

ПРЕДИСЛОВИЕ

Прошло более 30 лет с момента выхода в свет (1972) популярного Сборника задач по сопротивлению материалов под ред. В. К. Качурина. В авторском коллективе — преподаватели двух крупнейших Ленинградских институтов — политехнического и инженеров железнодорожного транспорта. Эта группа (Н. М. Беляев, Л. А. Белявский, В. К. Качурин, Я. И. Кипнис, Н. Ю. Кушелев, А. К. Сеницкий) удачно подытожила опыт преподавания сопротивления материалов студентам массовых инженерных специальностей середины XX века.

С тех пор заметно изменились условия преподавания сопротивления материалов в технических вузах. Потребовалось не только опустить часть традиционных разделов, но также изменить структуру курса. Предлагаемый Сборник задач отражает подобные изменения, произошедшие, в частности, в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете. Вместе с этим многие задачи из багажа предыдущих поколений стали общепринятыми, отказываться от которых просто нерационально. Разбивка по главам всего массива отобранных задач соответствует учебному пособию «Сопротивление материалов» под ред. Б. Е. Мельникова. — СПб.: Издательство «Лань», 2007. Авторы сочли своим долгом поставить во главе списка имя Н. М. Беляева, заведующего кафедрами сопротивления материалов в предвоенные годы в ЛПИ и ЛИИЖТ, одного из основателей отечественной школы преподавания инженерного направления в этой дисциплине.

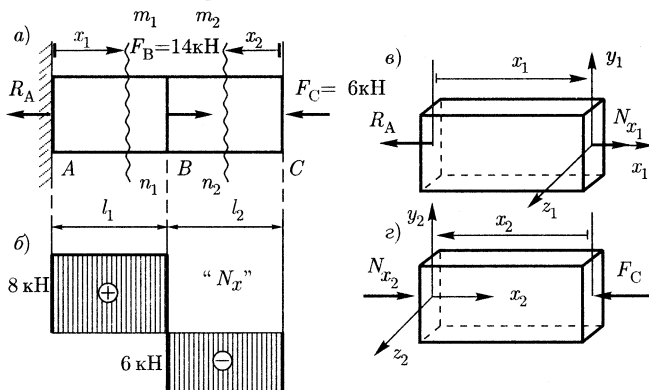
Авторы признательны сотрудникам кафедры «Сопротивление материалов» СПбГПУ И. Н. Изотову и В. Н. Селюкову за конструктивную критику при подготовке рукописи к изданию. Авторы благодарят Е. К. Ковалова и М. Ю. Горохова за техническую помощь.

В тексте исправлены опечатки, замеченные в предыдущем издании.

Г Л А В А 1

ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В СТЕРЖНЕ

1.1. Прямой стержень, закрепленный одним концом, нагружен по схеме, изображенной на рис. а. Определить реакцию в закреплении, найти внутренние усилия и построить график (эпюру) их изменения по длине стержня.



К задаче 1.1

Решение. Предположим, что реакция R_A направлена справа-налево. Тогда условие равновесия для всего стержня принимает вид

$$\sum F_x = -R_A + F_B - F_C = 0,$$

откуда получаем

$$R_A = F_B - F_C = 14 - 6 = 8 \text{ кН.}$$

Сечением B , в котором приложена сила F_B , стержень подразделяется на два участка длиной l_1 и l_2 , рис. а. В пределах первого участка проведем произвольное сечение $m_1 n_1$. На рис. б изображена левая отсеченная часть стержня длиной x_1 . Чтобы соблюдалось условие равновесия $\sum F_x = 0$ для этого тела, необходимо приложить внутреннюю силу N_{x_1} так, как показано на рис. б. Из этого условия получаем модуль внутреннего усилия $|N_{x_1}| = |R_A| = 8 \text{ кН}$. Направление усилия N_{x_1} совпадает с положительным направлением оси x , поэтому приписываем ему положительный знак

$$N_{x_1} = +8 \text{ кН.}$$

Проведем произвольное сечение $m_2 n_2$ в пределах второго участка стержня. Обозначим через x_2 расстояние от правого конца до сечения

