

Содержание

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Предисловие | 9 |
| Введение | 13 |
| Часть I. АЛГЕБРА ЛОГИКИ И ПРЕДИКАТЫ | 27 |
| Глава 1. Алгебра логики | 28 |
| 1.1. Функции алгебры логики | 28 |
| 1.2. Формулы. Реализация функций формулами | 29 |
| 1.3. Равносильные преобразования формул | 31 |
| 1.4. Нормальные формы. Совершенные нормальные формы | 33 |
| Совершенные нормальные формы | 34 |
| 1.5. Минимизация нормальных форм | 36 |
| 1.5.1. Алгоритм Куайна построения сокращенной ДНФ | 38 |
| 1.5.2. Алгоритм построения сокращенной ДНФ с помощью КНФ | 39 |
| 1.5.3. Построение всех тупиковых ДНФ | 41 |
| 1.5.4. Алгоритм минимизации функций в классе ДНФ | 42 |
| 1.5.5. Алгоритм минимизации функций в классе КНФ | 43 |
| 1.5.6. Алгоритм минимизации функций в классе нормальных форм | 43 |
| 1.6. Минимизация частично определенных функций | 45 |
| 1.6.1. Алгоритм минимизации частично определенных функций в классе ДНФ | 46 |
| 1.6.2. Алгоритм минимизации частично определенных функций в классе КНФ | 46 |
| 1.7. Двойственные функции. Принцип двойственности | 49 |
| 1.8. Линейные функции | 50 |
| 1.9. Монотонные функции | 53 |
| 1.10. Теорема Поста о функциональной полноте | 55 |
| 1.11. Предполные классы | 58 |
| Глава 2. Функции k-значной логики | 60 |
| 2.1. Функции и отношения | 60 |
| 2.2. Самодвойственные функции | 63 |
| 2.3. Монотонные функции | 63 |
| 2.4. Линейные функции | 64 |
| 2.5. Функции, сохраняющие разбиение | 64 |
| 2.6. Классы типа \mathbb{C} | 64 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.7. Классы типа \mathbb{B} | 65 |
| 2.8. Сравнение функций двужначной и многозначной логик..... | 66 |
| Глава 3. Производные булевой функции в синтезе логических схем..... | 67 |
| 3.1. Производная булевой функции..... | 67 |
| 3.2. Синтез логических схем методом каскадов..... | 70 |
| 3.3. Разложение булевой функции в ряд..... | 77 |
| Глава 4. Синтез схем из функциональных элементов..... | 80 |
| 4.1. Схема из функциональных элементов | 80 |
| 4.2. Функции Шеннона | 82 |
| 4.3. Элементарные методы синтеза схем | 82 |
| 4.4. Синтез мультиплексоров | 84 |
| 4.5. Элементы функциональной декомпозиции | 86 |
| 4.6. Обнаружение неисправностей в схемах..... | 91 |
| Глава 5. Аксиоматическое исчисление высказываний..... | 94 |
| 5.1. Определение исчисления высказываний | 94 |
| 5.2. Теорема дедукции в исчислении высказываний | 98 |
| 5.3. Производные правила вывода | 100 |
| 5.4. Тавтологически истинные и доказуемые формулы..... | 105 |
| 5.5. Разрешимость, непротиворечивость, полнота, независимость аксиом..... | 108 |
| 5.6. Формулировка исчисления высказываний с единственным правилом вывода – правилом заключения..... | 111 |
| Глава 6. Логика предикатов..... | 113 |
| 6.1. Предикаты, кванторы..... | 113 |
| 6.2. Общезначимость, выполнимость, невыполнимость, опровержимость формул логики предикатов..... | 115 |
| 6.3. Равносильность формул | 119 |
| 6.4. Нормальные формы..... | 121 |
| 6.4.1. Префиксная нормальная форма | 121 |
| 6.4.2. Стандартная форма Сколема..... | 122 |
| 6.5. Проблема разрешимости в логике предикатов..... | 125 |
| 6.5.1. Проблема разрешимости \exists -формул..... | 126 |
| 6.5.2. Проблема разрешимости \forall -формул..... | 127 |
| 6.5.3. Проблема разрешимости монадической логики | 128 |
| 6.6. Отношения | 130 |
| 6.7. Суперпозиция функций..... | 132 |
| 6.8. Операции Мальцева над функциями..... | 133 |
| 6.9. Алгебра отношений (реляционная алгебра)..... | 133 |
| 6.10. Алгебра отношений k -значной логики..... | 135 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Глава 7. Аксиоматическое исчисление предикатов | 136 |
| 7.1. Определение исчисления предикатов | 136 |
| 7.2. Теорема дедукции в исчислении предикатов | 138 |
| 7.3. Непротиворечивость исчисления предикатов | 141 |
| 7.4. Семантическая полнота исчисления предикатов относительно класса общезначимых формул | 142 |
| 7.4.1. Непротиворечивые расширения исчисления предикатов | 143 |
| 7.4.2. Формализмы G и G_k | 145 |
| Глава 8. Исчисление секвенций | 151 |
| 8.1. О правилах вывода в секвенциальном исчислении высказываний | 151 |
| 8.2. Секвенциальное исчисление высказываний | 155 |
| 8.3. Секвенциальное исчисление предикатов | 158 |
| Глава 9. Метод резолюций в логике предикатов и Пролог | 161 |
| 9.1. Метод резолюций в логике высказываний | 161 |
| 9.1.1. Семантическое дерево | 162 |
| 9.1.2. Правило резолюции | 164 |
| 9.2. Эрбрановы универсум, базис, интерпретация | 167 |
| 9.3. Семантические деревья. Теорема Эрбрана | 170 |
| 9.4. Унификация | 174 |
| 9.5. Метод резолюций в логике предикатов | 177 |
| 9.6. Основы Пролога | 182 |
| 9.6.1. Унификация в Прологе | 189 |
| 9.6.2. Декларативный и операторный смысл Пролог-программы | 191 |
| 9.6.3. Бэктрекинг и оператор отсечения | 193 |
| 9.6.4. Объявление операторов | 194 |
| 9.7. Примеры программ и вычислений в Прологе | 196 |
| 9.7.1. Принадлежность элемента списку | 196 |
| 9.7.2. Первый элемент в списке | 199 |
| 9.7.3. Последний элемент в списке | 200 |
| 9.7.4. Следующий элемент в списке | 201 |
| 9.7.5. Соединение списков | 204 |
| 9.7.6. Обращение списка | 205 |
| 9.7.7. Выравнивание списка | 206 |
| 9.7.8. Добавление элемента в начало списка | 206 |
| 9.7.9. Удаление первого вхождения данного элемента из списка | 207 |
| 9.7.10. Удаление всех вхождений данного элемента из списка | 207 |
| 9.7.11. Замена элемента в списке | 210 |
| 9.7.12. Быть подсписком в списке | 210 |
