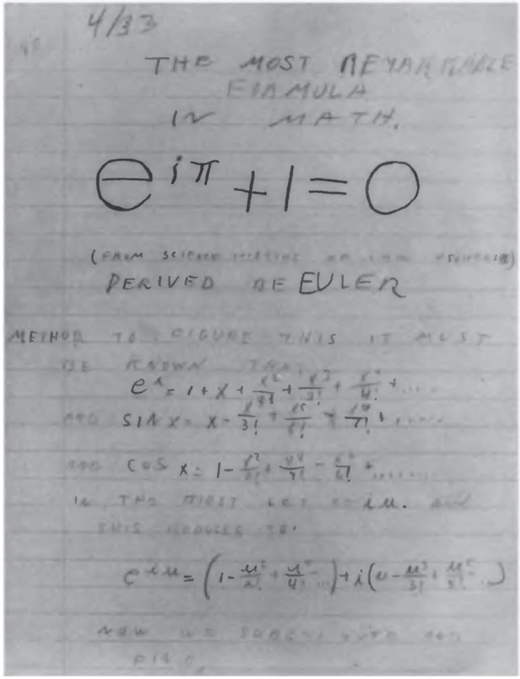
Посвящается Патрисии Энн,
прекрасной и удивительной, как формула Эйлера



В юношеском дневнике за апрель 1933 года, незадолго до своего пятнадцатого дня рождения, Ричард Фейнман (1918–1988), будущий лауреат Нобелевской премии по физике, оставил заметку, относящуюся к основной теме этой книги. Обратите внимание на разложение в ряд экспоненты, синуса и косинуса – сразу под фразой «most remarkable result in math» («Самый замечательный результат в математике». – *Прим. перев.*). На следующей строке начинается стандартный вывод формулы Эйлера (ее еще называют тождеством Эйлера) $e^{iu} = \cos(u) + i\sin(u)$, из которой «замечательный результат» получается, если положить $u = \pi$. (В качестве источника Фейнман пользовался десятитомным справочником «The Science History of the Universe», впервые опубликованным в 1909 году.) Хотя Фейнман запомнился в первую очередь как физик, он был еще и талантливым математиком, и в книге «Характер физических законов» (1965) писал: «Тем, кто не знает математики, трудно постичь подлинную, глубокую красоту природы… Если вы хотите узнать Природу, оценить ее красоту, то нужно понимать язык, на котором она разговаривает». Фейнман, безусловно, согласился бы с одним из рабочих названий этой книги: «Комплексные числа реальны!» (фотография публикуется с разрешения отдела архивов Калифорнийского технологического института.)

Да простит мне Бог, наблюдающий за правильным употреблением математических символов – в рукописи, в печати и на доске, – этот и многие другие мои грехи.

Герман Вейль, с 1933 по 1952 год профессор математики в Институте перспективных исследований, цитата из книги «Классические группы», Принстон, 1946, стр. 289.
Книга была издана в СССР: *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления / пер. Д. А. Райкова. М.: ГИИЛ, 1947. С. 387.

Содержание

Вступительное слово от издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте **www.dmkpress.com**, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу **http://dmkpress.com/authors/publish_book/** или напишите в издательство по адресу **dmkpress@gmail.com**.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг – возможно, ошибку в основном тексте или программном коде, – мы будем очень благодарны, если вы сообщите нам о ней. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Если вы найдете какие-либо ошибки в коде, пожалуйста, сообщите о них главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**, и мы исправим это в следующих тиражах.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу **dmkpress@gmail.com**.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

О чем эта книга, что нужно знать для ее чтения и ПОЧЕМУ вам следует прочитать ее

Все сколько-нибудь важное основано на математике.
– *Роберт Хайнлайн*. «Звездный десант» (1959)

Несколько лет назад издательство Принстонского университета выпустило мою книгу «An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$» (1998), в которой описано мучительно долгое и непростое открытие комплексных чисел. Будучи по духу исторической, та книга все же содержала много математики. На самом деле так много, что мне пришлось опустить ее, иначе книга оказалась бы в два раза толще. Так вот, эта книга – та самая «вторая половина», которую я вынужден был опустить в 1998 году. Здесь тоже есть кое-какие исторические сведения, но акцент сделан на более продвинутых математических рассуждениях (впрочем, не выходящих за пределы очерченного ниже уровня подготовки), на тех вещах, которые, на мой взгляд, было бы справедливо назвать «завлекательной стороной» комплексных чисел. Конечно, обе книги в чем-то пересекаются, но всюду, где возможно, я старался ссылаться на «An Imaginary Tale» (AIT) и не повторяться.

