ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является наукой о методах построения изображений предмета и представляет собой теоретическую основу построения технических чертежей, которые представляют собой полные графические модели конкретных инженерных изделий.

Целью начертательной геометрии является:

1. Изучение методов построения изображений предмета.
2. Изучение графических способов решения различных метрических и позиционных задач.
3. Развитие пространственного мышления, т. е. представление реальной формы и расположения предметов в пространстве по данному изображению.

Задачи начертательной геометрии можно разделить на позиционные и метрические. Позиционными называются те из них, решение которых сводится к заданию на чертеже различных геометрических фигур, задачи на взаимную принадлежность геометрических фигур и их пересечение.

Метрическими называют задачи на определение расстояний, углов, истинных величин плоских фигур.

В результате изучения начертательной геометрии будущий инженер должен, во-первых, научиться геометрическому моделированию, рассматривая всякое изображение как модель оригинала; во-вторых, при решении позиционных и метрических задач освоить логику геометрических рассуждений, что будет содействовать развитию культуры геометрического мышления; в-третьих, развить способность пространственного представления, необходимую инженеру как для создания различных технических объектов, так и для понимания и ясного представления того, что изображено на чертеже.

Предлагаемый набор примеров выполнения геометрических задач позволит студентам приобрести необходимые навыки и освоить приемы решения аналогичных задач.

При подготовке рукописи к печати были учтены советы и замечания доцента Военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулёва Солодовниковой Э. В., за что авторы выражают ей искреннюю признательность.

Варианты индивидуальных заданий расположены в приложении.

В таблице 1 приведены принятые обозначения.

Таблица 1

Обозначение	Содержание
$П_1$	Горизонтальная плоскость проекций
$П_2$	Фронтальная плоскость проекций
$П_3$	Профильная плоскость проекций
x_{12}, x_{14}, x_{45}, y, z	Оси проекций

Продолжение табл. 1

Обозначение	Содержание
A, B, C, D...1, 2, 3, 4,…	Точка в пространстве
$A_1, B_1, C_1, \ldots 1_1, 2_1, \ldots$	Горизонтальные проекции точек
$A_2, B_2, C_2, \ldots 1_2, 2_2, \ldots$	Фронтальные проекции точек
$A_3, B_3, C_3, \ldots 1_3, 2_3, 3_3 \ldots$	Профильные проекции точек
a, b, c...	Линии в пространстве
$a_1, b_1, c_1 \ldots$	Горизонтальные проекции линий
$a_2, b_2, c_2 \ldots$	Фронтальные проекции линий
$a_3, b_3, c_3 \ldots$	Профильные проекции линий
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$	Плоскости в пространстве
$\equiv$	Совпадение
$\in$	Принадлежность для точки ($A \in a$)
$\perp$	Перпендикулярность
$\parallel$	Параллельность
$\cap$	Пересечение

1. ЗАДАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ЧЕРТЕЖЕ. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

1.1. Аппарат проецирования. Метод Г. Монжа

В основу построения плоских изображений положена операция проецирования, которая заключается в том, что предмет с помощью лучей проецируют на некоторую плоскость. В начертательной геометрии и в инженерной графике для построения изображений в основном используется один из методов проецирования – параллельное ортогональное проецирование.

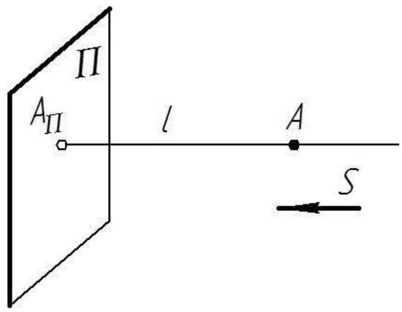


Рис. 1

Направление взгляда наблюдателя S перпендикулярно к плоскости проекций, относительно которой наблюдатель находится на бесконечно удаленном расстоянии (рис. 1).

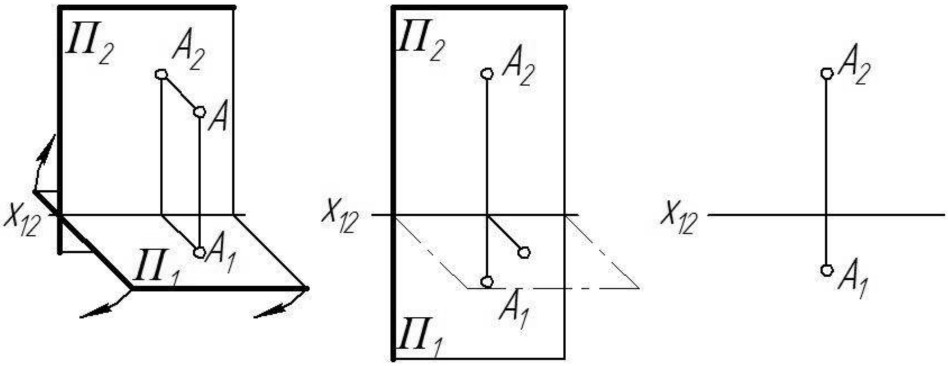
Проецирующий луч l от глаза наблюдателя проходит через точку A в пространстве и пересекает плоскость проекций П, образуя ортогональную (прямоугольную) проекцию $A_П$ точки A. Совокупность плоскости проекций и центра проецирования называется **аппаратом проецирования.** При ортогональном проецировании центр проецирования – бесконечно удаленная точка.