| 9.7.13. Включение множеств | 212 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 9.7.14. Равенство множеств | 213 |
| 9.7.15. Объединение множеств | 213 |
| 9.7.16. Пересечение множеств | 215 |
| 9.7.17. Разность множеств..... | 215 |
| 9.7.18. Декартово произведение множеств..... | 215 |
| 9.7.19. Множество всех подмножеств данного множества | 216 |
| 9.7.20. Удаление всех повторов элементов в списке..... | 216 |
| 9.7.21. Принадлежность множества списку подмножеств..... | 216 |
| 9.7.22. Удаление всех повторов подмножеств в данном списке множеств..... | 216 |
| 9.7.23. Удаление повторов атомов в списке списков атомов..... | 217 |
| 9.7.24. Последовательное порождение нумерованных атомов..... | 217 |
| 9.7.25. Программа построения сокращенной ДНФ по конъюнктивной нормальной форме | 217 |
| 9.7.26. Программа построения сокращенной ДНФ по конъюнктивной нормальной форме без отрицаний..... | 219 |
| 9.8. Некоторые встроенные предикаты Пролога | 220 |
| 9.8.1. Средства управления..... | 220 |
| 9.8.2. Классификация термов | 221 |
| 9.8.3. Унификация термов | 221 |
| 9.8.4. Сравнение термов..... | 221 |
| 9.8.5. Арифметические функции | 222 |
| 9.8.6. Арифметические предикаты | 222 |
| 9.8.7. Обработка термов..... | 223 |
| 9.8.8. Работа со строками..... | 223 |
| 9.8.9. Составление списков | 223 |
| 9.8.10. Взаимодействие с базой данных | 224 |
| 9.8.11. Стандартные ввод и вывод | 225 |
| 9.8.12. Доступ к файлам..... | 226 |
| 9.8.13. Стандартный доступ к файлам в Прологе..... | 226 |
| 9.8.14. Движение в файле..... | 227 |
| 9.8.15. Исполнение системных функций | 227 |
| 9.8.16. Отладчик (Debugger)..... | 227 |
| Часть II. МОНАДИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ | 230 |
| Глава 10. Конечные автоматы | 231 |
| 10.1. Автоматы Мили и Мура | 231 |
| 10.2. Источники | 235 |
| 10.3. Регулярные языки и регулярные выражения..... | 240 |
| 10.3.1. Операции Клини и регулярные языки | 240 |
| 10.3.2. Алгебра регулярных выражений Клини | 242 |
| 10.4. Теоремы замкнутости для класса автоматов представимых языков | 243 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 10.5. Минимизация числа состояний автомата с выходом | 248 |
| 10.5.1. Склеивание неразличимых состояний..... | 250 |
| 10.5.2. Алгоритм минимизации автомата..... | 250 |
| 10.5.3. Алгоритм разбиения множества состояний на классы неотличимых состояний | 254 |
| 10.5.4. Алгоритм проверки эквивалентности автоматов | 255 |
| Глава 11. Автоматы и сверхъязыки | 257 |
| 11.1. Макроавтоматы..... | 257 |
| 11.2. Конкатенация языка и сверхъязыка | 259 |
| 11.3. Сверхитерация автоматных языков..... | 261 |
| 11.4. Детерминизация макроисточника | 264 |
| Глава 12. Проблема униформизации | 267 |
| 12.1. Языки и операторы | 267 |
| 12.2. Игры..... | 270 |
| 12.3. Стратегии | 273 |
| 12.4. Униформизация конечноавтоматных языков | 276 |
| 12.4.1. Порядковые векторы и порядковые стратегии | 276 |
| 12.4.2. Теоремы о порядковых стратегиях..... | 278 |
| 12.4.3. Пример построения выигрывающего автомата | 282 |
| Глава 13. Монадическая логика натуральных чисел | 285 |
| 13.1. Монадическая логика | 285 |
| 13.2. Выразимость в монадической логике | 287 |
| 13.2.1. Макроисточники и монадическая логика | 289 |
| 13.2.2. Регулярные языки и монадическая логика | 289 |
| 13.2.3. Общерегулярные языки и монадическая логика | 290 |
| 13.3. Специальная префиксная форма | 290 |
| 13.4. Синтез автомата по формуле монадической логики..... | 292 |
| 13.5. Алгоритмическая разрешимость монадической логики..... | 294 |
| Глава 14. Темпоральная логика..... | 296 |
| 14.1. Пропозициональная темпоральная логика..... | 296 |
| 14.2. Интерпретация формул..... | 297 |
| 14.3. Общезначимость, выполнимость, опровержимость, невыполнимость | 299 |
| 14.4. Другие темпоральные операторы..... | 302 |
| 14.5. Аксиоматическая система | 304 |
| 14.6. Спецификация свойств формулами..... | 305 |
| 14.7. Спецификация взаимодействия и параллелизма..... | 306 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Глава 15. Аксиоматический язык программирования OBJ3 | 310 |
| 15.1. Описание языка..... | 310 |
| 15.2. Спецификация объекта..... | 311 |
| 15.3. Сорта и подсорта..... | 312 |
| 15.4. Импорт модулей..... | 312 |
| 15.5. Встроенные сорта..... | 314 |
| 15.6. Декларация атрибутов..... | 314 |
| 15.7. Приоритет..... | 315 |
| 15.8. Параметризованное программирование..... | 315 |
| 15.9. Теории..... | 316 |
| 15.9.1. Программная спецификация FIELD алгебраического поля..... | 316 |
| 15.9.2. Программная спецификация PROPC пропозиционального исчисления..... | 317 |
| 15.9.3. Программная спецификация SET-NAT множества натуральных чисел..... | 318 |
| 15.9.4. Программная спецификация obj WORDTREE дерева слов..... | 319 |
| 15.9.5. Программная спецификация WORDSTACK словарого стека..... | 320 |
| 15.9.6. View..... | 321 |
| 15.9.7. Инстанциация..... | 321 |
| 15.9.8. Параметризованная теория линейного векторного пространства..... | 321 |
| 15.9.9. Параметризованный модуль obj ORD-PAIR пар вида (натуральное число, слово)..... | 322 |
| 15.9.10. Параметризованный модуль SEQUENCE[X :: ELEMS] списков натуральных чисел и списков слов..... | 323 |
| Приложение 1. Логика высказываний и предикатов. Пролог | 325 |
| Приложение 2. Конечные автоматы | 357 |
| Приложение 3. Анализ конечных автоматов | 364 |
| Приложение 4. Синтез конечных автоматов | 380 |
| Литература | 383 |
| Обозначения | 386 |

Предисловие

Философская логика есть наука о законах и формах отражения в мышлении развития объективного мира, о закономерностях познания истины.

