Содержание

Предисловие

Данное учебное пособие содержит материал по теории алгебраических систем, излагаемый, как правило, в первом семестре курса высшей алгебры в педагогических вузах. Материал распределен по следующим разделам: множества и отношения, бинарные алгебраические операции, группы, кольца, поля и комплексные числа.

В начале каждого параграфа кратко сформулированы основные положения соответствующего раздела теории. Далее приведены примеры и задачи с решениями. В заключении параграфа содержатся задачи для самостоятельного решения, которые снабжены указаниями и ответами. Наличие большого числа решенных задач познакомит читателя с приемами и методами решения алгебраических задач.

Пособие подготовлено на основе материалов занятий по алгебре, проводимых авторами в течение многих лет на физико-математическом факультете Лесосибирского педагогического института – филиала Сибирского федерального университета.

При работе над пособием использовалась учебная литература, список которой приведен в конце книги, там же приведен список используемых обозначений и указатель терминов.

Мы искренне благодарны всем преподавателям кафедры алгебры и математической логики Института Математики и фундаментальной информатики СФУ, в общении с которыми сложилось наше представление об алгебре и ее преподавании. Особую благодарность мы хотим выразить профессору В. М. Левчуку за постоянную поддержку и интеллектуальное вдохновение.

Авторы

§ 1. Множества

Множество – одно из основных понятий современной математики. Это понятие принимают за первоначальное и поэтому не определяют через другие. Можно сказать, что множество это совокупность объектов (чисел, точек, функций и т.д.), которая рассматривается как единое целое. Синонимами слова множества являются также слова: семейство, класс.

Произвольные множества в математике обычно обозначают большими латинскими буквами: A, B, $C, \ldots$

Об объектах, образующих множество, говорят, что они *принадлежат* этому множеству, или являются его *элементами* (*точками*).

Запись $a \in A$ означает, что объект a есть элемент множества A, или объект a принадлежит множеству A. Если элемент a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$. Сам символ $\in$ называют *знаком принадлежности.*

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается через $\emptyset$.

Существует два способа задания множества: непосредственное перечисление всех элементов множества (этот способ пригоден лишь для задания конечного множества), указание характеристического свойства.

Например, если $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел, то множество $2\mathbb{Z}$ четных целых чисел, т.е. чисел, кратных 2, можно записать как $2\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z = 2x \text{ для некоторого } x \in \mathbb{Z}\}$.

Говорят, что множество B *включено* в множество A, если каждый элемент множества B является также элементом множества A; обозначается $B \subseteq A$. Другими словами можно сказать, что множество A *содержит* множество B. Сам символ $\subseteq$ называют *знаком включения*. Множество B при этом называют *подмножеством* множества A.

Два множества A и B считают *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов; обозначается $A = B$ (если A и B не равны, то пишут соответственно $A \neq B$). Используя отношение включения, определение равенства двух множеств можно записать так

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \;\text{ и }\; B \subseteq A.$$

Различают два вида включения:

1) *строгое включение* $A \subset B$: существует хотя бы один элемент множества B, не принадлежащий множеству A;

2) *нестрогое включение* $A \subseteq B$: не существует ни одного элемента множества B, не принадлежащего множеству A.

Если $A \subset B$, но $A \neq B$ и $A \neq \emptyset$, то A называется *собственным подмножеством* множества B.

Основными операциями над множествами, с помощью которых можно получить из любых двух множеств A и B новые множества, являются:

◇ *объединение*

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ или } x \in B\};$$

◇ *пересечение*

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ и } x \in B\};$$

◇ *разность*

$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Если $B \subseteq A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением множества B до множества A*.

Если все рассматриваемые в ходе какого-либо рассуждения множества являются подмножествами некоторого множества U, то такое множество U называется *универсальным* *множеством*. Разность $U \setminus A$ в этом случае называется *дополнением множества* A и обозначается через $\overline{A}$.

Для графического изображения множеств и их свойств часто используются диаграммы Эйлера–Венна. На рис. 1 заштрихованная часть изображает объединение, пересечение и разность множеств A, B.