Для чтения этой книги необходима математическая подготовка в объеме двух курсов технического или физического вуза. То есть два года изучения математического анализа, один курс по дифференциальным уравнениям и, пожалуй, предварительное знакомство с матричной алгеброй и элементарной теорией вероятностей. Студенты третьего курса математических специальностей, безусловно, имеют необходимые знания! Признаю, что эти требования оставляют за бортом немало читателей, имеющих хорошее образование в других областях. Такие люди обычно разделяют взгляды британского премьер-министра Уинстона Черчилля, который в своей автобиографии «Мои ранние годы» писал:

> «Однажды я прочувствовал математику, словно обозрел ее всю, все ее глубины раскрылись передо мной, вся ее бездонность. Подобно тому как многие наблюдают за прохождением Венеры или шествием лорда-мэра, я наблюдал за полетом величины через бесконечность и сменой ее знака с плюса на минус. Я понял, почему это происходит и как один шаг влечет за собой все другие. Похоже на политику. Но озарение пришло после плотного ужина – и мне было не до него!»

Уверен, Черчилль пытался пошутить, но другие, столь же откровенно признающие незнание математики, похоже, не слишком обеспокоены этим. Взять, к примеру, рецензию известной писательницы Джойс Кэрол Оутс на роман Э. Л. Доктороу «Град Божий» (New York Review of Books, March 9, 2000, p. 31). Оутс (профессор Принстонского университета и лауреат Пулитцеровской премии) писала: «Науки о Вселенной и дисциплины, основным языком которых является математика, а не обычная речь, непостижимы даже неплохо образованному нематематику». Не согласен с этим. Разве полное невежество в предмете, который каждый год *преподают миллиону первокурсников и второкурсников* колледжей (математики на уровне этой книги), не должно заставить хоть *немного* задуматься?

Не согласятся с Оутс и некоторые ее коллеги по литературному цеху. Новеллист Ребекка Голдштейн писала в 1993 году в своей книге «Strange Attractors»: «Математика и музыка – языки, на которых разговаривает Бог. Говоря на них, … вы говорите напрямую с Богом». Мне также приходят на ум такие великие американские поэты прошлого, как Генри Лонгфелло и Эдна Сент-Винсент Миллей. Это Миллей принадлежит часто цитируемая строка из сборника сонетов 1923 года «The Harp-Weaver»: «Один Евклид взирал на Красоту без маски». Но именно Лонгфелло уже давным-давно предельно откровенно ткнул пальцем в тот пробел в знаниях, который без тени смущения признают многие образованные в остальных отношениях умы. В первых абзацах главы 4 романа «Кавана», написанного в 1849 году, мечтательный и погруженный в размышления школьный учитель мистер Черчилль и его жена Мэри ведут такую беседу в его кабинете:

> – Я вот [говорит Мэри] не понимаю, как можно сделать математику поэтической. Нет в ней никакой поэзии.
>
> – А [восклицает мистер Черчилль], это огромная ошибка! В науке о числах есть что-то божественное. Подобно Господу, она вмещает море в сложенной горсти. Она измеряет землю, взвешивает звезды, освещает Вселенную; она – закон, порядок и красота. А мы воображаем – по крайней мере, большинство из нас, – будто ее высшее достижение и последний предел – двойная запись в бухгалтерии. Мы так преподаем – потому она и кажется такой прозаичной.

И *вы*, раз уж читаете эту книгу, конечно, оцените и согласитесь со словами *этого* мистера Черчилля!

ПРЕДИСЛОВИЕ

Когда математика вошла в моду?

Этот вопрос, заданный в редакционной статье[1] газеты «Бостон Глоб» за 2002 год, отражает тот факт, что идея красоты в математике перекочевала из замкнутого населенного преимущественно мужчинами мира покуривающих трубку и потягивающих шерри математиков в твидовых пиджаках и вельветовых брюках, собирающихся на свой еженедельный послеполуденный семинар в колледже, в «реальный мир» водителей грузовиков, подростков и пенсионеров, которые хотят немного поразвлечься дождливым вечерком. Вы поймете, что я имею в виду, если посмотрите фильм «Человек-паук 2» (2004), а точнее небрежное замечание Тоби Магуайра в роли голливудского супергероя о найденном Бернулли решении знаменитой задачи о кривой скорейшего спуска под действием силы тяжести.