Основная задача философской логики есть формулировка законов и принципов, соблюдение которых является необходимым условием получения истинных умозаключений.

Формальная логика есть наука, изучающая формы мысли (понятия, суждения, умозаключения, доказательства) со стороны их логической структуры, то есть отвлекаясь от конкретного содержания мыслей и вычлняя лишь общий способ связи частей этого содержания.

Начало формальной логики положил Аристотель.

Математическая логика есть область знания, в которой формальная логика изучается математическими методами.

Основные задачи математической логики есть: 1) построение формально-логических (аксиоматических) исчислений; 2) изучение связи логических исчислений с теми содержательными областями знаний, которые служат их интерпретациями и моделями.

Одно из крупнейших достижений математики первой половины XX века – оформление математической логики и теории алгоритмов в самостоятельные дисциплины. Три крупных результата определили характер всех последующих исследований этого направления: теорема Геделя о полноте аксиоматического исчисления предикатов относительно всех тождественно истинных формул такого исчисления (полнота относительно интерпретации); существование алгоритмически неразрешимых проблем, в частности теорема Черча об алгоритмической неразрешимости исчисления предикатов; теорема Геделя о неполноте аксиоматической арифметики относительно множества ее истинных формул.

Уже в древности предпринимались попытки строго изложить математические факты, которые стремились вывести из немногочисленных исходных посылок – аксиом. Замечательным примером такого подхода к изложению математических сведений были «Начала» древнегреческого математика Евклида, в особенности его геометрия. Изучались и законы правильного вывода следствий из исходных посылок (логика Аристотеля).

Первые попытки создать строгие математические теории восходят к работам Буля, Фреге, Пеано, других математиков. Исследователи руководствовались целью заложить такие основания математики, выделить такие аксиомы и правила вывода, с помощью которых можно было бы формально доказать любое содержательно истинное математическое утверждение. Подобные утверждения можно было бы доказывать автоматически. Эта связываемая с именем Гильберта программа в полной мере не удалась: австрийский мате-

матик Курт Гедель показал, что всякая достаточно богатая формальная система (например, аксиоматическая арифметика) не полна, т. е. в ней найдутся содержательно истинные утверждения, недоказуемые в системе. Пессимист угрюмо заметил бы: «Я же говорил вам, что из этой затеи Гильберта ничего хорошего не выйдет. Пойду наколю себе дров. Хотя я хорошо знаю заранее, что из этой моей затеи тоже ничего не выйдет». Оптимист скажет другое: «Мы надеялись на чудо. Его не произошло. Всевышний не дает нам того, чего мы очень хотим. Зато мы узнали много интересного, нам открылись огромные просторы для деятельности. О, сколько задач у нас впереди! За дело, коллеги!»

Аксиоматическая арифметика не полна. Тем не менее интерес к математической логике не убывает, исследования формально-логических систем продолжают. Успешно описываются довольно большие фрагменты математических дисциплин. Использование алгебраического языка при проектировании узлов компьютера общеизвестно. В последнее время аппарат математической логики стал широко применяться в современных системах представления знаний.

Самое удивительное применение математической логики нашла в вычислительной математике: формализм логического вывода в логике предикатов первого порядка был взят за основу при построении универсального языка программирования Пролог (акроним от PROgramming in LOGic). С появлением Пролог-подобных языков программирования математическая логика, которая совсем недавно была логикой сугубо теоретической, стала логикой вычисляющей. Классическая гильбертова логика доказательств истинных формул логики предикатов первого порядка для этой практической цели оказалась неподходящей. В 1965 г. Дж. А. Робинсон в качестве формализма, удобного для исполнения на компьютере, предложил использовать разработанный им метод резолюций. Замечательное открытие Робинсона оказалось необычайно плодотворным и уже в 70-х годах привело к построению универсального языка программирования Пролог и трансляторов для него. Это списковый язык для теоретико-множественных вычислений. Иногда его называют языком искусственного интеллекта. Задуманный как универсальный язык программирования для перевода с одного естественного языка на другой, Пролог оказался удобным инструментом при построении вычислительных моделей, возникающих при решении задач на графах, проектировании конечных автоматов, построении баз данных, баз знаний, экспертных систем, в задачах лингвистики при работе с естественными и искусственными языками (причем в числе последних могут выступать и языки программирования), в символьных преобразованиях, теории игр, системах представления знаний и т. д.

Несколько необычным в Прологе может показаться отсутствие привычного в традиционных языках программирования оператора присваивания. Вместо него в Прологе реализован более общий алгоритм унификации, построенный на основе операции сравнения с образцом. Необычен в Прологе также и отсутствующий в традиционных языках бэктрекинг, позволяющий обходить де-

рево вывода и собирать все возможные решения задачи. Реализация рекурсии в Прологе практически не отличается от общепринятой. В остальном Пролог довольно удобен, особенно в задачах, где основными обрабатываемыми объектами являются символ и список символов (множество).

Существует несколько версий трансляторов с Пролога: MicroProlog, DEC-System/Prolog, C-Prolog, IC-Prolog, M-Prolog, Sigma-Prolog, Chalcedony-Prolog, FF-Prolog, UNSW/Prolog, Prolog-6, Prolog-1 и Prolog-2 фирмы Expert Systems International, Quintus-Prolog, Turbo-Prolog, Arity-Prolog, SWI-Prolog, Visual-Prolog и другие. При написании программ мы ориентировались на версию языка SWI-Prolog (<http://www.swi-prolog.org/>).