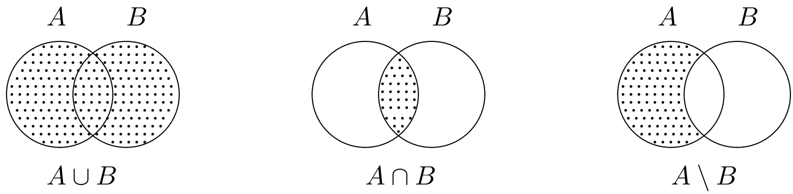

Рис. 1

Примеры решения задач

Задача 1. Доказать, что существует лишь одно множество, не имеющие элементов.

Доказательство. Предположим, что существуют два пустых множества $\emptyset_1$ и $\emptyset_2$, причем $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$. Для любого множества A имеем $A \cap \emptyset = \emptyset$. Следовательно, $\emptyset_1 \cap \emptyset_2 = \emptyset_2 = \emptyset_1$. $\square$

Задача 2. Доказать, что $\{\emptyset\} \neq \emptyset$.

Доказательство. Множество $\{\emptyset\}$ состоит из одного элемента $\emptyset$, а пустое множество $\emptyset$ совсем не содержит никаких элементов. $\square$

Задача 3. Существуют ли такие множества A, B и C, что

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

Решение. Так как $A \cap B \neq \emptyset$, то предположим, что элемент $x \in A \cap B$. Тогда $x \in A$ и $A \cap C = \emptyset$, следовательно, $x \notin C$. Отсюда, по определению разности двух множеств, получаем $x \in (A \cap B) \setminus C$ и $(A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$, что противоречит условию. Значит, таких множеств A, B и C не существует. $\square$

Задача 4. Доказать, что для любых множеств A, B, C выполняется свойство дистрибутивности объединения относительно пересечения, т.е.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Доказательство. Для доказательства этого равенства нам необходимо будет доказать два включения: 1) $A \cup (B \cap C) \subseteq$ $\subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и 2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

1) Пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Отсюда следует, что $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$, следовательно, $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, и значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Мы доказали, что любого элемента x, из условия $x \in A \cup$ $\cup (B \cap C)$ следует, что $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, т.е. мы доказали включение $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2) Пусть теперь $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in A$ или $x \in B$ и $x \in A$ или $x \in C$. Откуда получаем, что $x \in A$ или $x \in B \cap C$, и, значит, $x \in A \cup (B \cap C)$.

Таким образом, мы доказали, что любого элемента x, если $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, то $x \in A \cup (B \cap C)$, т.е. мы доказали включение $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Объединяя включения 1) и 2), имеем $A \cup (B \cap C) = (A \cup$ $\cup B) \cap (A \cup C)$. $\square$

Задача 5. Доказать, что для любых двух множеств A, B

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \notin A \cup B$, и следовательно, $x \notin A$ $x \notin B$. Отсюда следует, что $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, и, стало быть, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, т.е. верно включение $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, следовательно, $x \notin A$ и $x \notin B$. Откуда получаем, что $x \notin A \cup B$, и, значит, $x \in \overline{A \cup B}$. Таким образом, имеем включение $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Объединяя два полученных включения, получаем требуемое равенство. □

Упражнения для самостоятельной работы

1.1. Перечислить элементы следующих множеств:

а) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$;

б) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 2\}$;

в) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

г) $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z},\ x^2 + y^2 = 1\}$;

д) множество всех чисел от 0 до 30, которые можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

1.2. Задать множества с помощью характеристического свойства:

а) множество всех нечетных целых чисел;

б) множество всех действительных чисел, модуль которых больше 3;

в) множество всех целых делителей числа 246, по модулю больших 2;

г) множество всех пар рациональных чисел, сумма квадратов которых равна 1;

д) $\{1, 6, 11, 16, 21, 26\}$.

1.3. Равны ли следующие множества:

а) $\{2, 4, 5\}$ и $\{2, 4, 2, 5\}$;

б) $\{1, 2, 5\}$ и $\{\{1\}, \{2\}, \{5\}\}$;

в) $\{1,\ 3\}$ и $\{\{1,\ 3\}\}$;

г) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid x \,\vdots\, 4 \text{ и } x \,\vdots\, 6\right\}$ и $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid x \,\vdots\, 24\right\}$;

д) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x-2} < 1\right\}$ и $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$;

е) $\{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leq x \leq 5\}$ и $\emptyset$?

1.4. Верны ли следующие включения:

а) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Q}\} \subseteq \{x^4 \mid x \in \mathbb{Q}\}$;

б) $\{4k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

в) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+x+2=0\} \subseteq \emptyset$;

г) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$?

1.5. Указать все подмножества множества $\{\{1,2\},\{3\},1\}$.

1.6. Соединить множества символами $\in$ или $\subseteq$ так, чтобы получилось верное утверждение:

а) 1 и $\mathbb{N}$;

б) $\{1,\ 2\}$ и $\mathbb{N}$;

в) $\{1,\ 2\}$ и $\{1,\ 2,\ \{1\},\ \{2\}\}$;

г) $\{1,\ 2\}$ и $\{1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$;

д) $\emptyset$ и $\mathbb{R}$;

е) $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$.

1.7. Доказать, что если $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ и $C \subseteq A$, то $A = B = C$.

1.8. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$:

а) $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $U = \{0,\ 1, \ldots, 9\}$;

б) $A = \{x \mid x$ делится на $2\}$, $B = \{x \mid x$ делится на $3\}$, $U = \mathbb{N}$.

1.9. Изобразите с помощью кругов Эйлера – Венна множеств A, B и C, удовлетворяющих указанному условию:

а) $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$;

б) если $A \subseteq A \cap B$;

в) если $A \cup B \subseteq A$;

г) если $A = A \setminus B$.

1.10. Доказать, что $A \cup B = A$ тогда и только тогда, когда $B \subseteq A$.

1.11. Доказать, что если $A \cap B = B$ для любого множества A, то $B = \emptyset$.

1.12. Доказать, что для любых множеств A и B имеет место включение

$$A \cap B \subseteq A \cup B.$$

1.13. Верны ли, следующие утверждения:

а) если $A \cup B = A \cup C$, то $B = C$;

б) если $A \cap B = A \cap C$, то $B = C$;

в) если $A \cup B = A \cup C$ и $A \cap B = A \cap C$, то $B = C$?

1.14. Доказать основные теоретико-множественные тождества и проиллюстрировать их с помощью кругов Элера–Венна:

а) $A \cup A = A$ (идемпотентность объединения);

б) $A \cap A = A$ (идемпотентность пересечения);

в) $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);

г) $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);

д) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность объединения);

е) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность пересечения);

ж) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);

з) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

и) $A \cup \overline{A} = U$;

к) $A \cap \overline{A} = \emptyset$;

л) $A \cup \emptyset = A$;

м) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

1.15. Доказать следующие тождества:

а) $A \cup (A \cap B) = A$;

б) $A \cap (A \cup B) = A$;

в) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
г) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C})$;
д) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$;
е) $A \cap B = A \cap (\overline{A} \cup B)$;
ж) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$;
з) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
и) $(A \setminus B) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
к) $(\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
л) $(A \setminus \overline{B}) \cup (\overline{A} \setminus B) = (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B})$;
м) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
н) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;
о) $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$;
п) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
р) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
с) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$;
т) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
у) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

1.16. Найти множество X, удовлетворяющие следующим условиям:

а) $A \setminus X = A$ и $A \cup X = U$;
б) $A \setminus X = \emptyset$ и $A \cup X = A$.

1.17. Доказать, что:

а) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ и $B \subseteq C$;
б) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;
в) $(A \cup B) \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
г) $A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \emptyset$;
д) $A \subseteq B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$.

1.18. *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество $A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Доказать тождества:

а) $A \dot{-} B = B \dot{-} A$;
б) $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$;
в) $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$;

г) $A\dot{-}(A\dot{-}B) = B$;
д) $A\dot{-}\emptyset = A$;
е) $A\dot{-}A = \emptyset$.