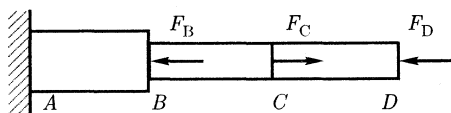
$m_2 n_2$ и изобразим правую отсеченную часть стержня (не путать с обозначением оси x_2), см. рис. 2. Из условия равновесия имеем $|N_{x_2}| = |F_C| = = 6 \text{ кН}$. Так как N_{x_2} ориентирована в положительном направлении внутренней нормали x , то приходится принимать

$$N_{x_2} = -6 \text{ кН}.$$

Мы получили, что положительная нормальная сила соответствует растяжению стержня, см. рис. 6, а отрицательная – сжатию, см. рис. 2. Так получается всегда, если подвижная система координат xuz , связанная с произвольным сечением, перемещается поступательно от одного конца стержня до другого.

Имея данные о N_{x_1} и N_{x_2} , можно переходить к построению графика (эпюры) $N_x = N_x(x)$ изменения нормальных сил по длине стержня, рис. 6. Обращаем внимание на скачки, которые отвечают сосредоточенным силам. Численное значение скачка равно модулю силы.

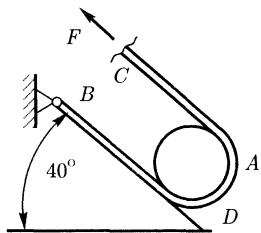
1.2. Стержень $ABCD$, закрепленный на конце A , нагружен силами $F_B = = 120 \text{ кН}$, $F_C = 60 \text{ кН}$, $F_D = 20 \text{ кН}$, направленными вдоль его оси. Найти реакцию в закреплении A , а также построить эпюру внутренних усилий.



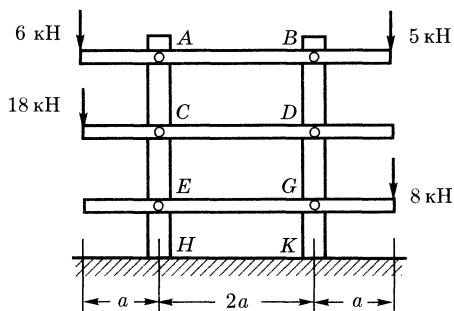
К задаче 1.2

1.3. Бревно A при помощи двух канатов BAC , расположенных по его концам, поднимается по наклонной плоскости DB , см. рис. Определить усилия F в каждом из канатов, если вес бревна 3 кН .

Ответ: $F = 0,48 \text{ кН}$.



К задаче 1.3



К задаче 1.4

1.4. Две стойки A и B нагружены, как указано на рис. Соединения горизонтальных элементов со стойками принять шарнирными.

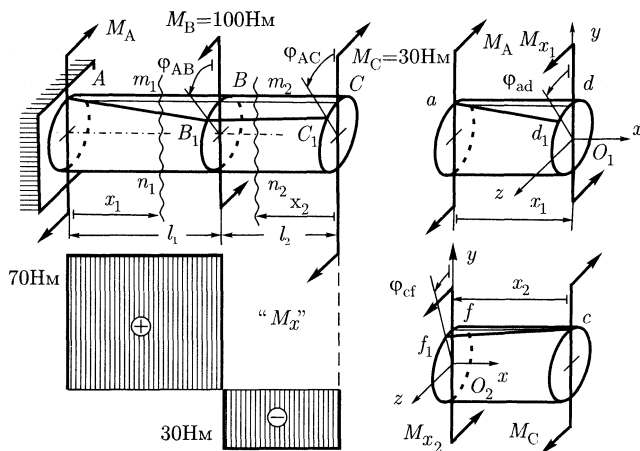
Определить внутренние усилия в сечениях верхней, средней и нижней частей обеих стоек.