Аргументируя свое заявление, редакционная статья в «Глоб» приводит цитаты из трех пьес и одного фильма как примеры этого знаменательного интеллектуального сдвига. В пьесе «Копенгаген» мы видим театральную постановку спора между физиками Нильсом Бором и Вернером Гейзенбергом о квантовой механике. Гейзенберг, в честь которого назван принцип неопределенности в природе (мы обсудим его в главе 5), в какой-то момент своего первоначального осмысления новой квантовой теории говорит: «Мир чисто математических конструкций. Я слишком возбужден, не могу спать». Затем он, согласно описанию в «Глоб», «при первых лучах восхода выбегает на берег моря и взбирается на выступающую в море скалу, о которую бьется прибой». Напоминает сцену, которую все мы не раз видели в фильмах 1930–1940-х годов, как раз перед тем (или после того), как героиню укладывают в постель. Эротическую связь между математическим озарением и оргазмом просто невозможно отрицать[2].

Затем автор статьи переходит к обсуждению пьес «Доказательство» (в которой зубодробительные формулы аттестуются как «красивые»), «Q.E.D.»* (о физике-теоретике Ричарде Фейнмане, который часто говорил об удивительном свойстве математики оказываться корнем любой осмысленной интерпретации природы) и о получившем Оскар в 2001 году фильме Рона Ховарда «Игры разума». Это фильм о жизни математика из Принстонского университета Джона Нэша, несколько искаженной взглядом художника. Он был признан лучшим голливудским фильмом, потому что смог рассказать неискушенной публике (начиная с тинейджеров), в чем заключалась работа Нэша по теории игр. Странно, что «Глоб» не упомянула фильм 1997 года «Умница Уилл Хантинг» (странно, потому что в фильме играли Бен Аффлек и Мэтт Даймон, оба родом из Бостона), в котором в первых кадрах на экране строка за строкой появляются интегральные уравнения Фурье. В этом фильме, тоже получившем Оскара, главным героем является математический гений, работающий ночным уборщиком в Массачусетском технологическом институте. В фильме «Проклятый путь» (2002) киллер, которого играет Том Хэнкс, одержим отрицанием идеи о красоте математики и находит общий язык со своим сыном на почве *ненависти* к математике. Но, как любят говорить поэты, любовь и ненависть – две стороны одной медали, и математика даже в этом полном насилия фильме становится эмоциональной связующей нитью между двумя мужчинами.

Но еще раньше примеров, упомянутых в «Глоб», математики играли заметные роли в целом ряде известных фильмов[3]. Посмотрите такие фильмы, как «Соломенные псы» (1971) , «Теперь мой ход» (1980), «Выстоять и сделать» (1987), «Тихушники» (1992), «У зеркала два лица» (1996), «Контакт» (1997), «Пи» (1998) и «Энигма» (2002), – и вы согласитесь с «Глоб» – математика (которую часто приравнивали к крайней степени эксцентричности) действительно вошла в моду! Даже телевидение не осталось в стороне – в 2005 году вышел сериал «4исла» (англ. «Numb3rs»), где главными героями являются агент ФБР и его брат – математический гений, помогающий раскрывать преступления (техническим консультантом фильма был профессор математики из Калтеха, а многочисленные «атмосферные» сцены были призваны воспроизвести дух, царящий в научном сообществе).

* Что и требовалось доказать. – *Прим. перев.*

«Глоб» полагала, что такое проникновение математики в поп-культуру произошло, потому что «притягательность математики и науки в том, что они апеллируют к познанию непостижимого». Включение науки в эту фразу само по себе любопытно, потому что многие физики считают вершиной красоты уравнения (обратите внимание на множественное число) эйнштейновской теории гравитации. Для них источником красоты является не математика как таковая, а элегантное выражение физической реальности в виде уравнений. Для них математика – зримая плоть, это правда, но только физика – душа – и источник – красоты. Один из лауреатов Нобелевской премии по физике 1933 года, Поль Дирак, – выдающийся представитель этой точки зрения. Дирак (1902–1984) известен многими замечаниями по поводу красоты в технике[4]; например, в ответ на вопрос (заданный в 1955 году в Москве) о его взглядах на философию физики он написал на доске «Физические законы должны обладать математической красотой». Эту доску до сих пор российские физики хранят как дань уважения.