1.19. Упростить выражения:
а) $\overline{A \setminus B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$;
б) $((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{B} \cap C)) \cap ((\overline{A} \cap B) \cup B)$;
в) $\overline{\overline{A \setminus B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}$;
г) $(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C)) \cup (C \cup D)$.

§ 2. Бинарные отношения

Пусть A и B – произвольные множества. Пару $\langle a, b\rangle$ элементов $a \in A$, $b \in B$, взятых в данном порядке, будем называть *упорядоченной парой*. Упорядоченные пары $\langle a, b\rangle$ и $\langle c, d\rangle$ будем считать *равными* и записывать $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ тогда и только тогда, когда $a = c,\ b = d$.

Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар $\langle a, b\rangle$:

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Прямым (декартовым) произведением n множеств $A_1, \ldots, A_n$ называется множество всех упорядоченных n-ок $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Если $A_1 = \ldots = A_n = A$, то множество $A_1 \times \ldots \times A_n$ называется *прямой n-й степенью множества* A и обозначается через A^n.

Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество R множества $A \times B$. Если $A = B$, то отношение называется *бинарным отношением на A*.

Если R – бинарное отношение и $\langle a, b\rangle \in R$, то говорят, что a и b *связаны отношением* R, или что *элемент a находится в отношении* R к b, или что для a и b *выполняется отношение* R. Вместо записи $\langle a, b\rangle \in R$ часто используют более простую aRb (например, $a < b,\ a = b,\ a \perp b$).

Бинарное отношение R на множестве A называется *рефлексивным*, если aRa для любого $a \in A$.

Примерами рефлексивных отношений могут служить отношение параллельности на множестве прямых плоскости, отношение равенства на каком-либо множестве чисел, отношение делимости на множестве целых чисел.

Бинарное отношение R на множестве A называется *антирефлексивным (иррефлексивным)*, если для любого $a \in A$ условие aRa не выполняется.

Примерами антирефлексивных отношений могут служить отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости, отношение неравенства ($\neq$) на каком-либо множестве чисел.

Бинарное отношение R на множестве A называется *симметричным*, если для любых a, $b \in A$ из условия aRb следует bRa.

Примерами симметричных отношений могут служить отношение параллельности на множестве прямых плоскости, отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости, отношение равенства на каком-либо множестве чисел.

Бинарное отношение R на множестве A называется *антисимметричным*, если для любых a, $b \in A$ из условий aRb, bRa следует $a = b$.

Примерами антисимметричных отношений могут служить отношение $\leq$ на множестве действительных чисел, отношение включения $\subseteq$ на какой-либо совокупности множеств, отношение делимости на множестве натуральных чисел.

Бинарное отношение R на множестве A называется *транзитивным*, если для любых a, b, $c \in A$ из условий aRb, bRc следует aRc.

Примерами транзитивных отношений могут служить отношение отношение параллельности на множестве прямых плоскости, отношение равенства на каком-либо множестве чисел, отношение делимости на множестве целых чисел.

Бинарное отношение R на множестве A называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно на A. При этом элементы, находящиеся в отношении R, называют *эквивалентными.*

Примерами отношений эквивалентности являются отношение параллельности на множестве прямых плоскости, отношение равенства на каком-либо множестве чисел, отношение подобия на множестве треугольников плоскости.

Если R отношение эквивалентности на множестве A и a произвольный элемент из A, то подмножество

$$[a]_R = \{x \in A \mid xRa\}$$

всех элементов, эквивалентных данному элементу a, называется *классом эквивалентности, порожденном элементом* a.

Совокупность всех классов эквивалентности множества A по отношению R называется *фактормножеством* A *по* R и обозначается через A/R.

Основные свойства классов эквивалентности. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A. Тогда

1) $a \in [a]_R$;
2) $aRb \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$.

Из свойства 1) вытекает, что каждый элемент множества A принадлежит некоторому классу эквивалентности, а из свойства 2) – что два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

Бинарное отношение R на множестве A называется *отношением частичного порядка* (или *отношением нестрого порядка*), если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Множество с заданным на нем отношением частичного порядка называют *частично упорядоченным.*

Примерами частичного порядка могут служить отношение включения $\subseteq$ на какой-либо совокупности множеств, отношение $\leq$ на множестве действительных чисел, отношение делимости на множестве натуральных чисел.

Отношение частичного порядка R на множестве A называется *отношением линейного порядка*, если для любых двух различных элементов a и b множества A либо aRb, либо bRa. Множество с заданным на нем отношением линейного порядка называют *линейно упорядоченным*.

Примерами линейного порядка являются отношения «меньше» $<$ и «меньше или равно» $\leq$ на множестве действительных чисел.

Примеры решения задач

Задача 1. Доказать, что операция прямого произведения множеств некоммутативна, т.е.

$$A \times B \neq B \times A.$$

Доказательство. Пусть $A = \{a,\, b,\, c\}$, $B = \{a',\, b'\}$. Тогда

$$A \times B = \{\langle a,\, a'\rangle,\, \langle a,\, b'\rangle, \langle b,\, a'\rangle, \langle b,\, b'\rangle, \langle c,\, a'\rangle, \langle c,\, b'\rangle\},$$

но

$$B \times A = \{\langle a',\, a\rangle,\, \langle a',\, b\rangle, \langle a',\, c\rangle, \langle b',\, a\rangle, \langle b',\, b\rangle, \langle b',\, c\rangle\}.$$

Видим, что $A \times B \neq B \times A$.

Равенство $A \times B = B \times A$ возможно тогда и только тогда, когда множества A и B совпадают. $\square$

Задача 2. Изобразить на плоскости с декартовой системой координат следующие множества:

а) $[a,\, b]\times[c,\, d]$, где $[a,\, b]$ и $[c,\, d]$ – отрезки действительной прямой;

б) $[a,\, b]^2$.

Решение. По определению

$$[a,\, b] \times [c,\, d] = \{\langle x,\, y\rangle \mid x \in [a,\, b],\ y \in [c,\, d]\}.$$

Каждой паре $\langle x,\, y\rangle$ можно сопоставить точку координатной плоскости, абсцисса которой равна x, а ордината – y. Если $x \in [a,\, b]$, а $y \in [c,\, d]$, то прямому произведению $[a,\, b] \times [c,\, d]$ будет соответствовать множество точек плоскости с координатами из множеств $[a,\, b]$ и $[c,\, d]$. В случае а) это прямоугольник (рис. 2), в случае б) – квадрат. $\square$

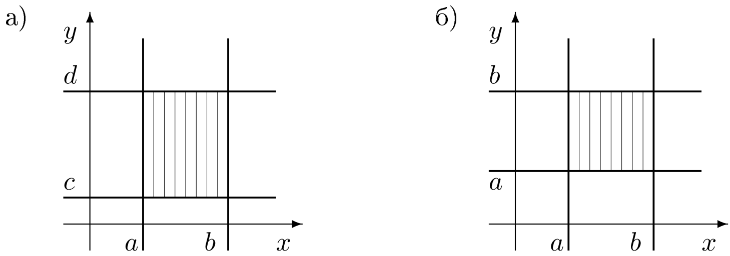

Рис. 2

Задача 3. Доказать, что

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D).$$

При каких A, B, C, D получается равенство?

Доказательство. Пусть $x \in (A \times B) \cup (C \times D)$. Тогда $x = \langle y, z\rangle$ и $y \in A$, $z \in B$ или $y \in C$, $z \in D$. Отсюда следует, что $y \in A \cup C$, $z \in B \cup D$ и $x = \langle y, z\rangle \in (A \cup C) \times (B \cup D)$. Таким образом, мы доказали включение $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Равенство $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ возможно тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из четырех условий: 1) $A = C$; 2) $B = D$; 3) $A \subseteq C$ и $B \subseteq \subseteq D$; 4) $D \subseteq B$ и $C \subseteq A$. Если ни одно из этих условий не выполняется, то можно найти: а) либо упорядоченную пару $\langle y, z\rangle$, такую, что $y \in A \setminus C$, $z \in D \setminus B$; б) либо упорядоченную пару $\langle y', z'\rangle$, такую, что $y' \in C \setminus A$, $z' \in B \setminus D$. В обоих случаях такая пара принадлежит множеству $(A \cup C) \times (B \cup D)$, но не принадлежит множеству $(A \times B) \cup (C \times D)$. $\square$

Задача 4. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ задано бинарное отношение R: $aRb \Leftrightarrow a \leq b + 1$. Выяснить, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) оно обладает.

Решение. Отношение R будет являться рефлексивным, так как $a \leq a + 1$ для любого $a \in \mathbb{Z}$. Если $a \leq b + 1$, то не всегда $b \leq a + 1$, например, $2 \leq 5 + 1$, но неверно, что $5 \leq \leq 2 + 1$, следовательно, R не симметрично. Отношение R было бы антисимметричным, если из условий $a \leq b + 1$ и $b \leq a+1$ следовало бы $a = b$, но в нашем случае мы получаем $a - 1 \leq b \leq a + 1$. И, наконец, R не является транзитивным: если $a \leq b + 1$ и $b \leq c + 1$, то $a \leq c + 2$ (вместо $a \leq c + 1$). $\square$

Задача 5. Является ли бинарное отношение R, заданное на множестве $M = \{1, 2, 3\}$, отношением эквивалентности, если:

а) $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$;
б) $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$?

Решение. Если R это отношение эквивалентности, то оно, по определению, должно быть рефлексивным, симметричным и транзитивным. Отношение R в случае а) является рефлексивным, так как $\langle 1, 1\rangle$, $\langle 2, 2\rangle$ и $\langle 3, 3\rangle$ принадлежат R. Для каждой пары в R существует симметричная ей пара, например, для пары $\langle 1, 2\rangle$ симметричной будет являться пара

$\langle 2,\, 1\rangle \in R$. Кроме того, R транзитивное отношение, поскольку из условий $\langle a,\, b\rangle \in R$ и $\langle b,\, c\rangle \in R$, всегда следует, что и $\langle a,\, c\rangle \in R$; например, для пар $\langle 2,\, 1\rangle \in R$ и $\langle 1,\, 2\rangle \in R$ пара $\langle 2,\, 2\rangle$ также принадлежит R. Таким образом, можем сделать вывод, что в случае а) R – отношение эквивалентности.

В случае б) отношение R не будет являться отношением эквивалентности, так как оно не рефлексивно: $\langle 3,\, 3\rangle \notin R$ и не симметрично: для пары $\langle 1,\, 2\rangle \in R$ симметричная ей пара $\langle 2,\, 1\rangle$ не принадлежит R. Однако, это отношение будет являться транзитивным. $\square$

Задача 6. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Определим на множестве $\mathbb{Z}$ бинарное отношение $\equiv$ следующим образом: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b$ делится на m (читается: a сравнимо с b по модулю m). Доказать, что такое отношение является отношением эквивалентности. Описать классы эквивалентности.

Доказательство. Действительно, $a - a = 0$ делится на любое натуральное m, т.е. $a \equiv a \pmod{m}$ (рефлексивность). Если $a - b \,\vdots\, m$, то и $b - a \,\vdots\, m$, т.е. из условия $a \equiv b \pmod{m}$ следует, что $b \equiv a \pmod{m}$ (симметричность). Если $a - b \,\vdots\, m$ и $b - c \,\vdots\, m$, то $a - c = (a - b) + (b - c) \,\vdots\, m$, т.е. из условия $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$ следует, что $a \equiv c \pmod{m}$ (транзитивность).

Можно заметить, что целые числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда при делении на m они имеют одинаковые остатки. Так как отношение сравнимости целых чисел по модулю m является отношением эквивалентности на $\mathbb{Z}$, то все множество $\mathbb{Z}$ разбивается на непересекающиеся классы (множества) чисел, сравнимых по модулю m, т.е. дающих одинаковые остатки при делении на m. Класс всех целых чисел, имеющих при делении на m остаток r, на-