Ответ:

$$N_{AC} = -6,5 \text{ кН}, N_{CE} = -33,5 \text{ кН}, N_{EH} = -29,5 \text{ кН},$$

$$N_{BD} = -4,5 \text{ кН}, N_{DG} = +4,5 \text{ кН}, N_{GK} = -7,5 \text{ кН}.$$

1.5. Стержень, закрепленный одним концом, нагружен двумя парами сил, см. рис. *a*. Плоскости пар перпендикулярны продольной оси стержня, а сами пары направлены в противоположные стороны. Определить реактивный момент в заделке, построить эпюру внутренних усилий (крутящих моментов) $M_x = M_x(x)$, изобразить примерный вид искажения продольной образующей.



К задаче 1.5

Решение. Зададимся направлением реактивного момента M_A и составим условие равновесия стержня (сумму моментов вокруг продольной оси):

$$\sum m_x = -M_A + M_B - M_C = 0.$$

Отсюда получаем

$$M_A = M_B - M_C = 100 - 30 = 70 \text{ Нм}.$$

Сечение B разделяет стержень на два участка длиной l_1 и l_2 . В пределах первого участка проведем сечение m_1n_1 , а затем изобразим левую отсеченную часть (рис. *б*). В сечении m_1n_1 надлежит приложить внутренний крутящий момент M_x , с тем, чтобы эта часть обрела равновесие.

Из условия статики получаем $|M_{x_1}| = |M_A| = 70 \text{ Нм}$. Так как момент M_{x_1} направлен вокруг оси x против часовой стрелки, то имеем

$$M_{x_1} = +70 \text{ Нм.}$$

Проведем сечение m_2n_2 в пределах второго участка, а затем выделим правую отсеченную часть (рис. 2.). В сечении возникает крутящий момент M_{x_2} , для которого получаем из условия равновесия $|M_{x_2}| = |M_C|$. Так как момент M_{x_2} ориентирован вокруг внутренней нормали x против часовой стрелки, то окончательно запишем

$$M_{x_2} = M_C = -30 \text{ Нм.}$$

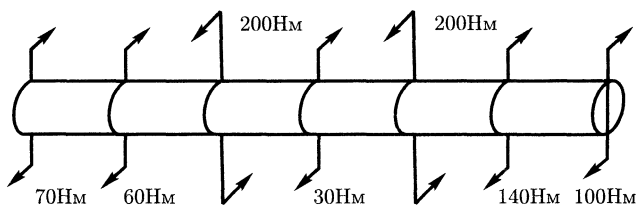
Имея значения M_{x_1} и M_{x_2} , строим эпюру крутящих моментов $M_x = M_x(x)$, рис. 6. Скачки на эпюре определяются сосредоточенными моментами M_A , M_B и M_C .

Вернемся к левой отсеченной части (рис. 6). Здесь стержень закручивается. При этом продольная образующая ad обращается в винтовую линию ad_1 , а радиус O_1d в сечении m_1n_1 поворачивается в положение O_1d_1 на угол φ_{ad} (угол закручивания). Аналогично выглядит винтовая линия AB_1 на длине всего первого участка (рис. а). Здесь через φ_{AB} обозначен угол закручивания между сечениями A и B .

На правой отсеченной части получаем винтовую линию cf_1 и угол закручивания φ_{cf} . Это позволяет построить винтовую линию B_1C_1 на рис. а. Здесь угол поворота сечения C относительно заделки A обозначен φ_{AC} .

Обращаем внимание на неразрывность линии AB_1C_1 , а также на следующее обстоятельство: при $M_x > 0$ получаем правую винтовую линию, а при $M_x < 0$ – левую.