Проекцией точки на плоскость называется точка пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.

Чертеж должен читаться однозначно, т. е. должен быть обратимым. В данном случае проекции $A_П$ может соответствовать не только точка A, но и любая точка, принадлежащая проецирующему лучу l. Следовательно, по одной проекции невозможно однозначно определить положение точки в пространстве.

Для получения обратимых изображений точку A проецируют одновременно на две взаимно перпендикулярные плоскости: $П_1$ – горизонтальную и $П_2$ – фронтальную плоскости проекций (рис. 2а). Получают две ее проекции: горизонтальную проекцию A_1 на плоскости $П_1$ и фронтальную проекцию A_2 на плоскости $П_2$. Проецирующие прямые AA_1 и AA_2, при помощи которых точка A проецируется на плоскости проекций, определяют проецирующую плоскость A_1AA_2, перпендикулярную к обеим плоскостям проекций и к оси проекций x_{12}.

Если заданы две проекции точки A, то, восстановив из них перпендикуляры к плоскостям проекций, получим точку, в которой они пересекаются. Следовательно, две проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве. Такой метод называется методом Монжа, по имени его автора – французского ученого Гаспара Монжа (1746–1818).



а) б) в)

Рис. 2

Для получения двухкартинного комплексного чертежа необходимо плоскость $П_1$ повернуть вокруг оси x_{12} до совмещения с плоскостью $П_2$ (рис. 2б). Удалить условные очертания плоскостей проекций, так как плоскости проекций безграничны. Полученное изображение называется **эпюром** (рис. 2в). Прямая A_1A_2, соединяющая две проекции точки, называется **линией проекционной связи**, или линией связи. Линия связи всегда перпендикулярна оси x_{12}.

Существует безосный эпюр (рис. 3). Его применяют, если нет необходимости в определении положения точки (или других геометрических элементов) относительно плоскостей проекций.

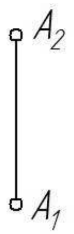
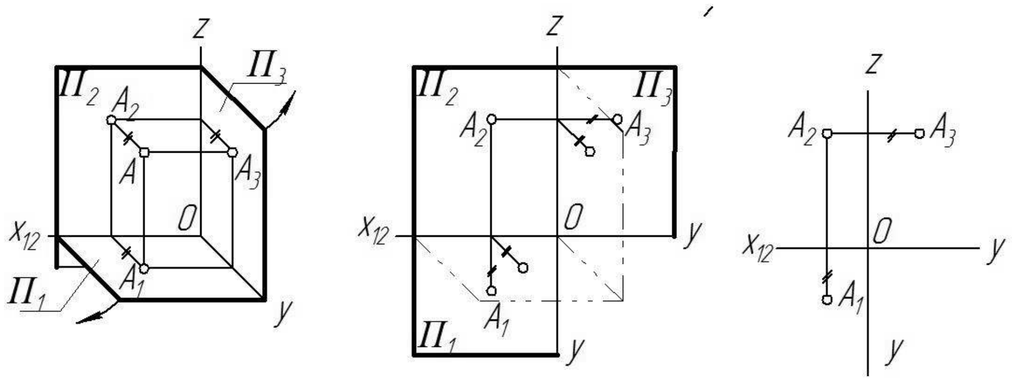


Рис. 3

1.2. Проецирование точки на три взаимно перпендикулярные плоскости

Как отмечалось выше, две проекции геометрической фигуры на эпюре однозначно определяют эту фигуру в пространстве. Однако в ряде случаев, особенно при изображении сложных предметов, возникает необходимость в трех и более плоскостях.

Плоскость, перпендикулярную плоскостям $П_1$ и $П_2$, обозначают $П_3$ и называют профильной плоскостью проекций (рис. 4а). A_3 – профильная проекция точки A.



а) б) в)

Рис. 4

Для получения эпюра плоскость Π_1 повернем вокруг оси x_{12}, плоскость Π_3 вокруг оси z до совмещения с фронтальной плоскостью Π_2 (рис. 4б). На рисунке 4в построен эпюр точки A. Расстояние от оси z до профильной проекции A_3 равно расстоянию от оси x_{12} до точки A_1.

1.3. Дополнительное ортогональное проецирование

В ряде случаев при решении задач бывает необходимо или целесообразно строить дополнительные проекции. При этом выбор дополнительной плоскости проекций определяется условием конкретной задачи.

Дополнительную ортогональную проекцию строят на плоскости, перпендикулярной к плоскости проекций.

На рисунке 5 точка A ортогонально спроецирована на плоскости Π_1 и Π_2, а также на плоскость Π_4, перпендикулярную к Π_1.

Линия пересечения плоскостей Π_1 и Π_4 – ось x_{14}. Для получения эпюра плоскость Π_4 поворачивают вокруг оси x_{14} до совмещения с плоскостью Π_1. Так как точка A не изменяет своего положения относительно плоскостей проекций, то расстояние от точки A до плоскости Π_1 остается неизменным.

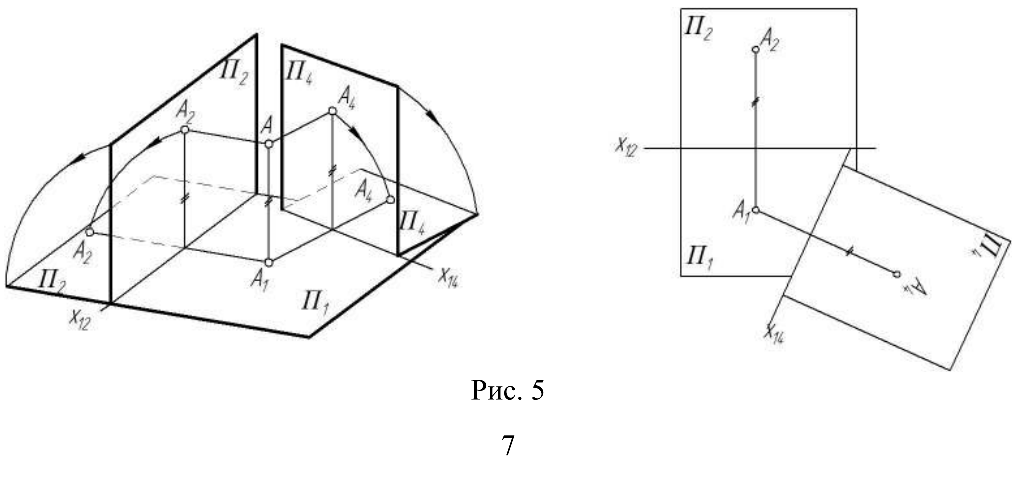


Рис. 5

Для построения на эпюре дополнительной ортогональной проекции точки A на плоскости $П_4$, перпендикулярной $П_1$ (рис. 6), нужно через A_1 провести линию связи, перпендикулярную к оси x_{14}, и отложить на ней от оси x_{14} расстояние от точки A_2 до оси x_{12}.

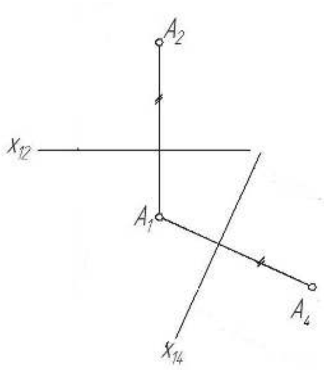
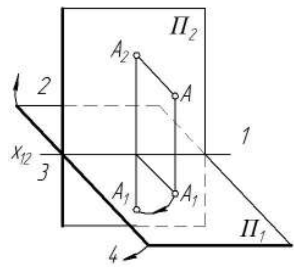
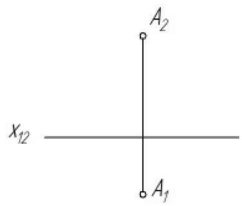
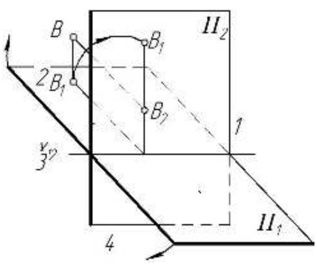
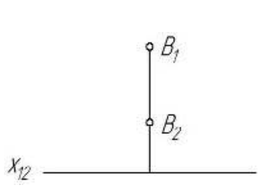


Рис. 6

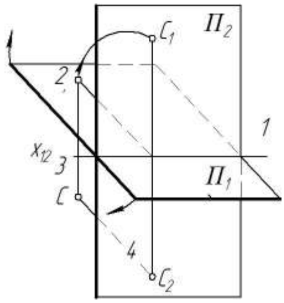
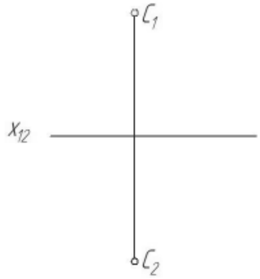
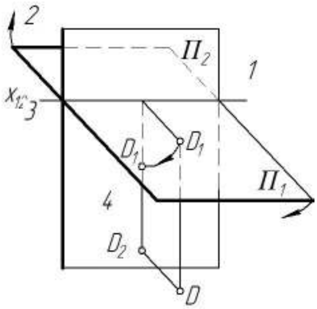
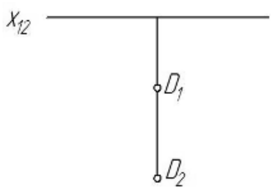
1.4. Четверти пространства

Две взаимно перпендикулярные плоскости $П_2$ и $П_1$ делят пространство на четыре двугранных угла, называемых четвертями пространства, или квадрантами. В таблице 2 показан порядок отсчета четвертей. Также показаны точки, расположенные в различных четвертях пространства.

Таблица 2

Четверть	Наглядное изображение	Эпюр
1		
2		

Продолжение табл. 2

Четверть	Наглядное изображение	Эпюр
3		
4		

На рисунке 7 показаны одновременно все четыре точки, расположенные в различных частях пространства.

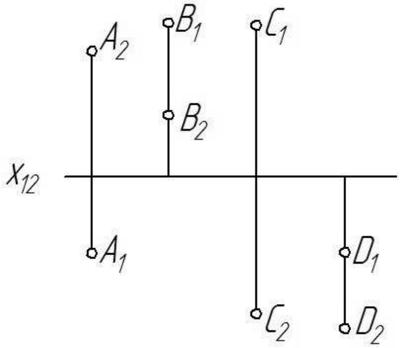


Рис. 7

Если точка располагается на плоскости, то одна из ее проекций находится на оси x_{12}. Точка N находится на оси x_{12}, проекции этой точки совпадают с самой точкой (рис. 8).

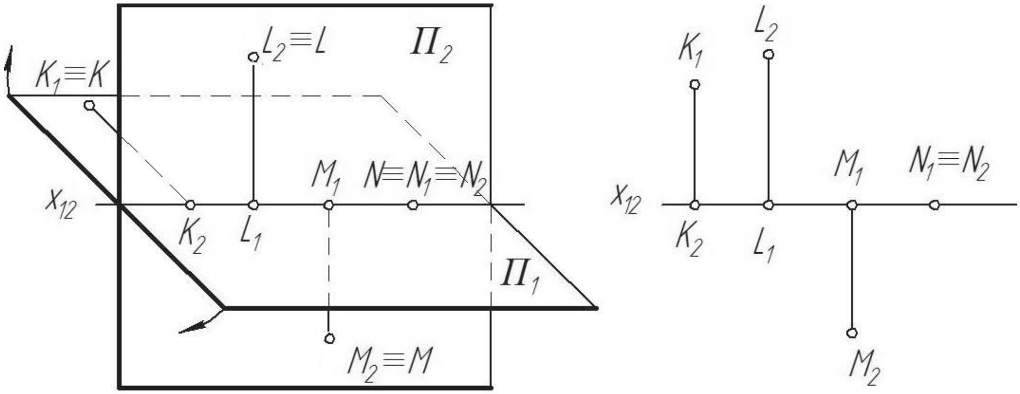


Рис. 8

Пример 1. Построить эпюр и наглядное изображение точек *B* и *C*, если точка *B* симметрична точке *A* относительно плоскости проекций Π_2, а точка *C* относительно оси x_{12} (рис. 9).

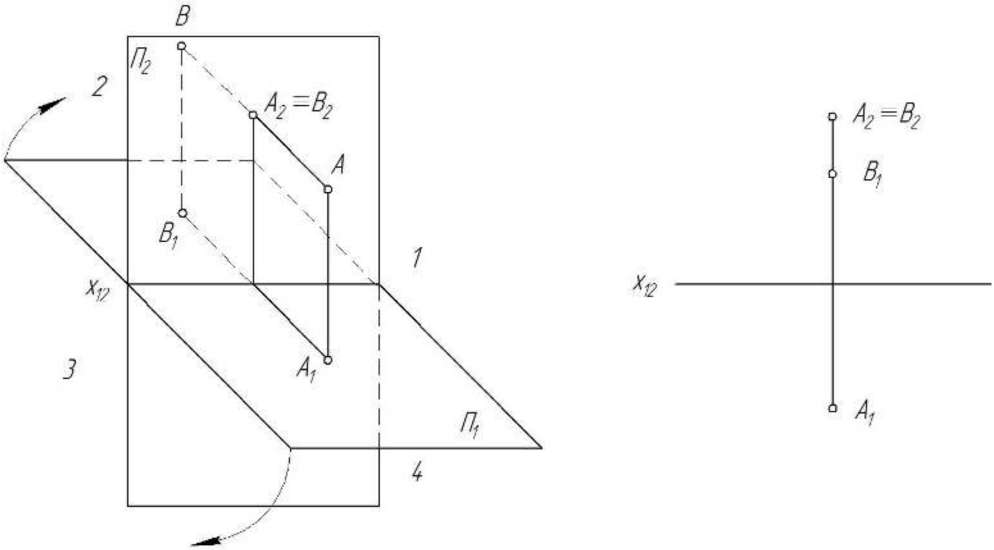


Рис. 9

Заданная точка *A* находится в 1-й четверти пространства. Точка *B*, симметричная ей, будет располагаться во 2-й четверти, при этом фронтальные проекции точек *A* и *B* совпадут, так как точки *A* и *B* находятся на одинаковом расстоянии от горизонтальной плоскости проекций Π_1. Фронтальная проекция B_2 при получении эпюра окажется выше оси x_{12} и на таком же расстоянии, как расстояние от A_1 до оси x_{12}.

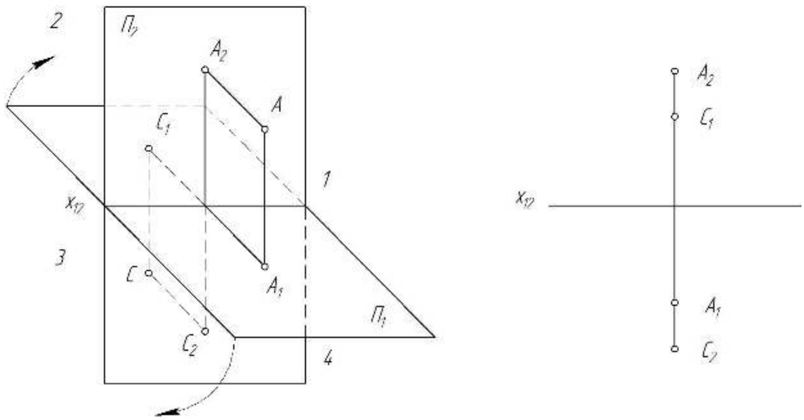


Рис. 10

На рисунке 10 показано построение точки *C*, симметричной точке *A* относительно оси x_{12}. Точка *C* будет располагаться в 3 четверти, она невидима для наблюдателя, находящегося в 1-й четверти. Горизонтальная проекция C_1 будет находиться на расстоянии, равном расстоянию от A_1 до оси x_{12}. Фронтальная проекция C_2 будет ниже оси x_{12} и на расстоянии, равном расстоянию от A_2 до оси x_{12}.

Пример 2. По заданным проекциям точек определить их положение в пространстве (рис. 11).

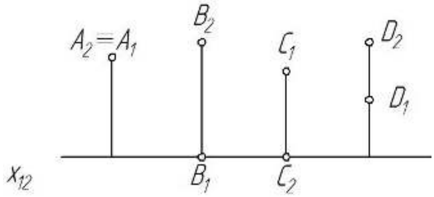


Рис. 11

Точка *A* расположена во 2-й четверти пространства, так как обе проекции располагаются выше оси x_{12}. Совпадение проекций говорит о том, что точка *A* равноудалена от плоскостей проекций Π_2 и Π_1.

Точка *B* принадлежит плоскости проекций Π_2, являющейся границей 1-й и 2-й четвертей.

Точка *C* принадлежит плоскости проекций Π_1, являющейся границей 2-й и 3-й четвертей.

Точка *D* расположена во 2-й четверти пространства, так как обе проекции располагаются выше оси x_{12}. Расстояние от точки *D* до плоскостей проекций различны.

1.5. Проекции прямой

Из геометрии известна аксиома: через две точки можно провести одну и только одну прямую. Следовательно, прямая на эпюре определяется проекциями двух точек.

Прямые линии могут занимать по отношению к плоскостям проекций различные положения (рис. 12).

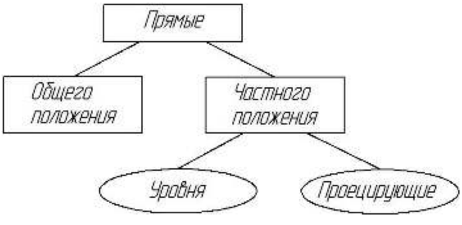


Рис. 12

1.5.1. Прямые общего положения

Прямая, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения (рис. 13).

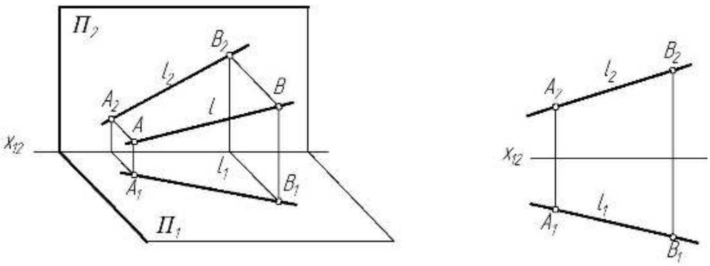


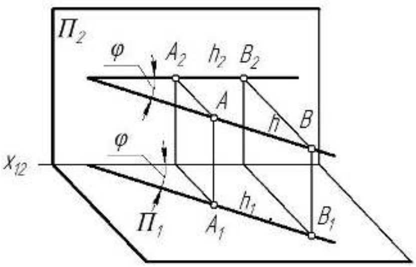
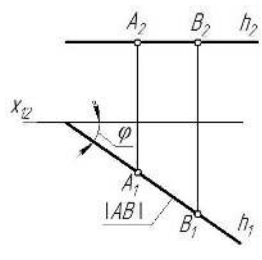
Рис. 13

Отрезок прямой общего положения не проецируется в натуральную величину ни на одну из плоскостей проекций. Существует несколько способов определения натуральной величины отрезка общего положения. Некоторые будут рассмотрены в главе 2 «Метрические задачи».

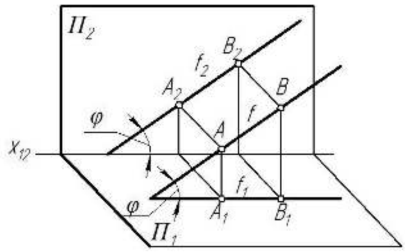
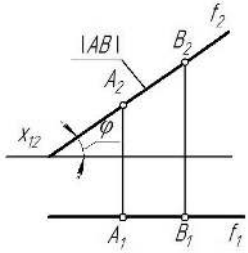
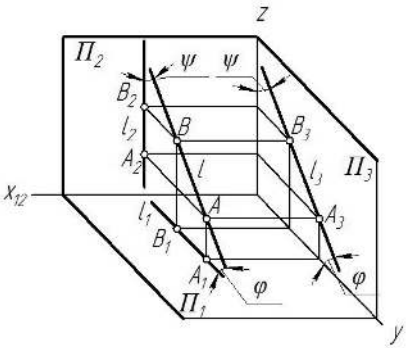
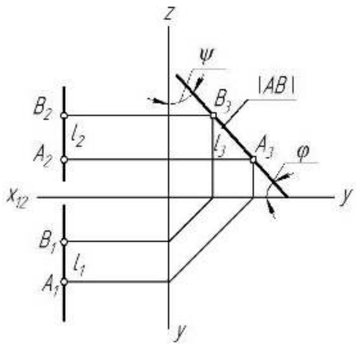
1.5.2. Прямые уровня

Прямые, параллельные какой-либо плоскости проекций, называются прямыми уровня (табл. 3).

Таблица 3

Наименование прямой	Наглядное изображение	Эпюр
Горизонтальная (горизонталь) $AB \parallel \Pi_1$		

Продолжение табл. 3

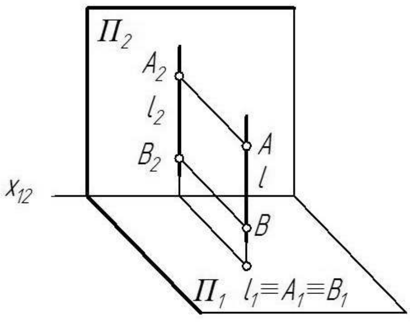
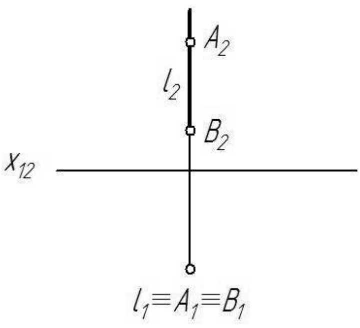
Наименование прямой	Наглядное изображение	Эпюр
Фронтальная (фронталь) $AB \parallel \Pi_2$		
Профильная $AB \parallel \Pi_3$		

$|AB|$ – натуральная или истинная величина отрезка.

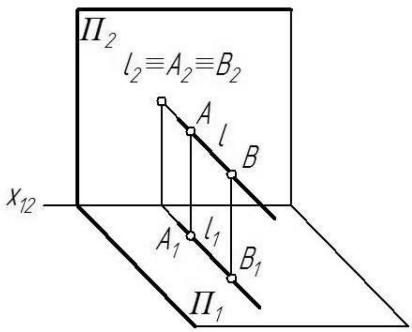
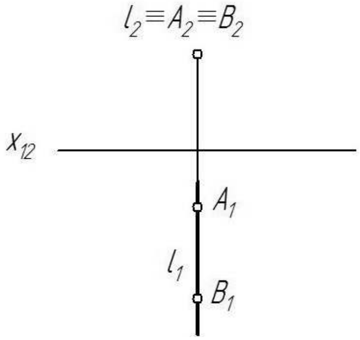
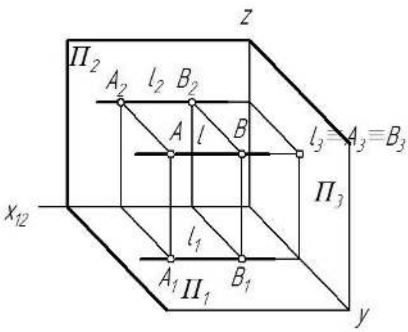
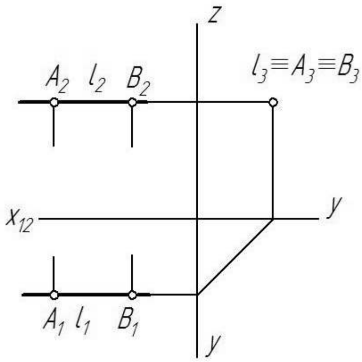
1.5.3. Проецирующие прямые

Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, называются проецирующими (табл. 4).

Таблица 4

Наименование прямой	Наглядное изображение	Эпюр
Горизонтально-проецирующая $AB \perp \Pi_1$		

Продолжение табл. 4

<table>
<tr><th>Наименование прямой</th><th>Наглядное изображение</th><th>Эпюр</th></tr>
<tr><td>Фронтально-проецирующая $AB \perp \Pi_2$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Профильно-проецирующая $AB \perp \Pi_3$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

1.6. Точка на прямой. Деление отрезка на части

Если точка находится на прямой, то проекции этой точки лежат на одноименных проекциях прямой (рис. 14).

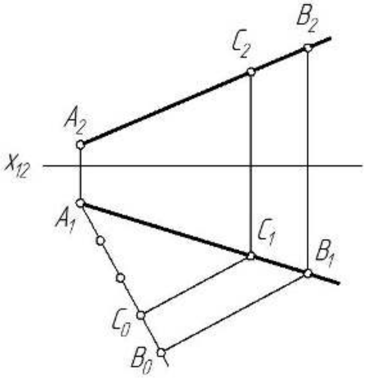


Рис. 14

Если точка делит проекцию отрезка прямой в определенном отношении, то проекции этой точки делят проекции отрезка в том же отношении. На рисунке 14 показано деление отрезка AB в отношении AC:CB = 3:1. Деление отрезка выполняется на основе теоремы Фалеса. Через A_1 проводят прямую под произвольным углом. На этой прямой откладывают 4 отрезка (всего 4 части). Конец последнего отрезка соединяют с точкой B_1 и параллельно этой прямой проводят прямую, отсчитав одну часть. Получаем C_1. Фронтальную проекцию C_2 отмечаем по линии связи. Точка C делит отрезок в отношении 3:1.

1.7. Взаимное положение прямых

1.7.1. Пересекающиеся прямые

Пересекающиеся прямые имеют общую точку. Проекции этой точки должны принадлежать одноименным проекциям обеих прямых. Из этого следует, что точки пересечения одноименных проекций пересекающихся прямых лежат на одной линии связи. Пересекающиеся в точке D прямые m и n показаны на рисунке 15.

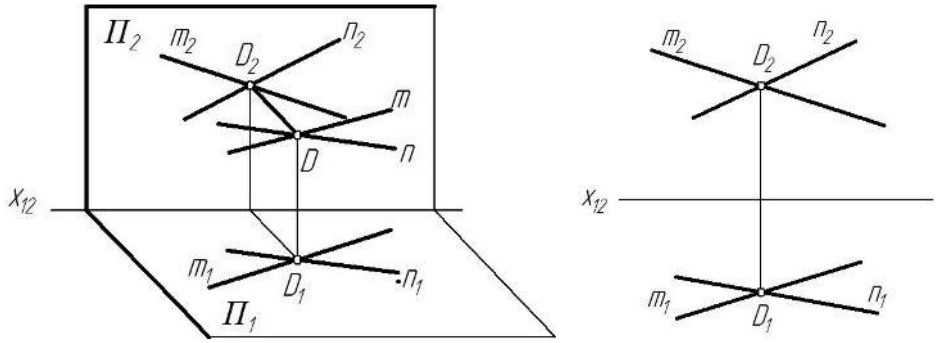


Рис. 15

1.7.2. Параллельные прямые

У параллельных прямых параллельны одноименные проекции. На рисунке 16 показаны параллельные прямые m и n.