Другое интересное направление применения математической логики есть разработка языков формальных спецификаций преобразований в алгебраических объектах и в анализе работы компьютерных программ.

Современный арсенал языков и инструментов, использующихся в данной области, известен как формальные методы разработки программ. Классическими методами и нотациями здесь являются VDM и Z. Если говорить о формальных моделях, то наиболее популярными являются Alloy, B и TLA. Среди средств моделирования и анализа программ на обычных языках программирования лидерами являются Isabelle (<http://isabelle.in.tum.de/>) и Frama-C (<http://frama-c.com/jessie.html>).

Для спецификаций преобразований в аксиоматически заданных алгебраических объектах, таких как полугруппы, группы, кольца, поля, линейные пространства и т. д., разработан функциональный язык программирования OBJ3. Сравнимая, например, OBJ3-программу для вычислений в полях, можно увидеть, что OBJ3-программа есть запись аксиом поля в терминах языка OBJ3. Вычисление преобразований в поле осуществляется в соответствии с аксиомами поля. OBJ3-программа моделирует эти преобразования. Иногда OBJ3 называют аксиоматическим языком программирования. Аксиоматический подход в языках программирования значительно облегчает задачу верификации программ. Предложенные в аксиоматических языках программирования подходы могут использоваться при создании других языков. Например, развитая в OBJ3 модульная система программ внедрена в языках программирования Ada, ML, C++, LOTOS (Language Of Temporal Ordering Specification). Параметризация из OBJ3 имплементирована в C#. Для решения аналогичных задач алгебраических спецификаций можно использовать родственный к OBJ3 язык программирования SafeOBJ из семейства OBJ (<https://cafeobj.org/>).

Книга написана по материалам лекций авторов по дисциплинам «Дискретная математика» и «Математическая логика и теория алгоритмов», читаемых на факультете бизнес-информатики, на факультете компьютерных наук Национального исследовательского университета Высшая школа экономики и на факультете автоматизации и вычислительной техники Национального исследовательского университета Московский энергетический институт. Эти курсы (или им аналогичные) начинали в МЭИ Д. А. Поспелов, В. Н. Вагин, В. П. Кутепов,

А. А. Болотов, А. Б. Фролов, Е. А. Щегольков, повлиявшие на выбор и характер излагаемого авторами материала.

Настоящая книга является второй в серии задуманных авторским коллективом книг по дискретной математике. Она предназначена студентам бакалавриата, изучающим академический курс «Дискретная математика».

В предлагаемой книге авторы сосредоточились на изложении основ математической логики и связанных с ней формальных языков, представимых конечными автоматами.

Основные теоретические и практические положения, изложение и анализ практических алгоритмов, иллюстрируемых большим числом примеров, позволят сформировать прочную теоретическую базу, необходимую для дальнейшей работы практикующих программистов и ИТ-специалистов.

В приложении предлагаются задачи, которые могут быть использованы как для проведения практических занятий, так и для самостоятельной работы.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам Калягину В. А., Петренко А. К. и научному редактору книги Захарову В. А. за замечания, позволяющие существенно улучшить качество книги. Мы также благодарны преподавателям департамента программной инженерии НИУ ВШЭ Ахметсафиной Р. З., Бересневой Е. Н., Горденко М. К., Гринкругу Е. М., Дворянскому Л. В., Дегтяреву К. Ю., Каленковой А. А., Ломазовой И. А., Подбельскому В. В., Шилову В. В., а также Амосову А. А., Вагину В. Н., Дубинскому Ю. А., Куликовой Н. Л., Фролову А. Б. из НИУ МЭИ за стимулирующие беседы. Авторы благодарят студентов Сапожкова Е. Д., Тимофееву Е. Э., Чичилеву Н. И. за активное участие в составлении и апробации задач и упражнений приложения. Авторы благодарны также корректору Синяевой Г. И. за внимательное прочтение рукописи и устранение ошибок.

Введение

1. Множество

Понятие множества неопределимо. Это простейшее исходное понятие человечество сформировало из опыта всего своего исторического развития. То же можно сказать о смысле простейшего отношения принадлежности: элемент a принадлежит множеству A (обозначение $a \in A$) – и о смысле отношения тождества (совпадения, равенства) двух элементов a и b из некоторого множества (обозначение $a = b$). Другими словами, предполагается, что читатель умеет распознавать совпадение или несовпадение двух элементов и устанавливать факт принадлежности или непринадлежности элемента множеству.

Пусть U есть некоторое множество. A есть подмножество множества U , если всякий элемент из множества A принадлежит множеству U . Множество U универсально (универсум), если все рассматриваемые множества есть подмножества множества U .

Пусть A, B, C есть произвольные подмножества множества U ; a, b, c есть элементы множества U . Обозначим символом \emptyset пустое множество, то есть множество без элементов.

Основными неопределяемыми отношениями в теории множеств являются следующие отношения:

- $a = b$, элементы a и b равны (совпадают);
- $a \in A$, элемент a принадлежит множеству A .

Пусть знак \leftrightarrow означает «если и только если»; а знаки $\&$, \vee , \neg , \rightarrow , \forall , \exists есть логические знаки конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, импликации, квантора общности и квантора существования. Используем их в общепринятом содержательном смысле. Знак $\exists!$ означает квантор существования единственного элемента.

Обозначим через $a \notin A$ отношение «элемент a не принадлежит множеству A » и через $a \neq b$ отношение «элементы a и b не равны (не совпадают)».

Введем далее следующие отношения.

- $A \subseteq B \leftrightarrow \forall a (a \in A \rightarrow a \in B)$, отношение включения множеств, при этом множество A называется подмножеством множества B , а множество B называется надмножеством множества A ;
- $A \supseteq B \leftrightarrow B \subseteq A$;
- $A = B \leftrightarrow A \subseteq B \& A \supseteq B$, отношение равенства множеств;
- $A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \& A \neq B$, отношение строгого включения множеств;
- $A \supset B \leftrightarrow B \subset A$.

Обозначим через $P(A)$ (или 2^A) множество всех подмножеств множества A . Введем следующие операции над множествами.