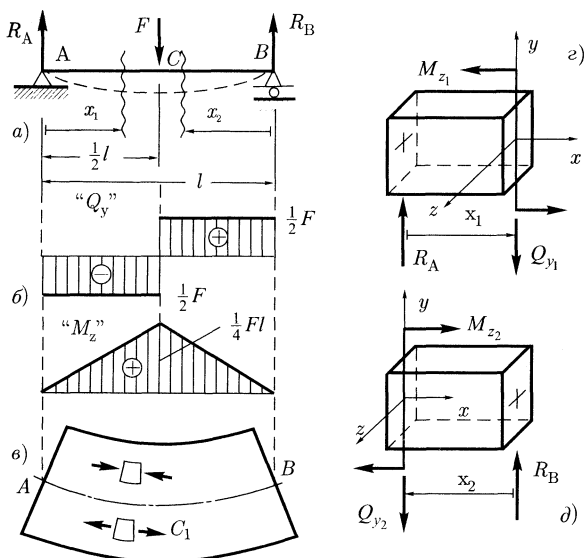
1.6. Стержень нагружен внешними моментами так, как показано на рис. Построить эпюру крутящих моментов, изобразить примерный вид искаженной боковой образующей.



К задаче 1.6

1.7. Стержень, опирающийся своими концами на шарнирные опоры, нагружен в середине силой. см. рис. а. Найти реакции в оп-

рах, определить внутренние усилия и построить соответствующие эпюры, изобразить примерный вид изогнутой оси стержня.



К задаче 1.7

Решение. В данном случае обе вертикальные реакции R_A и R_B направлены вверх, а уравнения равновесия принимают вид

$$\sum m_{z(A)} = -F \frac{l}{2} + R_B l = 0, \quad \sum m_{z(B)} = +F \frac{l}{2} - R_A l = 0,$$

откуда имеем

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}F.$$

В пределах первого участка AC проведем сечение на расстоянии x_1 от левого конца, рис. а. На рис. г изображена левая отсеченная часть с внешней силой R_A и внутренними усилиями Q_{y1} и M_{z1} (поперечной силой и изгибающим моментом). Из уравнений равновесия

$$\sum F_y = R_A - Q_{y1} = 0, \quad \sum m_z = R_A x + M_{z1} = 0$$

получаем

$$|Q_{y1}| = R_A = 0,5F, \quad |M_{z1}| = R_A x = 0,5Fx.$$

Так как сила Q_{y1} направлена в отрицательном направлении оси y , а момент M_{z1} – против часовой стрелки вокруг оси z , то окончательно имеем

$$Q_{y1} = -0,5F, \quad M_{z1} = +0,5Fx,$$

что позволяет построить эпюры $Q_y = Q_y(x)$ и $M_z = M_z(x)$ на первом участке, рис. б.

Заметим, что во многих руководствах по сопротивлению материалов используется другое правило знаков для поперечной силы Q_y .

Далее в пределах второго участка CB проведем сечение на расстоянии x_2 от правого конца и выделим правую отсеченную часть со всеми приложенными к ней усилиями (рис. а и з). Из уравнений равновесия имеем $|Q_{y_2}| = 0,5F$, $|M_{z_2}| = 0,5Fx$. Сила Q_{y_2} направлена в отрицательном направлении оси y , а момент M_{z_2} – по часовой стрелке вокруг оси z . В данном случае ось x является внутренней нормалью, поэтому запишем окончательно

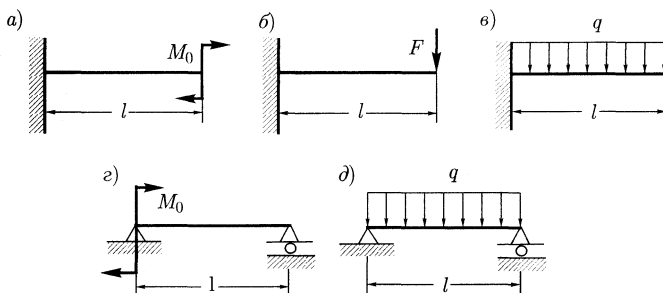
$$Q_{y_2} = +0,5F, \quad M_{z_2} = +0,5Fx.$$

Эти соотношения позволяют закончить построение эпюр Q_y и M_z , рис. б.

Очевидно, что рассматриваемый стержень изогнется так, как показано на рис. а. Подобная линия в принятых здесь координатах $x y z$ имеет положительную кривизну ($k_z > 0$) при положительном изгибающем моменте ($M_z > 0$).