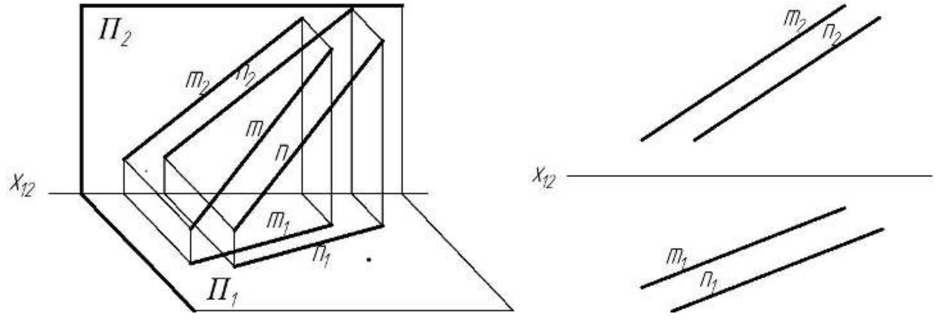


Рис. 16

1.7.3. Скрещивающиеся прямые

Скрещивающиеся прямые не имеют общей точки. Следовательно, точка пересечения одноименных проекций таких прямых (например, *m* и *n*, рис. 17) не лежит на одной линии связи, так как каждая из них является изображением двух разных точек (точки 1, 2 и 3, 4).

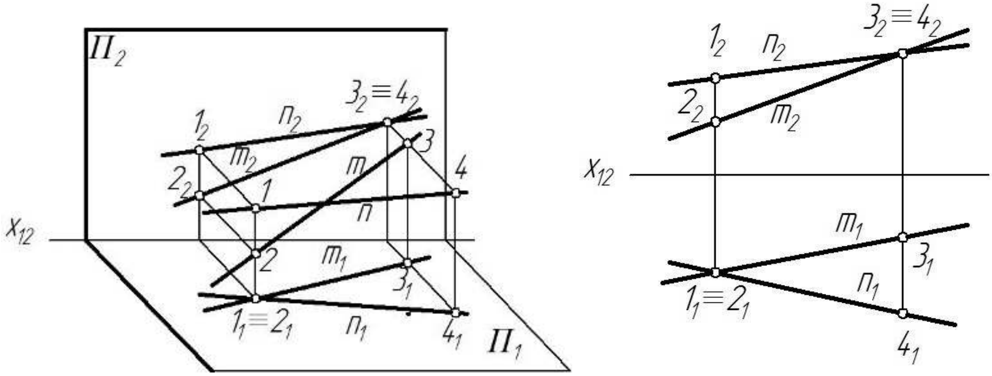


Рис. 17

Пример 1. Построить фронтальную проекцию отрезка *AB*, параллельного горизонтальной плоскости проекций Π_1 и отстоящего от нее на 30 мм. Найти на *AB* точку *C*, удаленную от плоскости проекций Π_2 на 20 мм (рис. 18).

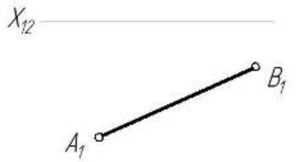


Рис. 18

Фронтальная проекция горизонтальной прямой всегда параллельна оси x_{12}. Откладываем от оси x_{12} 30 мм вверх и параллельно оси строим A_2B_2.

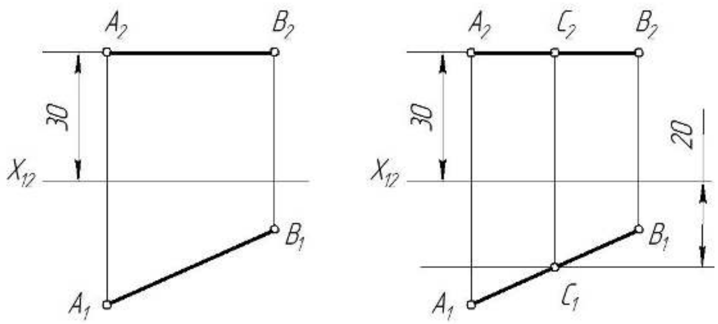


Рис. 19