Конечно, по мере того как физики узнают больше о физике, их уравнения меняются. Никто, даже Эйнштейн, не защищен от этой эволюции. Как гравитационная теория Ньютона уступила место эйнштейновской, так и теория Эйнштейна должна будет уступить место новым идеям, совместимым – в отличие от уравнений Эйнштейна – с квантовой механикой. Таким образом, эйнштейновская физика на некотором фундаментальном и очень глубоком уровне «неверна» (или, более вежливо, «ей чего-то недостает») и, стало быть, корректна лишь приближенно. Но означает ли это, что математическая красота уравнений теории Эйнштейна куда-то пропала?

Я так не думаю. Во введении я расскажу о воззрениях разных авторов на то, что делает теории (и их уравнения) красивыми, но один момент там не упомянут, потому что здесь для этого более подходящее место. Я полагаю, что теория Эйнштейна сохраняет красоту, хотя, как мы теперь знаем, она не вполне корректна, по той причине, что стала результатом дисциплинированных рассуждений. Да, Эйнштейн создал новую физику, но сделал он это не как придется. Он выстраивал свою теорию в рамках строгих ограничений. Например, физические законы природы должны быть одинаковы для всех наблюдателей, независимо от их движения во Вселенной. Я думаю, что теория, удовлетворяющая такому широкому ограничению, просто обязана быть красивой.

Уродливы, на мой взгляд, те теории или картины, которые не подчиняются никаким ограничениям, в основе которых нет дисциплины. Например, только по этому критерию я ставлю Нормана Рокуэлла выше Джексона Поллока как художника. Без сомнения, это вызовет чуть ли не смертельные конвульсии у большинства ценителей современного искусства, которые обзовут меня культурным неандертальцем (так считает моя жена, занимающаяся историей искусств), но всякий, кто, увидев результат расплескивания краски по холсту[5], – а этим каждый день занимаются двухлетние ребятишки в тысячах детских садов (да что там, я и сам делаю то же самое, когда крашу потолок!) – назовет это искусством, больше того – изящным искусством, страдает галлюцинациями или, по крайней мере, сильно дезориентирован (по моему скромному мнению). Чтобы уж довести свою точку зрения до логического завершения, я захожусь от смеха, воображая себе поклонников Джексона Поллока, которые в священном восторге разражаются возгласами при виде хаоса, образуемого краской, капающей на *пол* Сикстинской капеллы, не обращая внимания на роспись потолка, выполненную Микеланджело *методично*, *умело* и *дисциплинированно*. Поклонники Поллока могут возразить мне, сказав, что его работы красивы, потому что он *все-таки* придерживался дисциплины – «дисциплины» никогда не быть связанным дисциплиной! Я слыхал такой аргумент и прежде от студентов колледжа и признаюсь, что пока не нашел на него достойного ответа, кроме закатывания глаз.

В этой книге золотым стандартом математической красоты является одна из основных формул комплексного анализа – формула Эйлера, т. е. тождество $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, где $i = \sqrt{-1}$. В частности, при $\theta = \pi$ получается формула $e^{i\pi} = -1$, или, как ее обычно записывают, $e^{i\pi} + 1 = 0$. Мне кажется, что это компактное выражение – квинтэссенция красоты. Я нахожу тождество $e^{i\pi} + 1 = 0$ красивым, потому что оно справедливо даже при наличии очень сильного потенциального ограничения. Равенство точное; левая часть не «почти» и не «приблизительно» равна 0, она равна *нулю* в точности. Тот факт, что пять чисел, каждое из которых было открыто абсолютно независимо от других и роль которых в математике невозможно переоценить, оказываются связаны таким простым соотношением, – это чудо. Это красиво. И в отличие от физики, химии или техники наших дней, которые почти наверняка покажутся архаичными инженерам в далеком будущем, формула Эйлера по-прежнему будет казаться даже самым премудрым математикам, ушедшим от нас на десятки тысяч лет вперед, красивой и вызывающей восхищение, нисколько не потускневшей от времени.

Великий немецкий математик Герман Вейль (1885–1955) однажды заявил, наполовину в шутку: «В своей работе я всегда стремился объединить истину с красотой, но если нужно выбирать между тем и другим, я обычно выбираю красоту». Не бросайте книгу, и я попытаюсь продемонстрировать, что имел в виду Вейль, показав по-настоящему красивые (сексапильные?) вычисления с комплексными числами, многие из которых основаны в том числе и на формуле Эйлера.