На рис. в изображена несколько утрированная модель изгиба данного стержня. Здесь через AC_1B по-прежнему обозначена изогнутая ось. Выше нее элементы материала стержня сжаты, ниже – растянуты. Эпюра изгибающих моментов оказалась расположенной на сжатой стороне изогнутого стержня. Такая связь характера изогнутой оси и расположения эпюры моментов служит нередко правилом при построении последней.

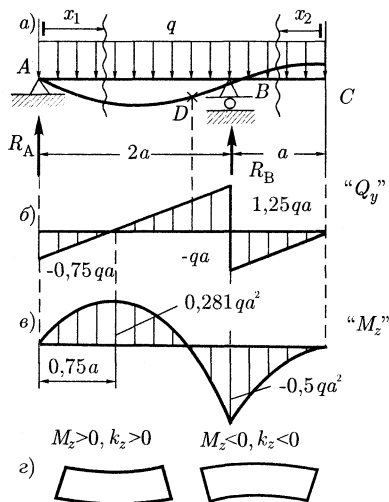
Следует отметить, что инженеры-строители используют другое правило построения эпюры изгибающих моментов: эпюра M_z располагается на растянутой стороне изогнутого стержня, называемого также балкой.



К задаче 1.8

1.8. Для заданных на рисунках балок найти реакции в опорах, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, изобразить примерный вид изогнутой оси.

1.9. Найти реакции, построить эпюры Q_y и M_z , изобразить примерный вид изогнутой оси балки, схема которой дана на рис. а.



К задаче 1.9

Решение. Из условий равновесия получаем, что реакции в опорах направлены вверх и составляют $R_A = 0,75qa$ и $R_B = 2,25qa$.

Выражения для поперечной силы на первом и втором участках имеют вид

$$Q_{y_1} = -R_A + qx = -0,75qa + qx, \quad (0 \leq x_1 \leq 2a)$$

$$Q_{y_2} = -qx, \quad (0 \leq x_2 \leq a),$$

а для изгибающего момента

$$M_{z_1} = R_A x - \frac{1}{2} q x^2 = 0,75qax - 0,5q x^2, \quad (0 \leq x_1 \leq 2a)$$

$$M_{z_2} = -0,5q x^2. \quad (0 \leq x_2 \leq a).$$

В соответствии с этими соотношениями построены эпюры Q_y и M_z , см. рис. б и в.

Ввиду наличия дифференциальной зависимости

$$Q_y = -\frac{dM_z}{dx}$$

устанавливаем, что при переходе эпюры Q_y через нуль со сменой знака при $x = x_*$ имеем экстремум функции $M_z = M_z(x)$, в данном случае

максимум. Координату x_* отыскиваем из равенства

$$Q_{y_1} = -0,75qa + qx_* = 0,$$

откуда

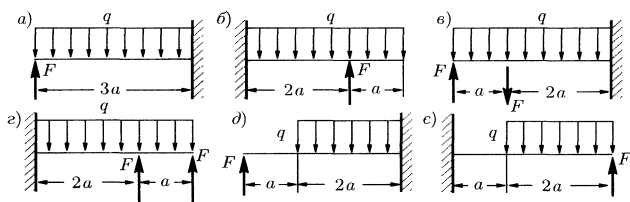
$$x_* = 0,75a,$$

что позволяет отыскать максимальное значение изгибающего момента

$$M_{\max} = M_{z_1} |_{x=x_*} = 0,281qa^2.$$

Точка, в которой эпюра M_z меняет знак, отвечает точке перегиба D на упругой линии. В данном случае на участке AD балка имеет положительную кривизну ($k_z > 0$), а на участке DC – отрицательную ($k_z < 0$), что дополнительно иллюстрируется схемой на рис. 2. Эта схема полностью согласуется с правилом, по которому эпюра изгибающего момента всегда располагается на сжатой стороне изогнутого стержня.