- $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$, объединение множеств A и B ;
- $A \cap B = \{x \in U : x \in A \ \& \ x \in B\}$, пересечение множеств A и B ;
- $A - B = \{x \in U : x \in A \ \& \ x \notin B\}$, разность множеств A и B ;
- $\bar{A} = U - A$, дополнение ко множеству A ;
- $A \div B = (A \cup B) - (A \cap B)$, симметрическая разность множеств A и B ;
- $A \times B = \{(a, b) : a \in A \ \& \ b \in B\}$, декартово произведение множеств A и B .

Под натуральным числом понимаем количество элементов конечного множества. Количество элементов пустого множества есть 0.

Распространим декартово произведение на несколько сомножителей:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Определим декартову степень множества:

$$A^n = A \times A \times \dots \times A \text{ (} n \text{ раз)}, A^0 = \emptyset.$$

Множества \emptyset и A называются несобственными (тривиальными) подмножествами множества A . Если $A \subset B$ & $A \neq \emptyset$, то A есть собственное подмножество множества B .

Иногда пишут $A \cdot B$ или AB вместо $A \cap B$.

Примем следующие обозначения.

Множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Множество положительных натуральных чисел $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$.

Множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Множество $\mathbb{Z}_n = E_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$.

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$.

Множество вещественных чисел $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Множество неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Множество комплексных чисел $\mathbb{C} = \{x + i y : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, здесь $i^2 = -1$.

2. Функция

Определение. Пусть A и B есть два множества. *Функция* $f: A \rightarrow B$ есть отображение, которое каждому элементу x из A ставит в соответствие некоторый элемент y из B . Это обстоятельство записывается как $y = f(x)$.

Замечание. В этом определении функция f всюду определена. Частично определенная функция $f: A \rightarrow B$ есть отображение, которое каждому элементу из множества A сопоставляет не более одного элемента из множества B . Всяду определенная функция является частным случаем частично определенной функции.

Если $f(a) = b$, то элемент b есть образ элемента a , элемент a есть прообраз элемента b . Область определения функции f есть множество $D(f) = \{a \in A : \exists b \in B (f(a) = b)\}$. Область значений функции f есть множество $R(f) = \{b \in B : \exists a \in A (f(a) = b)\}$.

Иногда множество $R(f)$ обозначают как $Im(f)$ или $f(A)$. Полный прообраз элемента $b \in B$ есть множество $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$. Полный прообраз множества $C \subseteq B$ есть множество $f^{-1}(C) = \{a \in A : f(a) \in C\}$.

Сужение функции f , заданной на множестве A , на подмножество S множества A есть функция g – такая, что $\leftrightarrow a \in S (g(a) = f(a))$.

Расширение функции f , заданной на множестве A , на надмножество T множества A есть функция h – такая, что $\leftrightarrow a \in A (h(a) = f(a))$.

Функцию с конечной областью определения удобно задавать таблицей. Например, пусть множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, функция $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Здесь $f(1) = 3, f(2)$ не определено, $f(3) = 1, f(4) = 2$. Порядок столбцов несуществен.

Область определения $D(f) = \{1, 3, 4\}$, область значений $R(f) = Im(f) = f(A) = \{1, 2, 3\}$.

Определение. Функция $\varphi: A \rightarrow B$ есть *взаимно-однозначное отображение* (1-1-отображение) между множествами A и B , если

- 1) $\forall b \in B \exists a \in A (f(a) = b)$,
- 2) $\forall a \in A \forall b \in A (a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b))$.

Замечание. Последнее условие можно заменить на условие

- 2') $\forall a \in A \forall b \in A (f(a) = f(b) \rightarrow a = b)$.

Функции $f: A \rightarrow B$ и $g: C \rightarrow D$ равны, если $A = C, B = D, \forall x \in A (f(x) = g(x))$.

Функция $I_A: A \rightarrow A$, для которой $\forall x \in A (I(x) = x)$, называется *тождественной* функцией.

Функция $f: A \rightarrow B$ есть *отображение в* (*инъективная функция*, или *инъекция*), если $\forall a \in A \forall b \in A$ условие $a \neq b$ влечет $f(a) \neq f(b)$.

Инъективная функция различные элементы из области определения переводит в различные элементы из области значений.

Функция $f: A \rightarrow B$ есть *отображение на* (*сюръективная функция*, или *сюръекция*), если область значений B совпадает с образом $f(A)$, то есть если $f(A) = B$.

Функция $f: A \rightarrow B$ есть *взаимно-однозначная функция* (или *биекция*), если f является отображением в и отображением на, то есть является одновременно инъективной и сюръективной функцией: 1) $a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b)$, 2) $Im(f) = B$.

Определение. Композиция $g \circ f$ функций $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ есть функция $g \circ f: A \rightarrow C$, для которой $\forall x \in A ((g \circ f)(x) = g(f(x)))$.

Замечание. Символ композиции \circ иногда опускается.

Утверждение. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Доказательство. Пусть $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$. Тогда $((h \circ g) \circ f)(x) = (hg)f(x) = (h \circ g)f(x) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$.

Замечание. Для тождественной функции $f \circ I_A = I_B \circ f = f$.

Определение. Функция $f^{-1}: B \rightarrow A$ называется *обратной* к функции $f: A \rightarrow B$, если $f \circ f^{-1} = I_B$ и $f^{-1} \circ f = I_A$.

Замечание. 1. g обратна к $f \leftrightarrow f$ обратна к g .

2. Функция $f: A \rightarrow B$ имеет обратную функцию, \leftrightarrow функция f есть взаимно-однозначное отображение.

Утверждение. Если обратная функция для функции f существует, то она единственна.

Доказательство. Пусть функции f^{-1} и g обратны к функции $f: A \rightarrow B$. Тогда $f^{-1} \circ I_B = f^{-1} \circ (f \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ g = I_A \circ g = g$.

Следствие. Пусть для функций f и g существуют обратные функции f^{-1} и g^{-1} . Тогда справедливы утверждения:

1. $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Доказательство. 1. Так как f^{-1} обратна к f , то f обратна к f^{-1} , то есть $f = (f^{-1})^{-1}$.

2. $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ I_B \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = I_A$.

Аналогично $(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = I_B$. Тогда функция $g^{-1} \circ f^{-1}$ обратна к $f \circ g$, то есть $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Теорема. Функция $f: A \rightarrow B$ имеет обратную функцию тогда и только тогда, когда отображение f взаимно-однозначно.

Доказательство. Пусть функция f имеет обратную функцию f^{-1} . Покажем, что отображение f взаимно-однозначно, то есть что $a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b)$ и $B = \text{Im}(f)$. В самом деле, пусть $f(a) = f(b)$. Тогда $a = I_A(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(b)) = I_A(b) = b$, то есть $f(a) = f(b) \rightarrow a = b$, откуда $a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b)$.

Пусть $b \in B$. Тогда $b = I_B(b) = (f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b))$, то есть всякий b есть образ некоторого $a = f^{-1}(b) \in A$. Поэтому $B = \text{Im}(f)$.

Пусть теперь f есть взаимно-однозначное отображение. Покажем, что функция f имеет обратную функцию. В самом деле, так как $B = \text{Im}(f)$, то каждый элемент b из B есть образ в точности одного элемента a из A : $f(a) = b$. Пусть $g(b) = a$. Для соответствия $g: B \rightarrow A$ имеем:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a) &= g(f(a)) = g(b) = a = I_A, \\ (f \circ g)(b) &= f(g(b)) = f(a) = b = I_B. \end{aligned}$$

Следовательно, g есть обратная функция для f . Теорема доказана.

3. Унарная функция

Напомним, что функция $f: A \rightarrow B$ есть правило (отображение), которое каждому элементу из множества A сопоставляет единственный элемент из множества B . Если $f(a) = b$, то элемент b есть образ элемента a , элемент a есть прообраз элемента b . Множество A есть область определения $D(f)$ функции f . Множество B есть область значений $V(f)$ функции f .

Образ $\text{Im } f = \{f(x) : x \in A\}$ отображения $f: A \rightarrow B$ есть множество $f(A)$ всех значений функции f . **Полный прообраз элемента** $y \in B$ есть множество $f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$. **Полный прообраз множества** $C \subseteq B$ есть множество $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$.

На конечном множестве функцию удобно задавать таблицей. Например, пусть множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, функция $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Здесь

$f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 2$. Порядок столбцов несуществен. Область определения $D(f) = A = \{1, 2, 3, 4\}$, область значений $V(f) = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\text{Im } f = f(A) = \{1, 2, 3\}$.

Функции $f: A \rightarrow B$ и $g: C \rightarrow D$ равны, если $A = C, B = D, \forall x \in A f(x) = g(x)$.

Функция $I_A: A \rightarrow A$, для которой $\forall x \in A I(x) = x$, называется *тождественной*.

Функция $f: A \rightarrow B$ есть *вложение* (*инъективная функция*, или *инъекция*), если $\forall a \in A \forall a' \in A$ условие $a \neq a'$ влечет $f(a) \neq f(a')$.

Инъективная функция различные элементы из области определения переводит в различные элементы из области значений.

Функция $f: A \rightarrow B$ есть *отображение на* (*сюръективная функция*, или *сюръекция*), если область значений B совпадает с образом $f(A)$, то есть если $f(A) = B$.

Функция $f: A \rightarrow B$ есть *взаимно-однозначная функция* (или *биекция*), если f является вложением и отображением на, то есть если 1) $a \neq a' \rightarrow f(a) \neq f(a')$, 2) $\text{Im } f = B$.

Если $f: A \rightarrow B$ и $C \subset A$, то функция $f: C \rightarrow B$ называется *сужением* функции f на множество C и обозначается $f|_C$. Функция f называется *расширением* функции $f|_C$.

Композиция $g \circ f$ функций $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ есть функция $g \circ f: A \rightarrow C$, для которой $\forall x \in A (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Символ композиции \circ иногда опускается.

Утверждение. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Доказательство. Пусть $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$. Тогда $((h \circ g) \circ f)(x) = (hg)f(x) = (h \circ g)f(x) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$.

Замечание. Для тождественной функции $f \circ I_A = I_B \circ f = f$.

Определение. Функция $f: B \rightarrow A$ называется *обратной* к функции $f: A \rightarrow B$, если $f \circ f^{-1} = I_B$ и $f^{-1} \circ f = I_A$.

Замечание. g обратна к $f \leftrightarrow f$ обратна g .

Утверждение. Если обратная функция для функции f существует, то она единственна.

Доказательство. Пусть функции f^{-1} и g обратны к функции $f: A \rightarrow B$. Тогда $f^{-1} \circ I_B = f^{-1} \circ (f \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ g = I_A \circ g = g$.

Следствие. Пусть для функций f и g существуют обратные функции f^{-1} и g^{-1} . Тогда справедливы утверждения:

1. $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Доказательство.

1. Так как f^{-1} обратна к f , то f обратна к f^{-1} , то есть $f = (f^{-1})^{-1}$.

2. $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ I_B \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = I_B$.

Аналогично $(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = I_A$. Тогда функция $g^{-1} \circ f^{-1}$ обратна к $f \circ g$, то есть $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Теорема. Функция $f: A \rightarrow B$ имеет обратную функцию тогда и только тогда, когда отображение f взаимно-однозначно.

Доказательство. Пусть функция f имеет обратную функцию f^{-1} . Покажем, что отображение f взаимно-однозначно, то есть что $a \neq a' \rightarrow f(a) \neq f(a')$ и $B = \text{Im } f$.

В самом деле, пусть $f(a) = f(a')$. Тогда $a = I_A(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(a')) = I_A(a') = a'$, то есть $f(a) = f(a') \rightarrow a = a'$, откуда $a \neq a' \rightarrow f(a) \neq f(a')$.

Пусть $b \in B$. Тогда $b = I_B(b) = (f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b))$, то есть всякий b есть образ некоторого $a = f^{-1}(b) \in A$. Поэтому $B = \text{Im } f$.

Пусть теперь f есть взаимно-однозначное отображение. Покажем, что функция f имеет обратную функцию. В самом деле, так как $B = \text{Im } f$, то каждый элемент b из B есть образ в точности одного элемента a из A : $f(a) = b$. Пусть $g(b) = a$. Для соответствия $g : B \rightarrow A$ имеем:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a) &= g(f(a)) = g(b) = a = I_A, \\ (f \circ g)(b) &= f(g(b)) = f(a) = b = I_B.\end{aligned}$$

Следовательно, g есть обратная функция для f . Теорема доказана.

4. Отношение

Пусть A_1, A_2, \dots, A_n есть произвольные множества, вообще говоря, разнородные.

Определение. n -арное отношение ρ^n на множествах A_1, A_2, \dots, A_n есть подмножество ρ^n декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Замечание. n -арное отношение ρ^n на множестве A есть подмножество ρ^n натуральной степени множества A^n , $n > 0$. Индекс n арности (местности) отношения ρ иногда опускается.

Возможна множественная (суффиксная) $(x_1, \dots, x_n) \in \rho$ и предикатная (префиксная) $\rho(x_1, \dots, x_n)$ формы записи отношений. В последнем случае отношение ρ называют также предикатом. Для бинарного отношения используется инфиксная запись $x \rho y$. Унарное отношение $\rho \subseteq E$ есть подмножество множества E . Предикат $\rho(x)$, соответствующий унарному отношению, называется свойством.

Набор $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \rho$ (допустима запись $\rho(a_1, a_2, \dots, a_n)$) называется элементом отношения.

Определение. Отношение конечно, если оно состоит из конечного числа элементов.

5. Отношение эквивалентности

Пусть A есть произвольное множество.

Определение. Бинарное отношение $\sigma \subseteq A \times A$ есть отношение эквивалентности (обозначение $a \sim b$), если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1) $a \sim a$, рефлексивность;
- 2) $a \sim b \rightarrow b \sim a$, симметричность;
- 3) $a \sim b \ \& \ b \sim c \rightarrow a \sim c$, транзитивность.

Обозначение. $a \sim b$, $\sigma(a, b)$, $(a, b) \in \sigma$, $a \sigma b$.

Определение. Разбиение I множества A есть семейство попарно непересекающихся непустых подмножеств множества A , таких, что: $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, $\forall i \neq j$ $(A_i \cap A_j = \emptyset)$. Подмножества A_i называются смежными классами разбиения I .

Пример. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{0, 1, 5\} \cup \{2\} \cup \{3, 4\}$.

Теорема. 1. Каждому отношению эквивалентности, определенному на множестве A , соответствует некоторое разбиение множества A .

2. Каждому разбиению множества A соответствует некоторое отношение эквивалентности, определенное на множестве A .

Коротко: между классом всех определенных на множестве A эквивалентностей и классом всех разбиений множества A существует взаимно-однозначное соответствие.

Доказательство. 1. Пусть σ есть отношение эквивалентности, определенное на множестве A и $a \in A$. Построим множество $K_a = \{x \in A : x \sim a\}$ всех элементов x , эквивалентных a . Оно обозначается также через $[a]_\sigma$. Множества K_a называются *смежными классами A по σ* , или классами эквивалентности.

Заметим, что если $b \in K_a$, то $b \sim a$. Покажем, что $a \sim b \leftrightarrow K_a = K_b$. В самом деле, пусть $a \sim b$. Пусть произвольный элемент $c \in K_a$. Тогда $c \sim a$, $a \sim b$, $c \sim b$, $c \in K_b$, и потому $K_a \subseteq K_b$. Аналогично показываем, что $K_b \subseteq K_a$. Тогда $K_a = K_b$. Пусть теперь $K_a = K_b$. Тогда $a \in K_b$, и $a \sim b$. Утверждение доказано.

Если два класса K_a и K_b имеют общий элемент c , то они совпадают. В самом деле, если $c \in K_a$, $c \in K_b$, то $b \sim c$, $c \sim a$ и $b \sim a$, откуда $K_a = K_b$. Поэтому всякие два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо (в случае непустого пересечения) совпадают. Всякий элемент c попадает в класс эквивалентности K_c . Поэтому система смежных классов есть разбиение множества A .

2. Пусть задано некоторое разбиение множества A . Определим на A отношение \sim , положив $a \sim b \leftrightarrow$ элементы a и b принадлежат одному и тому же классу разбиения. Отношение \sim удовлетворяет аксиомам 1) $a \sim a$, 2) $a \sim b \rightarrow b \sim a$, 3) $a \sim b$ & $b \sim c$, и потому оно есть отношение эквивалентности.

Замечание. 1. Разбиение множества A на одноэлементные подмножества $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ и разбиение A , состоящее из одного только множества A , называются тривиальными (несобственными) разбиениями.

2. Разбиение A на одноэлементные подмножества соответствует отношению эквивалентности, которое есть равенство.

3. Разбиение множества A , состоящее из одного только множества A , соответствует отношению эквивалентности, содержащему все множество $A \times A$.

4. $a \sigma b \leftrightarrow [a]_\sigma = [b]_\sigma$.

Определение. Совокупность классов эквивалентности множества A называется *фактор-множеством A/σ* множества A по эквивалентности σ .

Определение. Отображение $p : A \rightarrow A/\sigma$, при котором $p(a) = [a]_\sigma$, называется *каноническим (естественным)*.

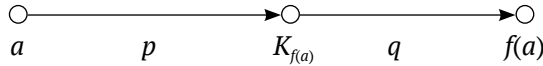
6. Каноническое разложение функции

Пусть $f : A \rightarrow B$ есть некоторая функция. Определим на A отношение $\sigma \in A \times A$, положив $\forall a \in A \forall b \in A (a \sim b \leftrightarrow f(a) = f(b))$. Отношение σ есть отношение эквивалентности, так как выполняются следующие свойства:

- 1) $a \sim a$, ибо $f(a) = f(a)$;
- 2) $a \sim b \rightarrow b \sim a$, ибо $f(a) = f(b) \rightarrow f(b) = f(a)$;
- 3) $a \sim b \ \& \ b \sim c \rightarrow a \sim c$, ибо $f(a) = f(b) \ \& \ f(b) = f(c) \rightarrow f(a) = f(c)$.

Введенное отношение σ называется ядерной эквивалентностью для отображения f . Классы эквивалентности A/σ есть полные прообразы элементов множества B при отображении f , то есть $A_b = f^{-1}(b)$.

Отображение f можно разложить в композицию двух отображений согласно следующему рисунку:



Имеет место равенство $f = q \circ p$, то есть $f(a) = q(p(a))$.

Представление $f = q \circ p$ называется каноническим разложением (представлением) функции f .

Пример. Получить каноническое разложение функции

$$f : E_{10} \rightarrow E_{10}, f = 0112105533 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Область определения $D(f) = E_{10}$. Область значений $Im(f) = \{0, 1, 2, 3, 5\}$. Классы эквивалентности:

$$\begin{aligned} K_0 &= [0]_\sigma = f^{-1}(0) = \{0, 5\}, q(K_0) = 0, \\ K_1 &= [1]_\sigma = f^{-1}(1) = \{1, 2, 4\}, q(K_1) = 1, \\ K_2 &= [2]_\sigma = f^{-1}(2) = \{3\}, q(K_2) = 2, \\ K_3 &= [3]_\sigma = f^{-1}(3) = \{8, 9\}, q(K_3) = 3, \\ K_5 &= [5]_\sigma = f^{-1}(5) = \{6, 7\}, q(K_5) = 5. \end{aligned}$$

Функции p и q задаются следующим образом:

$$p(a) = K_{f(a)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ K_0 & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 & K_6 & K_7 & K_8 & K_9 \end{pmatrix},$$

$$D(p) = E_{10}, Im(p) = \{K_0, K_1, K_2, K_3, K_5\}; q(K_a) = a = \begin{pmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & K_3 & K_5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D(q) = \{K_0, K_1, K_2, K_3, K_5\}, Im(q) = \{0, 1, 2, 3, 5\}; f(a) = q(p(a)).$$

7. Мощность множества. Счетные и несчетные множества

Определение. Множества A и B эквивалентны ($A \sim B$), если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. \square

Отношение эквивалентности множеств обладает следующими свойствами.

1. $A \sim A$, рефлексивность.
2. $A \sim B \rightarrow B \sim A$, симметричность.
3. $A \sim B \ \& \ B \sim C \rightarrow A \sim C$, транзитивность.

Определение. *Мощность множества A* (обозначение $|A|$) есть класс эквивалентных ему множеств. *Мощность конечного множества* есть число его элементов.

Замечание. Эквивалентные множества A и B равномощны, то есть $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$.

Определение. Множество A *сечно*, если A эквивалентно множеству \mathbb{N} натуральных чисел. В противном случае множество A *несечно*.

Утверждение. Из всякого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество.

Доказательство. Пусть A есть бесконечное множество. Выделим в A произвольный элемент a_0 . Множество $A - \{a_0\}$ бесконечно. Выделим в нем элемент a_1 . Множество $A - \{a_0, a_1\}$ бесконечно. Выделим в нем элемент a_2 . И так далее. В бесконечном множестве A выделено счетное подмножество $B = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$.

Утверждение. Множество \mathbb{Q}_+ положительных рациональных чисел сечно.

Доказательство. Расположим элементы из \mathbb{Q}_+ в следующей таблице.

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...
 2, 2/2, 2/3, 2/4, 2/5, ...
 3, 3/2, 3/3, 3/4, 3/5, ...
 4, 4/2, 4/3, 4/4, 4/5, ...
 ...

Выписываем элементы из \mathbb{Q}_+ по диагонали, сверху вниз, выпуская ранее встречавшиеся числа: 1, 1/2, 2, 1/3, 3, 2/3, ... Следовательно, множество \mathbb{Q}_+ сечно.

Утверждение. Объединение конечного или счетного множества счетных множеств сечно.

Доказательство. Расположим элементы множеств A_1, A_2, A_3, \dots (их число может быть и конечным) в следующей таблице.

$A_1 : a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots$
 $A_2 : a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots$
 $A_3 : a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \dots$
 $A_4 : a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \dots$
 ...

Выписываем элементы из $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ по диагонали, сверху вниз, выпуская ранее встречавшиеся элементы: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots$ Следовательно, множество $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ сечно.

Замечание. Объединение конечного множества и счетного множества сечно. Множество рациональных чисел сечно, ибо $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$, где \mathbb{Q}_- есть множество отрицательных рациональных чисел.

8. Мощность континуума

Утверждение. Множество C всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчетно.

Доказательство. Допустим противное: существует пересчет всех бесконечных последовательностей A_1, A_2, A_3, \dots из 0 и 1:

$$A_1 : a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots$$

$$A_2 : a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots$$

$$A_3 : a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \dots$$

$$A_4 : a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \dots$$

...

Построим последовательность $B : b_1, b_2, b_3, \dots$, где

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{ii} = 0, \\ 0, & \text{если } a_{ii} = 1, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Последовательность B лежит вне указанного пересчета. B отличается от A_1 элементом $b_1 \neq a_{11}$, от A_2 – элементом $b_2 \neq a_{22}$, от A_3 – элементом $b_3 \neq a_{33}$ и т. д. Следовательно, исходное множество C несчетно.

Определение. Множество A имеет *мощность континуума* c , если A эквивалентно множеству всех бесконечных последовательностей из 0 и 1.

Следствие. Множество C всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 имеет мощность континуума: $|C| = c$ (в силу рефлексивности).

Утверждение. Множество $P(\mathbb{N})$ всех подмножеств множества натуральных чисел имеет мощность континуума.

Доказательство. Всякую бесконечную последовательность из 0 и 1 можно рассматривать как характеристическую функцию некоторого подмножества множества натуральных чисел. Следовательно, множество $P(\mathbb{N})$ имеет мощность континуума: $|P(\mathbb{N})| = c$.

Следствие. Множество всех подмножеств множества натуральных чисел несчетно.

Утверждение. Если к бесконечному множеству добавить конечное или счетное множество элементов, то его мощность не изменится.

Доказательство. Пусть A есть бесконечное множество, а B есть конечное или счетное множество, причем $A \cap B = \emptyset$. Покажем, что $A \sim A \cup B$. Выделим из множества A счетное подмножество A_1 . Тогда $A = C \cup A_1$, где $C = A - A_1$, и $A \cup B = (C \cup A_1) \cup B = C \cup (A_1 \cup B)$. Так как $A_1 \cup B \sim A_1$, то $A \cup B = C \cup (A_1 \cup B) \sim C \cup A_1$ в силу транзитивности, и с учетом того, что $A = C \cup A_1$, получаем $A \cup B \sim A$.

Утверждение. Если A есть несчетное множество, а B есть конечное или счетное его подмножество, то $A - B \sim A$.

Доказательство. Пусть $C = A - B$. Тогда $A = C \cup B$. Множество C несчетно, ибо в противном случае C конечно или счетно, и тогда $A = C \cup B$ конечно или счетно. Множество $C \cup B \sim C$, или $A \sim C$, то есть $A \sim A - B$.

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru