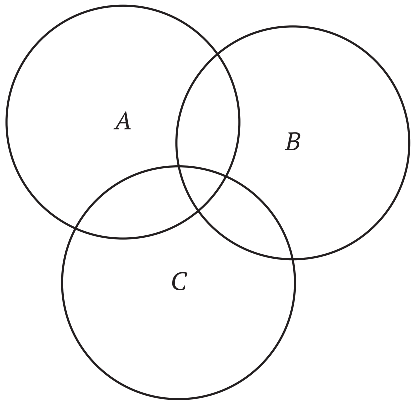
$$(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - x - 3 = 0.$$

Из решения пункта (1) мы знаем, что -1 и 3 принадлежат B, поэтому они являются корнями приведенного выше уравнения. Это позволяет нам разложить на множители левую часть уравнения, в результате чего получим

$$(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 3) = 0,$$

поэтому его корни равны $x = -1$, 3 и $\pm\sqrt{3}$. Следовательно, $B = \{-1, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Пример 5. Множества A, B и C (не обязательно различные) объединяются в $A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Найдите количество упорядоченных триплетов (A, B, C), обладающих таким свойством.



Решение. На диаграмме Венна, показанной на вышеприведенном рисунке, множества A, B и C образуют семь непересекающихся областей, объединением которых является $A \cup B \cup C$. Каждый элемент в $\{1, 2, \ldots, 10\}$ принадлежит одной из семи областей, а множества A, B и C определены однозначно по расположению этих элементов. По принципу умножения таких троек насчитывается 7^{10}.

Замечание. При определении количества триплетов мы исходили из предположения, что A, B и C не обязательно различны и являются упорядоченными триплетами. Это интересное применение диаграмм Венна.

Пример 6. Пусть $n \in \mathbf{N}^*$ (множество всех натуральных чисел), $n \geq 15$, а A и B – собственные подмножества множества $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, где $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = I$. Покажите, что либо A, либо B содержит два различных числа, сумма которых – это идеальный квадрат.

Решение. Поскольку $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = I$, мы можем без потери общности предположить, что $1 \in A$, и доказать утверждение от противного. Предположим, что ни у A, ни у B нет двух элементов, сумма которых равна идеальному квадрату. Тогда $3 \in B$, следовательно, $6 \in A$ и $10 \in B$. Далее, если $15 \in B$, то $10 + 15 = 25$ – идеальный квадрат, а если $15 \in A$, то $1 + 15 = 16$ – идеальный квадрат. Таким образом, число 15 не может принадлежать ни A, ни B, что является противоречием. Следовательно, утверждение справедливо.

Замечание. «Предполагая без потери общности, что $1 \in A$» – это техника, которой следует овладеть. Искусственное создание разумных предположений может упростить задачу при работе с объектами в задачах с симметрией.

Пример 7 (Китайский математический конкурс 2015 года). Пусть a_1, a_2, a_3 и a_4 – четыре рациональных числа, таких что

$$\{a_i a_j | 1 \le i < j \le 4\} = \left\{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\right\}.$$

Найдите значение $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Решение. Обратите внимание, что $(a_i a_j | 1 \le i < j \le 4)$ – это шесть различных чисел, и никакие два из них не равны в сумме 0, поэтому никакие два из a_1, a_2, a_3 и a_4 не равны в сумме 0. Без потери общности мы предполагаем, что $|a_1| < |a_2| < |a_3| < |a_4|$. Тогда среди $|a_i|\,|a_j|\,(1 \le i < j \le 4)$ наименьшим и вторым по величине числами являются $|a_1|\,|a_2|$ и $|a_1|\,|a_3|$ соответственно, а наибольшим и вторым по величине числами являются $|a_3|\,|a_4|$ и $|a_2|\,|a_4|$ соответственно. Поэтому необходимо, чтобы выполнялась следующая система уравнений:

$$\begin{cases} a_1 a_2 = -\dfrac{1}{8}, \\ a_1 a_3 = 1, \\ a_2 a_4 = 3, \\ a_3 a_4 = -24, \end{cases}$$

и, следовательно, $a_2 = -\frac{1}{8a_1}$, $a_3 = \frac{1}{a_1}$ и $a_4 = \frac{3}{a_2} = -24a_1$. Поэтому

$$\{a_2 a_3, a_1 a_4\} = \left\{-\frac{1}{8a_1^2}, -24a_1^2\right\} = \left\{-2, -\frac{3}{2}\right\}.$$

Вместе с тем, что $a_1 = \mathbf{Q}$ (множество рациональных чисел), мы имеем $a_1 = \pm\frac{1}{4}$. Следовательно, $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 4, -6)$ или $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -4, 6)$. Несложно убедиться, что оба решения удовлетворяют требованиям. Таким образом, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \pm\frac{9}{4}$.

Пример 8 (Китайская математическая олимпиада 2010 года). Пусть m и n – целые числа, большие 1, а $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ – целые числа. Покажите, что существует подмножество T из множества целых чисел такое, что

$$|T| \le 1 + \frac{a_m - a_1}{2n + 1}$$

и для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ существуют $t \in T$ и $s \in [-n, n]$ такие, что $a_i = t + s$.

Решение. Пусть $a_1 = a$ и $a_m = b$.

Используя деление с остатком, мы можем записать $b - a = (2n + 1)q + r$, где $q, r \in \mathrm{Z}$ и $0 \le r \le 2n$.

Выберем $T = \{a + n + (2n + 1)k \,|k = 0, 1, \ldots, q\}$. Тогда $|T| = q + 1 \le 1 + \frac{b-a}{2n+1}$, и множество

$$B = \{t + s | t \in T, s = -n, -n + 1, \ldots, n\} = \{a, a + 1, \ldots, a + (2n + 1)q + 2n\}.$$

Заметим, что $a + (2n + 1)q + 2n \geq a + (2n + 1)q + r = b$, а так как a_i содержится в B, то утверждение доказано.

Пример 9. Пусть A – ряд положительных целых чисел со следующими свойствами:

(1) A состоит как минимум из трех элементов;
(2) если $a \in A$, то все положительные делители a принадлежат A;
(3) если $a \in A$, если $b \in A$ и $1 < a < b$, тогда $1 + ab \in A$.

Решите следующие задачи:

(1) покажите, что 1, 2, 3, 4 и 5 являются элементами A;
(2) определите, является ли 2005 элементом A.

Решение. (1) Во-первых, очевидно, что $1 \in A$. Предположим, что $a \in A$, $b \in A$ и $1 < a < b$. Если хотя бы одно из значений a и b четно, тогда $2 \in A$, но если оба a и b нечетные, тогда $1 + ab$ четно. Поэтому $2 \in A$.

Предположим $1, 2, a \in A$ $(a > 2)$. Тогда

$$1 + 2a \in A,\ 1 + 2(1 + 2a) = 3 + 4a \in A,$$

$$1 + (1 + 2a)(3 + 4a) = 4 + 10a + 8a^2 \in A.$$

Если a четное, тогда $4|(4 + 10a + 8a^2)$, поэтому $4 \in A$. Если a нечетное, тогда $4 + 10a + 8a^2$ четное, и, заменяя a на $4 + 10a + 8a^2$ и по аналогии с вышеприведенным рассуждением, получаем результат $4 \in A$.

Также $1 + 2 \times 4 = 9 \in A$, так как $3 \in A$, $1 + 2 \times 3 = 7 \in A$, и значит, $1 + 2 \times 7 = 15 \in A$.

Откуда следует, что $5 \in A$. Поэтому все 1, 2, 3, 4 и 5 – элементы A.

(2) Поскольку $1 + 3 \times 5 = 16$, мы имеем $8 \in A$, и следовательно:

$$1 + 4 \times 8 = 33,\ 1 + 3 \times 33 = 100,$$

$$1 + 5 \times 100 = 501,\ 1 + 4 \times 501 = 2005.$$

Это число принадлежит множеству A. Поэтому число 2005 – также элемент A.

Примечание. На самом деле мы можем доказать, что $A = \mathbf{N}^*$.

Нам известно из выражения (1), что все числа 1, 2, 3, 4 и 5 принадлежат A. Предположим, что $1, 2, \ldots, n \in A$ $(n \geq 5)$. Мы показали, что $n + 1 \in A$.

Если $n + 1 = 2k + 1$ – нечетное число, то $3 \leq k < n$, и поэтому $n + 1 = 1 + 2k \in A$; но если $n + 1 = 2k$ – это четное число, тогда $3 \leq k < n$, поэтому $n = 2k - 1 \in A$ и $1 + 2k \in A$.

Следовательно, $1 + (2k - 1)(2k + 1) = 4k^2 \in A$, отсюда следует, что $2k \in A$, а также $n + 1 \in A$.

Исходя из принципа индукции, мы доказали, что $A = \mathbf{N}^*$.

1.3. Упражнения

Группа А

1. (2012 Китайская математическая олимпиада. Задание B) Мы называем $b - a$ длиной ряда $\{x|a \le x \le b\}$. Давайте установим, что

$$A = \{x|a \le x \le a + 1981\}, \quad B = \{x|b - 1014 \le x \le b\}$$

являются подмножествами $U = \{x|0 \le x \le 2012\}$. Тогда минимальная длина $A \cap B$ ____________.

2. (2011 Китайская математическая олимпиада) Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Если $B = \{-1, 3, 5, 8\}$, это подмножество всех сумм трехэлементных подмножеств A, тогда $A =$ ____________.

3. Предположим, что x, y и z – ненулевые действительные числа. Найдите набор всех возможных значений

$$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xy}{|xy|} + \frac{xyz}{|xyz|}$$

и перечислите их значения.

4. Заданы множества

$$A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\},$$

$$B = \left\{1, 5a - 5, -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 4, a^3 + a^2 + 3a + 7\right\}.$$

Докажите или опровергните, что существует $a \in \mathbf{R}$ такое, что $A \cap B = \{+2, 5\}$.

5. Пусть X – множество действительных решений уравнения $x^2 + px + q = 0$ и существуют множества:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{1, 4, 7, 10\}.$$

Известно, что $X \cap A = \varnothing$ и $X \cap B = X$. Найдите величины p и q.

6. Допустим, $A = \{(x, y)|y = ax + 2\}$ и $B = \{(x, y)|y = |x + 1|\}$, где a – это действительное число, $A \cap B$ – множество из одного элемента t. Найдите диапазон значений параметра a.

7. Допустим, что

$$A = \{x|x = a^2 + 1, a \in \mathbf{N}^*\},$$

$$B = \{y|y = b^2 - 6b + 10, b \in \mathbf{N}^*\}.$$

Как связаны между собой A и B?

8. Допустим, $M = \{x, xy, \lg(xy)\}$ и $N = \{0, |x|, y\}$ такие, что $M = N$. Найдите значение выражения

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{y^3}\right) + \cdots + \left(x^{2006} + \frac{1}{y^{2006}}\right).$$

9. Пусть M и n – максимальный и минимальный элементы множества $\{\frac{3}{a} + b|1 \le a \le b \le 2\}$ соответственно. Найдите значение разницы $M - m$.
10. Пусть A – множество, состоящее из всех сумм квадратов двух целых чисел, согласно выражению
$$A = \{x|x = m^2 + n^2, m, n \in \mathbf{Z}\}$$
(где $\boldsymbol{Z}$ – множество целых чисел).
    1) Покажите, что если $s, t \in A$, то и произведение $st \in A$.
    2) Покажите, что если $s, t \in A$ и $t \neq 0$, то $\frac{s}{t} = p^2 + q^2$, где p и q – рациональные числа.
11. Предположим, что S – это подмножество $\{1, 2, \ldots, 50\}$ и сумма квадратов любых двух элементов S не делится на 7. Найдите максимальное значение $|S|$.
12. Предположим, что M – подмножество множества положительных целых чисел, таких как $1 \in M$, $2006 \in M$, но число $2007 \notin M$. Предположим, что M обладает свойством, что если a, $b \in M$, то выполняется соотношение $\left[\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right] \in M$. Какое количество непустых подмножеств может иметь M? (Обозначение квадратных скобок $[x]$ означает, что самое большое целое не превышает x.)
13. Допустим, S_1, S_2 и S_3 – три непустых множества целых чисел. Допустим, что для i, j, k любая перестановка из 1, 2, 3, если $x \in S_i$ и $y \in S_j$, тогда $x - y \in S_k$ для любой перестановки. Докажите, что два из множеств S_1, S_2 и S_3 идентичны.
14. Предположим, $A = \{(x, y)|ax + y = 1\}$, $B = \{(x, y)|x + ay = 1\}$ и $C = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$, где a – действительное число.
    1) При каких значениях a множество $(A \cup B) \cap C$ является двухэлементным множеством?
    2) При каких значениях a множество $(A \cup B) \cap C$ является трехэлементным множеством?
15. Допустим, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ и $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$, где a_i $(1 \le i \le 5)$ – положительные целые числа, с условием $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ и $a_1 + a_4 = 10$. Найдите A, если $A \cap B = \{a_1, a_4\}$ и сумма элементов $A \cup B$ равна 224.

Группа B

16. Предположим, что A – подмножество множества $\{1, 2, \ldots, 2000\}$, обладающее следующим свойством: ни один из элементов A не превосходит другой элемент множества A в 5 раз. Какова максимальная величина $|A|$?
17. Предположим, что набор множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обладает следующими свойствами:
    1) каждый набор A_i состоит из 30 элементов;
    2) в каждой паре i и j *в промежутке* $1 \le i < j \le n$ множество пересечений $A_i \cap A_j$ имеет один элемент;

3) пересечение $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \varnothing$.

Найдите максимальное значение n для существования такой совокупности множеств.

18. Предположим, $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2000\}$ и разница между любыми двумя элементами A не равна 4 или 7. Найдите максимальную величину $|A|$.
19. Пусть множество A состоит из 3 элементов $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ и T – совокупность подмножеств A, содержащая $\varnothing$ и A. Предположим, что пересечение и объединение любых двух элементов T также принадлежит T. Найдите число таких T.
20. (China West Mathematical Invitational, Китайско-Западное математическое приглашение 2011) Пусть задано целое число $n \geq 2$.
    1) Покажите, что существует перестановка всех подмножеств $\{1, 2, \ldots, n\}$, а именно $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$, такая, что разность чисел элементов в A_i и A_{i+1} равна ровно 1 для каждого $i = 1, 2, \ldots, 2^n$, где $A_{2^n+1} = A_1$.
    2) Предположим, что $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$ удовлетворяют условию (1). Найдите все возможные значения выражения $\sum_i^{2^n} = 1(-1)^i S(A_i)$, в котором $S(A_i) = \sum_{x \in A_i} x$ и $S(\varnothing) = 0$.

Глава 2

Количество элементов в конечном множестве

2.1. Основные положения и базовые методы

Множество может быть классифицировано как конечное или бесконечное в зависимости от того, имеет ли оно конечное число элементов. Если множество A является конечным множеством, мы используем $|A|$ для обозначения количества элементов в нем.

A. Отображения

Для любых двух множеств A и B если существует правило f, согласно которому для каждого элемента x из множества A существует уникальный элемент $f(x)$ в множестве B, соответствующий x, то мы называем $f: A \to B$ отображением (из A в B). Здесь $f(x)$ называется образом x, а x называется прообразом $f(x)$.

Если $f: A \to B$ – отображение и для любых $x, y \in A$ при условии, что $x \neq y$, то мы получаем $f(x) \neq f(y)$, f называется инъекцией (инъективным отображением) из A в B. Ясно, что если A и B – конечные множества и существует инъекция из A в B, то тогда $|A| \leq |B|$.

Если $f: A \to B$ – отображение и для любого $y \in B$ существует $x \in A$ такое, что $y = f(x)$, то f называется сюръекцией из A в B. Кроме того, если A и B – конечные множества и существует сюръекция из A в B, то $|A| \geq |B|$.

Если $f: A \to B$ – это отображение, которое является одновременно инъекцией и сюръекцией, то f называется биекцией (или взаимно однозначным соответствием) из A в B. Если A и B – конечные множества и существует биекция из A в B, то $|A| = |B|$.

B. Принцип включения-исключения

Теорема 1. Если A и B – конечные множества, то

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Теорема 2. Если A, B и C – конечные множества, то

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

2.2. Наглядные примеры

Пример 1. Сколько целых чисел из ряда 1, 2, …, 1000 не делятся ни на 2, ни на 5?

Решение. Пусть $S = \{1, 2, \ldots, 1000\}$, $A_2 = \{a|a \in S, 2|a\}$ и $A_5 = \{a|a \in S, 5|a\}$.

Тогда $|A_2| = \frac{1000}{2} = 500$, $|A_5| = \frac{1000}{5} = 200$ и $|A_2 \cap A_5| = \frac{1000}{10} = 100$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}|\complement_S\bar{A}_2 \cap \complement_S\bar{A}_5| &= |S| - (|A_2| + |A_5|) + |A_2 \cap A_5| \\ &= 1000 - (500 + 200) + 100 = 400.\end{aligned}$$

Пример 2. Пусть A – множество, состоящее из целых положительных чисел, наименьший элемент которого равен 1, а наибольший – 100. Кроме 1, каждый элемент A является суммой двух других элементов (не обязательно различных) A. Найдите минимальное значение $|A|$.

Решение. Пусть $A = \{1, a_1, a_2, \ldots, a_n, 100\}$, где $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 100$. Тогда $a_1 = 1 + 1 = 2$.

Если $n = 6$, тогда $a_2 \le 2 + 2 = 4$, $a_3 \le 4 + 4 = 8$, $a_4 \le 8 + 8 = 16$, $a_5 \le 16 + 16 = 32$ и $a_6 \le 32 + 32 = 64$. Поскольку $a_5 + a_6 \le 32 + 64 = 96 < 100$, мы получаем $100 = 2a_6$, следовательно, $a_6 = 50$. Также $a_4 + a_5 \le 16 + 32 = 48 < 50$, следовательно, $50 = 2a_5$, то есть $a_5 = 25$. Далее $a_3 + a_4 \le 8 + 16 = 24 < 25$, из чего следует, что $25 = 2a_4$, что является противоречием.

Если $n \le 5$, тогда аналогично $a_n \le 32$, так что $2a_n \le 64 < 100$, что невозможно.

Поэтому $|A| \ge 9$. Заметив, что множество $A = \{1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ удовлетворяет требованиям и $|A| = 9$, мы заключаем, что минимальное значение $|A|$ равно 9.

Пример 3. Пусть A и B – два подмножества $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ такие, что они имеют одинаковое количество элементов и пересечение $A \cap B$ – пустое множество. Предположим, что для каждого $n \in A$ мы имеем $2n + 2 \in B$. Найдите максимальную величину $|A \cup B|$.

Решение. Сначала мы докажем, что $|A \cup B| \le 66$, или, что эквивалентно, $|A| \le 33$. Достаточно показать, что если A является 34-элементным подмножеством множества $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$, то существует некоторое $n \in A$ такое, что $2n + 2 \in A$.

Мы разбиваем множество $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$ на 33 подмножества:

$$\begin{gathered}\{1, 4\}, \{3, 8\}, \{5, 12\}, \ldots, \{23, 48\}, \{2, 6\}, \{10, 22\}, \ldots, \\ \{18, 38\}, \{25\}, \{27\}, \ldots, \{49\}, \{26\}, \{34\}, \{42\}, \{46\}.\end{gathered}$$