1.10. Консоль длиной $l = 3a$ нагружена равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенными силами (см. рис.). Установить, при каких значениях сил F момент в заделке обратится в нуль. Построить эпюры Q_y и M_z при найденных значениях сил.

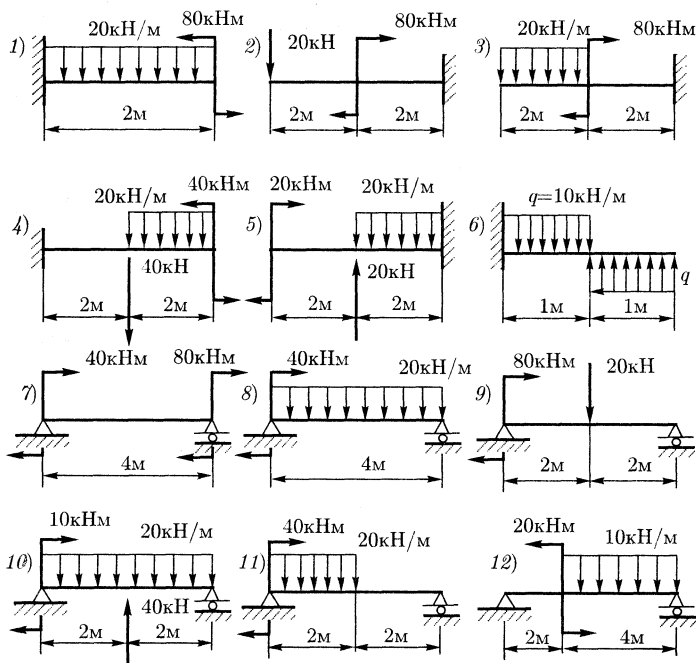


К задаче 1.10

Ответ:

Схема	а	б	в	г	д	е
Сила F	$\frac{1}{2} ql$	$\frac{3}{4} ql$	$\frac{3}{2} ql$	$0,3ql$	$\frac{2}{9} ql$	$\frac{4}{9} ql$
$M_{\max}$	$\frac{1}{8} ql^2$	$-\frac{1}{18} ql^2$	$\frac{4}{9} ql^2$	$0,08ql^2$	$\frac{8}{81} ql^2$	$\frac{8}{81} ql^2$

1.11. Для каждой из балок, схемы которых приведены на рис., построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, изобразить примерный вид изогнутой оси.



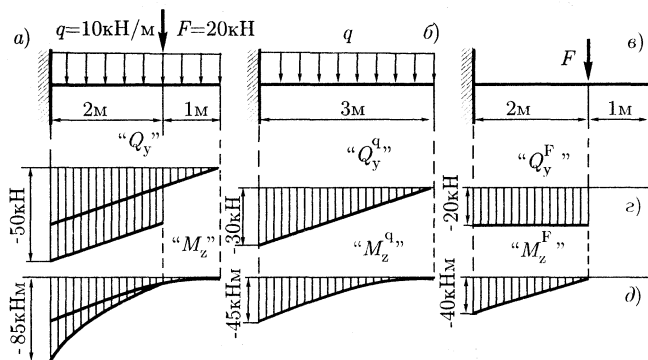
К задаче 1.11

Ответ:

Схема	1	2	3	4	5	6
Q_y , кН	-40	20	40	-80	-20	10
M_z , кНм	80	40	40	-160	30	10
Схема	7	8	9	10	11	12
Q_y , кН	30	50	30	22,5	20	23,3
M_z , кНм	-80	62,5	80	17,65	50	33,4

1.12. Пользуясь принципом независимости и сложения действия сил, построить эпюры Q_y и M_z для балки, схема которой изображена на рис. а.