Введение

> Как сонет Шекспира, выражающий самую сущность любви, как картина, обнажающая красоту человеческого тела, отнюдь не ограничиваясь поверхностным впечатлением, так формула Эйлера проникает в самые глубины бытия.
>
> – *Кит Девлин* о формуле $e^{i\pi} + 1 = 0$[1]

Живший в XIX веке математик из Гарвардского университета Бенджамин Пирс (1809–1880) производил сильное впечатление на студентов. Один из них спустя много лет после смерти Пирса писал: «Появление профессора Бенджамина Пирса, с длинной гривой седых волос, растрепанной бородой с проседью и глазами, необычно ярко блестевшими из-под мягкой фетровой шляпы, когда он быстро, но не слишком грациозно пересекал двор колледжа, очень точно отвечало бытующему среди нас мнению, что мы лицезрим настоящего живого гения, в облике которого присутствуют черты пророка»[2]. Тот же самый бывший студент далее вспоминает, что во время одной лекции «он вывел соотношение, связывающее π, e и i, $e^{\pi/2} = \sqrt[i]{i}$, которое, очевидно, сильно занимало его воображение»[3]. Он уронил мелок и тряпку, сунул руки в карманы, несколько минут созерцал формулу, а затем обернулся к аудитории и очень медленно и внушительно сказал: «Джентльмены, вне всяких сомнений, эта формула абсолютно парадоксальна, мы не понимаем ее и не можем осознать, что она означает, но мы ее доказали, а значит, она должна быть истинной».

Как всякий хороший преподаватель, Пирс почти наверняка стремился к драматичности («Мы едва могли следовать за его мыслью, но сели попрямее и приняли к сведению»), но с этими словами он зашел слишком далеко. Конечно, мы *можем* понять то, что Пирс всегда называл «таинственной формулой», и, безусловно, *знаем*, что она означает. И тем не менее она остается чудесным и очень красивым выражением, и, сколь бы хорошо мы ее ни «понимали», это не уменьшает восторг, испытываемый при взгляде на нее. Как говорится в одном лимерике (эту стихотворную форму математики особенно любят):

> *e* raised to the *pi* times *i*,
> And plus 1 leaves you nought but a sigh.
> This fact amazed Euler
> That genius toiler,
> And still gives us pause, bye the bye*.

В этом лимерике затрагивается сразу несколько предметов, которые нам вскоре предстоит обсудить. Что такое *e*, *пи* и *i*, и кто такой Эйлер? Мне трудно поверить, что в мире найдется хотя бы один грамотный человек, никогда не слышавший о трансцендентных числах $e = 2.71828182...$ и $pi = \pi = 3.14159265...$ и о мнимом числе $i = \sqrt{-1}$. Что касается Эйлера, то он, безусловно, был одним из величайших математиков всех времен и народов. Составлять списки «величайших» сегодня стало модно, и я готов побиться об заклад, что в списке, составленном любым современным математиком, уроженец Швейцарии Леонард Эйлер (1707–1783) занял бы одно из первых пяти мест (конкуренцию ему составили бы Архимед, Ньютон и Гаусс, но оцените, какова компания!).

Ну а теперь, прежде чем пускаться в объяснение особенностей e, π и $\sqrt{-1}$, не сказать ли пару слов о дерзком заявлении, которое я позволил себе в предисловии, назвав выражение $e^{i\pi} + 1 = 0$ «квинтэссенцией красоты»? Это не пустые слова, и на самом деле у меня есть «официальное право» на такое мнение. В номере ежеквартального журнала *Mathematical Intelligencer*, спонсируемого престижным издательством книг и журналов по математике Springer-Verlag, вышедшем осенью 1988 года, было открыто голосование за самую красивую математическую теорему. Читателей *Intelligencer*, а едва

---

* *e*, возведенное в степень пи ай,
Плюс 1 будет ноль, чистый ноль – проверяй.
Эйлер был в изумленье.
С его-то уменьем,
Да и мы до сих пор говорим только «вай». – *Прим. перев.*

ли не все они – математики, работающие в академических учреждениях и в промышленности, попросили выставить 24 теоремам из предложенного списка оценки от 0 до 10, причем 10 означала «наиболее красивая», а 0 – «наименее красивая». Помимо $e^{i\pi} + 1 = 0$, в список входили такие основополагающие теоремы, как:

(a) множество простых чисел бесконечно;
(b) не существует рационального числа, квадрат которого равен 2;
(c) число π трансцендентно;
(d) любое непрерывное отображение замкнутого единичного круга в себя имеет неподвижную точку.

Выдающийся список, ничего не скажешь.

Результаты 68 полученных ответов были объявлены в летнем выпуске за 1990 год. Максимальную среднюю оценку 7.7 получило уравнение $e^{i\pi} + 1 = 0$. Для сравнения: теорема (a) получила оценку 7.5, (b) – 6.7, (c) – 6.5 и (d) – 6.8. Наименьшую среднюю оценку 3.9 получил результат из теории чисел, доказанный гениальным индийским математиком Рамануджаном. Итак, вот *официальный* вывод: $e^{i\pi} + 1 = 0$ – самое красивое уравнение в математике! (Надеюсь, читатели в большинстве своем понимают, что я говорю это не всерьез, и не будут заваливать меня гневными письмами с объяснением того, почему их любимое уравнение не в пример красивее.)

Конечно, приведенные выше формулировки несколько небрежны, ведь $e^{i\pi} + 1 = 0$ вообще-то *не* уравнение. Уравнением (с одной переменной) называется математическое выражение вида $f(x) = 0$, например $x^2 + x - 2 = 0$, которое истинно лишь для некоторых значений переменной, а именно для *решений* уравнения. Так, для приведенного выше квадратного уравнения $f(x)$ обращается в ноль *только* при $x = -2$ и $x = 1$. Однако в выражении $e^{i\pi} + 1 = 0$ нет никакого x, так что это не уравнение. Но это и не тождество, как, например, тождество Эйлера $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, где θ – произвольный угол, а не только π радиан. Действительно, *тождеством* (с одной переменной) называется утверждение, верное для любого значения переменной. Но в выражении $e^{i\pi} + 1 = 0$ вообще нет переменных, а только пять констант. (Тождество Эйлера – главное в этой книге, и мы докажем его в главе 1.) Итак, $e^{i\pi} + 1 = 0$ и не уравнение, и не тождество. Тогда что же это? Это *формула* или *теорема*.

Но нам важнее не семантика, а вопрос, поднятый мной в предисловии, – красота. Что могли бы означать слова о том, что математическое утверждение «красиво»? На этот вопрос я отвечаю так: что могли бы означать слова о том, что спящий котенок, парящий орел, лошадь, скачущая во весь опор, или смеющийся ребенок, или … красивы? Самый простой ответ – красота в глазах смотрящего (полагаю, это и есть окончательное «объяснение» популярности капельных картин Джексона Поллока), но я думаю (по крайней мере, в математическом смысле), что можно копнуть и глубже. Например, автор опроса в *Intelligencer* (Дэвид Уэллс, автор многих популярных работ по математике) внес несколько хороших предложений о том, что делает математическое выражение *красивым*.

Чтобы считаться красивым, пишет Уэллс, математическое утверждение должно быть простым, кратким, важным и очевидным, когда оно уже высказано, но таким, что мимо него легко пройти, т. е. *неожиданным*. (Похожий перечень ранее был сформулирован Э. Х. Хантли (H. E. Huntley) в вышедшей в 1970 году книге «The Divine Proportion»*.) Я думаю, что тождество Эйлера (и следствие из него, $e^{i\pi} + 1 = 0$) удовлетворяет всем четырем критериям, и полагаю, что, прочитав книгу до конца, вы будете думать так же. Но с этим согласны не все, что не должно вызывать удивления – с *любым* утверждением кто-нибудь да не согласен! Например, французский математик Франсуа Ле Лионне (François Le Lionnais) (1901–1984) начал с высокой оценки, написав, что $e^{i\pi} + 1 = 0$

> …устанавливает между важными для математики числами 1, π и e [по какой-то причине Ле Лионне опустил числа 0 и i] связь, которая в свое время казалась фантастической. Было общепризнано, что это «самая важная формула в математике»[4].

Но затем следует неожиданная развязка, тортом в лицо: «В наши дни внутренние причины такой взаимосвязи стали настолько очевидны [!], что эта формула кажется если не малосодержательной, то, по крайней мере, совершенно естественной».

Что ж, позавидуем Франсуа и его великому дару провидения (или лучше сказать, заднему уму?), но подобное утверждение мы с полным правом можем встретить с таким же скептицизмом, какой выказывает большинство математиков, когда кто-то говорит, что способен «видеть геометрические формы в четвертом измерении». Это ему только кажется. Он, конечно, «видит что-то», не будем спорить, но я сильно сомневаюсь, что видит он истинную

---

* Божественная пропорция. – *Прим. перев.*