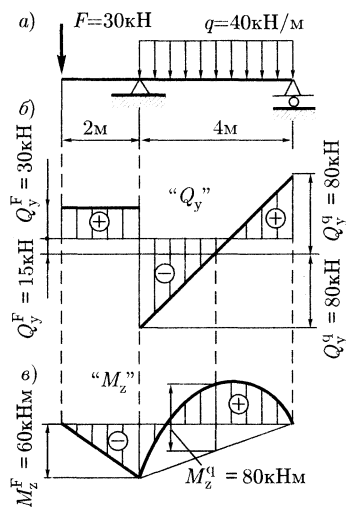
Решение. Рассмотрим балку дважды: сначала только под равномерно распределенной нагрузкой (рис. б), а затем – под сосредоточенной силой (рис. в). В данном случае частные эпюры $Q_y^{(q)}$ и $Q_y^{(F)}$ имеют одинаковые знаки. Поэтому для построения суммарной эпюры Q_y достаточно просто приложить друг к другу частные (рис. г). Аналогичная ситуация наблюдается здесь с эпюрами изгибающих моментов (рис. б, в, д).



К задаче 1.12

Если частные эпюры имеют разные знаки, то их следует наложить одну на другую, см. следующую задачу 1.13.

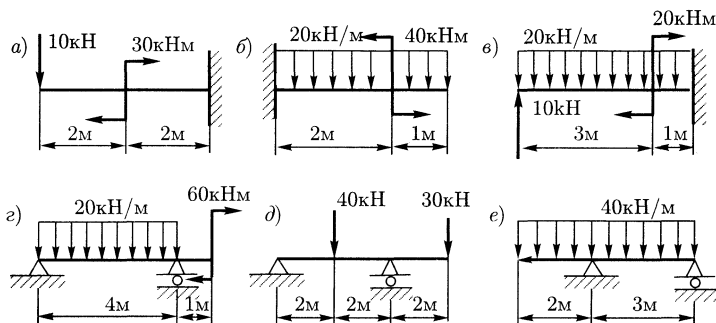
1.13. Пользуясь методом сложения действия сил, построить эпюры Q_y и M_z для балки, схема которой приведена на рис. а.



К задаче 1.13

Ответ: Решение задачи дано на рис. б и в.

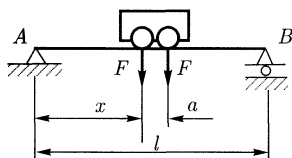
1.14. Применяя метод сложения действия сил, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, схемы которых приведены на рис.



К задаче 1.14

Ответ:

Схема	а	б	в	г	д	е
Q_y , кН	10	-60	70	55	35	-86,7
M_z , кНм	20	-50	-100	-60	60	-80



К задаче 1.15

чение, подсчитать величину $M_{\max}$.

Указание. Обозначив расстояние от левой опоры A до первой силы F через x , выразить опорные реакции в виде функций от x , составить выражение для изгибающего момента в сечении под первой силой F и исследовать его на экстремум.

Ответ: $x = \frac{l}{2} - \frac{a}{4} = 4,7$ м, $M_{\max} = 88,4$ кНм.

1.16. Найти реакции в балке с шарниром (см. рис. *а*), построить эпюры Q_y и M_z , изобразить примерный вид изогнутой оси.

Решение. В балке с шарниром к стандартной системе уравнений равновесия добавляется равенство нулю суммы моментов всех сил, распо-

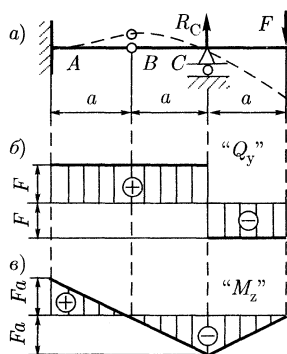
1.15. Двухосная тележка подъемного крана перемещается по двум подкрановым балкам пролетом $l = 10$ м. Расстояние между осями тележки $a = 1,2$ м, усилие под каждым из колес составляет $F = 20$ кН, см. рис. Найти опасное положение тележки, при котором изгибающий момент будет иметь наибольшее значение.

ложенных по одну сторону от шарнира, составленной относительно оси, проходящей через этот шарнир:

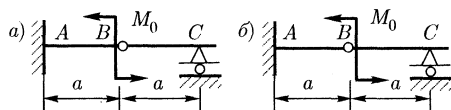
$$\sum m_{z(B)}^{\text{справа}} = -2aF + aR_c = 0.$$

Отсюда находим $R_c = 2F$. Далее нетрудно получить обычным путем $R_A = F$, $M_A = Fa$, см. рис. а. Затем изображаем эпюры Q_y и M_z (рис. б и в), а также примерный вид изогнутой оси (рис. а).

1.17. Балка из предыдущего примера нагружается двумя способами: по первому внешний момент M_0 приложен слева от шарнира B , по второму – справа, см. рис. а и б. В каждом из этих случаев найти реакции, построить эпюры Q_y и M_z , изобразить примерный вид изогнутой оси.



К задаче 1.16



К задаче 1.17

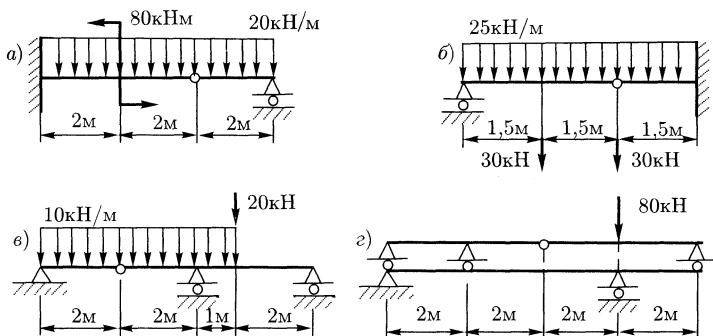
Ответ: В первой балке шарнир перемещается вверх, во второй – вниз.

1.18. Построить эпюры Q_y и M_z для балок с шарнирами, схемы которых приведены на рис. Вычислить наибольшие по модулю значения поперечной силы и изгибающего момента, изобразить примерный вид изогнутой оси.

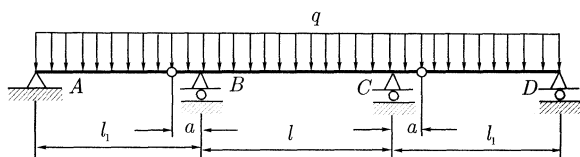
Ответ:

- а) $Q_y = 100$ кН, $M_z = -160$ кНм, б) $Q_y = 120$ кН, $M_z = -152$ кНм, в) $Q_y = -35$ кН, $M_z = -40$ кНм, г) $Q_y = 40$ кН, $M_z = 80$ кНм.

1.19. При проектировании консольных мостов с подвесными пролетами приходится решать задачу о наивыгоднейшей их разбивке. Для балки, изображенной на рис., установить, при каком соотношении размеров $a : l : l_1$ значения изгибающих моментов в опасных сечениях подвесных и основной балки (в середине пролетов и над опорами B и C) будут по абсолютной величине одинаковы. Определить также наибольший изгибающий момент.

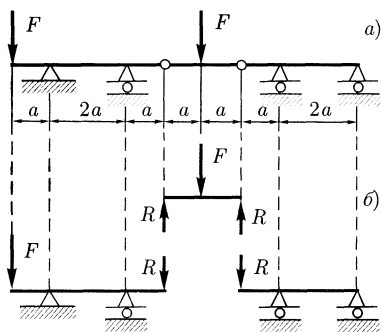


К задаче 1.18



К задаче 1.19

Ответ: $a = 0,146l$, $l_1 = 0,853l$, $M_{\max} = ql^2/16$.



К задаче 1.20

1.20. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для четырехопорной балки с двумя промежуточными шарнирами, изображенной на схеме. Вычислить наибольшие ординаты эпюр Q_y и M_z .

Указание. Проще всего расчленить балку на подвесную и две основные, как показано на рис. б. Сначала вычисляются реакции и строятся эпюры для подвесной балки. Затем принимают во внимание усилия, с

которыми подвесная балка действует на основные балки, после чего определяют реакции и внутренние усилия с соответствующими эпюрами в этих последних.

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru