Введение

В школьных курсах и в курсах колледжа зачастую принято определять вектор как направленный отрезок. Даже в Википедии (куда чаще, чем к учебникам стали обращаться учащиеся) можно найти и такое же определение вектора. Порой объясняют, что является его модулем, направлением. Вводятся понятия закрепленного и свободного векторов без должного разъяснений их различий и правильного использования по отношению к абсолютно твердым телам и твердым деформируемым телам. Поясняют возможные действия над векторами. Такие как правила сложения и вычитания векторов (правило многоугольника или параллелограмма), умножения и деления на скалярную величину, скалярное и векторное произведения векторов и т. п. Деление на вектор вообще не обсуждается. Редко обращается внимание на линию действия вектора, без которой, например, невозможно определить алгебраический момент силы относительно моментной точки.

Слабое представление имеют учащиеся о правильном разложении вектора на составляющие, что нередко приводит к ошибкам.

Но направленный отрезок это лишь обозначение вектора. Такое определение некорректно, но откладывается в сознании школьника и не дает истинного знания о векторе. Складывается впечатление, что вектор есть величина геометрическая. Это перемещение, скорость, ускорение, сила, импульс, сила тока. Особенно важным этот вопрос встает перед студентами различных форм обучения. В частности, в разделе кинематика практически во всех учебниках рассматривается векторный способ задания движения точки. Однако для вычисления ее скорости и ускорения, избегая прямого дифференцирования радиус-вектора точки (как того требуют определения), переходят к координатному способу, как менее сложному при дифференцировании. Вряд ли это достаточная причина. Изложение векторного способа остается не завершенным. Этим недостатком страдает большинство преподавателей вузов [1, 2, 5–7 и др.]. Все это можно было бы назвать преподавательской недобросовестностью. А ведь учитель в первую очередь должен давать достоверные, глубокие, а не поверхностные знания, поднимая компетенции учащихся.

Что же такое вектор

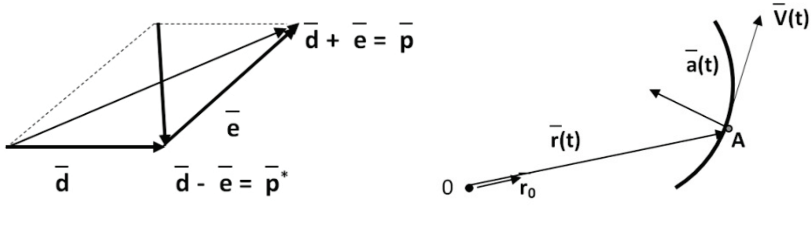
Вектор является не геометрической, а арифметической величиной, Это число особой природы, заключающее в себе требование однозначности определения перемещения точки. То есть сложение двух и более перемещений точки, следующих друг за другом, выражалось бы суммированием чисел, которые называются *гиперкомплексными* или *экстенсивными* числами.

Например, (см. рис. 1, *а*), два следующие друг за другом перемещения точки $\bar{d}$ и $\bar{e}$, геометрически лишь изображаемые направленными отрезками, дают результирующее перемещение $\bar{p}$, которое изображается направленным отрезком от начала первого отрезка к концу второго. При этом второй отрезок строится из конца первого отрезка. Это и есть метод сложение векторов по правилу параллелограмма.

Относя физическую величину к вектору, следует убедиться, что эта величина имеет все, без исключения, основные свойства векторов:

— определенное числовое значение (модуль), и определенное направление в пространстве и не должна зависеть от выбора системы координат;

— для нее соблюдается правило сложения параллелограмма [3, с. 48] и [4, с. 37].



а) правило параллелограмма

б) траектория, скорость и ускорение точки

Рис. 1

Данное суммирование обладает свойствами обыкновенного суммирования. То есть имеет место переместительный закон и т. д. Остальные правила векторных исчислений базируются именно на данном понимании вектора.

На рис. 1, *б* показаны траектория точки А при ее свободном движении в абсолютной системе отсчета, радиус вектор точки $\bar{r}(t)$, ее скорость $\overline{V}(t)$ и полное ускорение $\bar{a}(t)$.

Производная вектора по скалярному аргументу

Из векторного способа задания движения точки: $\overline{V} = d\bar{\mathbf{r}} / dt$, $\bar{a} = d\overline{V}/dt$, т. е. скорость и ускорение точки являются векторными величинами.

Рассмотрим вычисление и дополним содержание этих величин непосредственно через производные. Представим радиус вектор точки А в виде: $\bar{r}(t) = r\bar{r}_0$, где r — величина вектора, а $\bar{r}_0$ — его единичный направляющий вектор, т. е. $|\bar{r}_0| = 1$.

$$\text{Тогда } \overline{V} = d\bar{\mathbf{r}}/dt = dr/dt \cdot \bar{r}_0 + r \cdot d\bar{r}_0/dt \qquad (1)$$

Что совпадает с формулой (10) источника [3, с. 50]

Рассмотрим производную $d\bar{r}_0/dt$.

Построим годограф вектора $\bar{r}_0$. Им является кривая на сфере единичного радиуса, так как вектор $\bar{r}_0$, не меняя во времени своей величины, $|\bar{r}_0| = 1$, изменяется по направлению, как показано на рис. 2 для отрезка времени dt.

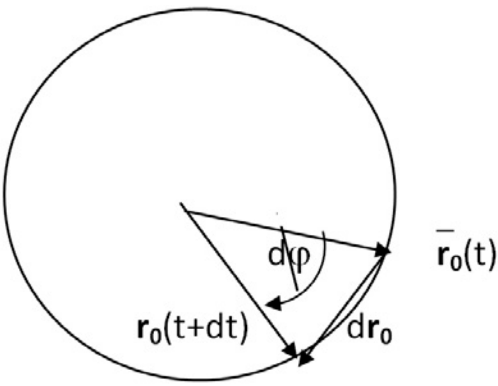


Рис. 2

$\varphi(t)$ — угол смежности, измеряемый в радианах; $d\varphi/dt = \omega$ — угловая скорость (угол поворота вектора $\bar{r}_0$ за время dt) с размерностью рад/сек или сек$^{-1}$.

Тогда $\bar{r}_0$ можно представить как сложную функцию $\bar{r}_0(\varphi(t))$.

Исследуемая производная вычисляется по известному правилу:

$$d\bar{r}_0/dt = d\bar{r}_0/d\varphi \cdot d\varphi/dt = d\bar{r}_0 \,/\, d\varphi \cdot \omega.$$

Для выяснения геометрического смысла и величины производной $d\bar{r}_0 \,/\, d\varphi$ найдем производную по φ от тождества $\overline{r_0^2} = 1$:

$$2\overline{\mathbf{r_0}} \cdot d\overline{\mathbf{r_0}}/d\varphi = 0$$

Сократив на 2 и введя обозначение $d\bar{r}_0/d\varphi = \bar{p}_0$, получим:

$$\bar{r}_0 \cdot \bar{p}_0 = 0.$$

Из равенства нулю скалярного произведения векторов следует, что вектора перпендикулярны: $\bar{r}_0 \perp \bar{p}_0$.

С точностью до малых величин более высокого порядка из рис. 2 следует:

$$|d\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0}| = |\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0}|d\varphi, \text{ т. е. } |\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0}| = |d\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} \,/\, d\varphi| = |\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{0}| = 1.$$

Окончательно запишем:

$$d\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0}/dt = \omega\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{0}. \tag{2}$$

С учетом (2) имеем:

$$\bar{\mathbf{V}} = d\bar{\mathbf{r}}/dt = dr/dt \cdot \bar{r}_0 + r \cdot \omega\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{0}. \tag{3}$$

Составляющая вектора скорости $dr/dt \cdot \bar{r}_0 = \bar{V}_r$ — характеризует изменение радиус вектора точки по величине и называется *радиальной.*

Составляющая $r \cdot \omega \bar{p}_0 = \bar{V}_p$ — характеризует изменение радиус вектора точки по направлению и называется *трансверсальной* или *поперечной.*

$$\text{То есть:} \quad \bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_P. \tag{4}$$

Причем из определения, вектор скорости точки направлен по касательной к ее траектории в сторону движения (см. рис. 3).

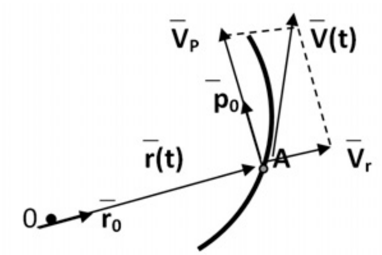


Рис. 3

Вектор $\bar{p}_0$ лежит в плоскости, проведенной через вектора $\bar{r}(t)$ и $\bar{V}(t)$ — соприкасающейся плоскости, и повернут от направления вектора $\bar{r}(t)$ на угол 90^0 в сторону вектора скорости $\bar{V}(t)$. Формула (3) применима для вычисления производной от любого вектора $\bar{H}(u) = H \cdot \bar{h}_0$ по скалярному аргументу u, где $\bar{h}_0$ — единичный вектор вектора $\bar{H}$. Значение производной определяется формулой:

$$d\bar{\mathbf{H}}/du = dH/du \cdot \bar{\mathbf{h}}_0 + H\omega\bar{\mathbf{p}}_0 \tag{5}$$

В этой формуле $\omega = d\varphi/du$ — угловая скорость (угол поворота вектора $\bar{h}_0$ на приращении аргумента du).

В частном случаи при H = const, т. е. когда вектор $\overline{\mathrm{H}}$ не изменяя своей величины, изменяется лишь по направлению, формулу вычисления данной производной:

$$d\overline{\mathbf{H}}/du = H\omega\overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}}, \tag{6}$$

которую можно представить в виде: $d\overline{\mathbf{H}}/dt = Hd\overline{\mathbf{H}}/dt = = H\left(\overline{\omega} \times \overline{h}_0\right) = (\overline{\omega} \times \overline{\mathbf{H}})$.

Пусть «u» произвольный скалярный аргумент, тогда

$$d\overline{\mathbf{H}}/du = d\overline{\mathbf{H}}/dt\,; dt/du = 1/dt/du\,; d\overline{\mathbf{H}}/dt = d\overline{\mathbf{H}}/du = \\ = k \cdot (\overline{\omega} \times \overline{\mathbf{H}}), \tag{7}$$

где к 1/ dt/du — любой безразмерный числовой коэффициент;

$\overline{\omega} \neq 0$ — произвольный вектор, содержание которого зависит от значения вектора $\overline{\mathrm{H}}$. В частности, если $\overline{\mathrm{H}}$ означает радиус-вектор точки, то размерность вектора $\overline{\omega}$ есть $сек^{-1}$, и вектор означает угловую скорость вращения радиус вектора точки.

Помножим (6) и (7) скалярно на вектор $\overline{\mathrm{H}}$:

$$\overline{\mathbf{H}}(d\overline{\mathbf{H}} \,/\, du) = H\omega\overline{\mathbf{H}}\overline{p}_0, \text{ или } \overline{\mathbf{H}}(d\overline{\mathbf{H}} \,/\, du) = \mathbf{k} \cdot \overline{\mathbf{H}}(\overline{\omega} \times \overline{\mathbf{H}}) = 0. \tag{8}$$

Так как по правилу смешенного произведения векторов $\overline{\mathrm{H}}(\overline{\omega} \times \overline{\mathrm{H}}) = 0$, то $\overline{\mathrm{H}} \perp \overline{p}_0$.

Применительно к задачам кинематики, оправданным является принять к = 1. Это утверждение можно обосновать теоремами «О существовании вектора угловой скорости» [2, с. 80–81] и теоремой «Об инвариантности вектора $\overline{\omega}$». Первая из них гласит: «При свободном движении абсолютно твердого тела в каждый момент времени существует вектор $\overline{\omega}$, определяющий вектор скорости точки тела относительно произвольного полюса». Вторая:

«Мгновенная угловая скорость свободного абсолютно твердого тела не зависит от выбора полюса» [2, с. 81–82].

Из теорем следует, что вектор мгновенной угловой скорости не зависит от выбора полюса и является свободным вектором. Тогда в формулах (7), (8) можно принять к = 1.

Обратимся к вычислению вектора ускорения точки — $\bar{a}(t)$.

В формуле (5) примем:

$$\bar{H} = \bar{V}(t) = V(t) \cdot \bar{\tau},$$

где $\bar{\tau}$ — единичный вектор (аналог вектора $\bar{h}_0$) вектора $\bar{V}(t)$.

$V(t)$ — определяет величину вектора скорости точки — аналог функции $H(u)$.

По формуле (5) находим:

$$a = d\bar{V}/dt = dV\,/\,dt \cdot \bar{\tau} + V\omega \cdot \bar{n}, \qquad (9)$$

где $\bar{n}$ — единичный вектор (аналог вектора $\bar{p}_0$) перпендикулярный вектору $\bar{\tau}$.

Вектора $\bar{a}_\tau = dV\,/\,dt \cdot \bar{\tau}$ и $\bar{a}_n = V\omega \cdot \bar{n}$ называются *тангенциальной* и *нормальной* составляющими полного ускорения точки соответственно. То есть:

$$a = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \qquad (10)$$

где $\bar{a}_\tau$ — характеризует изменение вектора скорости точки по величине;

$\bar{a}_n$ — характеризует изменение вектора скорости точки по направлению.

Полученные выводы иллюстрированы на рис. 4.

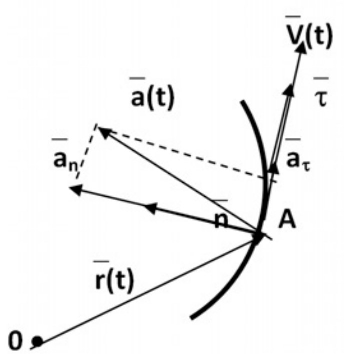


Рис. 4

Использование формулы (6) позволяет легко получить формулу Эйлера для вычисления скорости произвольной точки абсолютно твердого тела при его вращательном движении. Так, если радиус вращения произвольной точки тела (перпендикуляр, опущенный из точки на ось вращения) представить в качестве вектора с началом на оси вращения, то по свойству абсолютного твердого тела он остается постоянным по величине, меняясь лишь по направлению. Тогда по формуле (6):

$$\overline{V}_A = d\overline{R}_A/dt = k \cdot (\overline{\omega} \times \overline{R}_A), \qquad (11)$$

где $\overline{\omega}$ — угловая скорость вращения тела; $\overline{R}_A$ — радиус вращения точки. Причем, под $\overline{R}_A$ можно понимать любой радиус вектор точки A с началом на оси вращения; к =1.

О скалярном произведении векторов

Обратимся к скалярному произведению векторов. Напомним [1, с. 55], что скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является результат умножения их абсолютных величин на косинус угла между этими векторами: $\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos(\alpha)$ (см. рис. 5).

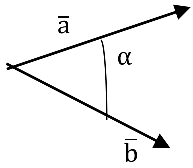


Рис. 5

Определение не связано с координатной системой и коммутативно, т. е.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$$

В физическом смысле это произведение означает проекцию одного вектора на направление второго [2, с. 22–23].

Если $0 < \alpha < \pi/2$, то проекция положительна;

При $\alpha=0$, $\bar{a} \parallel \bar{b}$; и их сумма равна алгебраической сумме;

при $\alpha= \pi/2$ проекция нулевая

При $\pi/2<\alpha< 3\pi/2$ проекция отрицательная.

Используя эти понятия, рассмотрим теорему «О проекциях скоростей точек тела».

Теорема: при любом движении **абсолютно твердого** тела проекции скоростей двух произвольно выбранных его точек на прямую, соединяющую эти точки, геометрически совпадают в каждый момент времени.

Доказательство: [3, с. 71–72].

На рис. 6. показано тело, совершающее свободное движение относительно абсолютной системы отсчета.

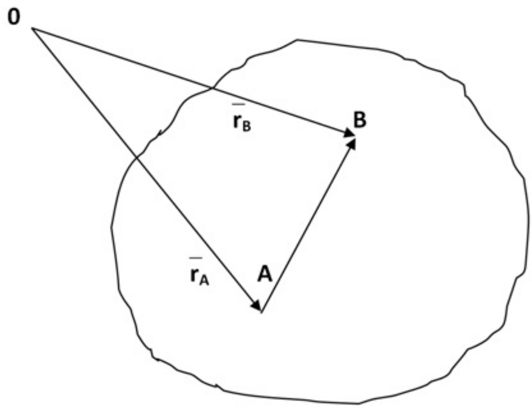


Рис. 6

Закон движения точек А и В тела опишем векторным способом.

Положение т. В по отношению к т. А определяется вектором $\overline{AB}$.

На основе рис. 6 запишем:

$$\bar{\mathbf{r}}_B - \bar{\mathbf{r}}_A = \overline{\mathbf{AB}}.$$

Возведем это равенство в квадрат:

$$(\bar{\mathbf{r}}_B - \bar{\mathbf{r}}_A)^2 = (\overline{\mathbf{AB}})^{\mathbf{2}}.$$

Учитывая свойство скалярного квадрата — $\overline{AB}^2 = AB^2$, а также свойство абсолютно твердого тела — AB = const, продифференцируем последнее равенство по времени:

$$2(\bar{\mathbf{r}}_B - \bar{\mathbf{r}}_A)(d\bar{\mathbf{r}}_B \,/\, dt - d\bar{\mathbf{r}}_A \,/\, dt) = 0$$

$$\text{Либо } \overline{\mathbf{AB}}\,\overline{\mathbf{V}}_B - \overline{\mathbf{AB}}\,\overline{\mathbf{V}}_A = 0. \quad (12)$$

где $\overline{\mathbf{AB}} = \bar{\mathbf{r}}_B - \bar{\mathbf{r}}_A$, $\overline{\mathbf{V}}_B = d\bar{\mathbf{r}}_B/dt$, $\overline{\mathbf{V}}_A = d\bar{\mathbf{r}}_A \,/\, dt$.

Расписав в (12) скалярные произведения векторов:

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{V_B} \cdot \cos(\alpha) — \mathbf{AB} \cdot \mathbf{V_A} \cdot \cos(\beta) = 0$$

и сократив на AB, получим $пр_{AB}V_B = пр_{AB}V_A$ (см. рис. 7): — **теорема доказана.**

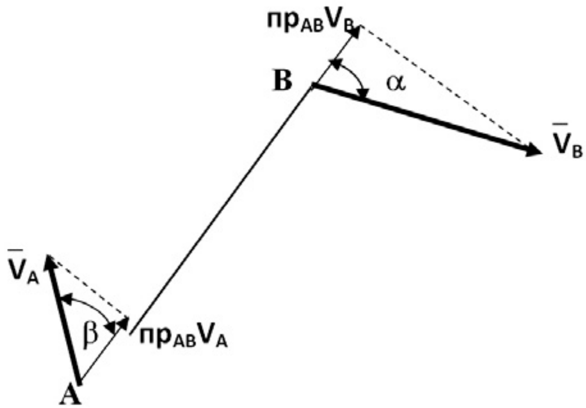


Рис. 7

Результат доказанной теоремы физичен и его можно было предсказать. В самом деле, т. к. по свойству абсолютно твердого тела AB = const , то перемещения точек A и B вдоль прямой AB на любом бесконечно малом отрезке времени dt должны геометрически совпадать.

Т. е. $пр_{AB}\, V_B\, dt = пр_{AB}V_A\, dt$

Сократив на dt , получаем результат теоремы.

Применение теоремы к твердому телу

В твердом деформируемом теле неравенство $\text{пр}_{AB}V_B \neq \text{пр}_{AB}V_A$ означает, что расстояние между точками A и B изменяется, то есть происходят линейные деформации в каждой точке отрезка AB по линии AB (см. рис. 8).

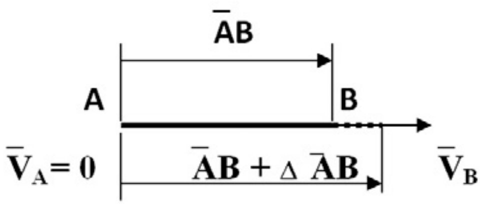
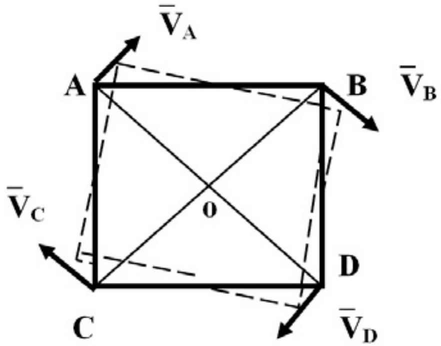


Рис. 8

$\Delta\ \overline{A}B = \overline{V}_B \cdot dt$ — абсолютная линейная деформация отрезка AB, т. е. перемещение подвижной т. B относительно неподвижной т. A;

$\dfrac{\Delta AB}{AB} = \varepsilon$ — относительная линейная деформация в точках отрезка AB в направлении этого отрезка.

Если в твердом теле (абсолютно твердом или деформируемом) выделить прямой угол, то при задании движения его точек, не противоречащего теореме о скоростях, угол не изменится. На рис. 9 показан плоский квадратный элемент бесконечно малых размеров, выделенный в теле. Скорости вершин прямоугольника равны по величине и ориентированы перпендикулярно его диагоналям, что не противоречит теореме о скоростях ни по отношению к диагоналям ни по отношению к сторонам элемента. На бесконечно малом отрезки времени dt перемещения вершин прямоугольника будут совпадать с направлением их скоростей.



$V_A = V_B = V_C = V_D$.

Рис. 9

В результате, элемент, как абсолютно твердое тело, повернется на бесконечно малый угол dφ вокруг неподвижной точки O. Углы при вершинах элемента и в точке O не изменятся, т. е. останутся прямыми.

В деформируемом твердом теле изменение прямого угла означает, что в вершине угла происходят угловые деформации в плоскости угла (см. рис. 10).

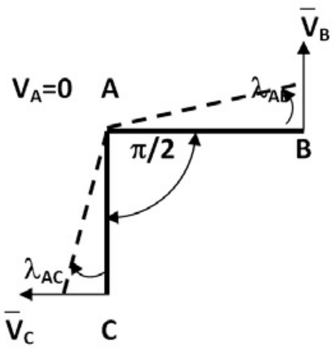
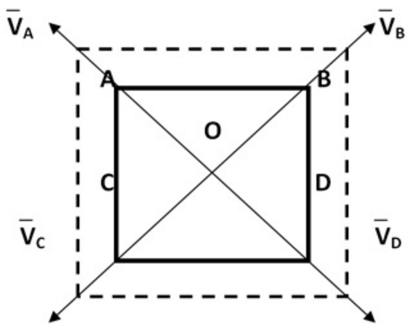


Рис. 10

Теорема о скоростях относительно сторон угла выполняется. Значит стороны не деформируясь, поворачиваются на угол λ_{AB} и λ_{AC} соответственно. Углом сдвига в точке А в плоскости угла называется угол $\gamma = |\lambda_{AB}| + |\lambda_{AC}|$. Причем принимается: $\gamma < 0$, если прямой угол увеличивается на величину γ, и $\gamma > 0$, если прямой угол уменьшается на величину γ.

Из рис. 9 и 10 следует, что линейные и угловые деформации, в общем случае, могут быть независимыми.

На рис. 11 приведен пример линейных деформаций квадратного элемента при отсутствии угловых деформаций.



$V_A = V_B = V_C = V_D$.

Рис. 11

В этом случае невыполнению теоремы о скоростях соответствуют только линейные деформации удлинения, как сторон, так и диагоналей элемента. Угловые деформации в вершинах элемента и в точке О отсутствуют.

Такой вид деформаций называется всесторонним растяжением.

Если в элементе, показанном на рис. 12, *а*, задать движение его вершин, противоречащее теореме о скоростях только по отношению к его диагоналям, то элемент деформируется в параллелограмм. Прямые углы при вершинах элемента изменятся. Значит, в вершинах элемента происходят угловые деформации в плоскости элемента.

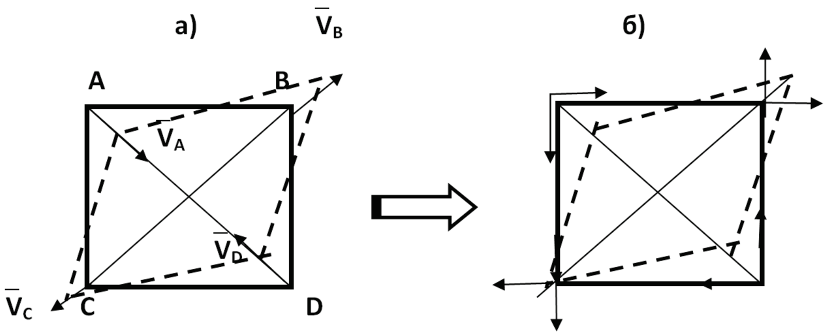


Рис. 12

Если вектора скоростей вершин элемента разложить на составляющие (см. рис. 12, *б*), то наблюдаем, что в направлении сторон элемента теорема о скоростях не нарушена, а значит стороны элемента не испытывают линейных деформаций и сохраняют свою величину. В точках же диагоналей элемента в направлении CB наблюдаются линейные деформации удлинения, а в направлении AD линейные деформации укорочения.

Такой вид деформаций элемента называется *чистым сдвигом.*

Деформации сдвига наблюдаются в элементе и при его нагружении, показанном на рис. 13. Здесь неподвижными являются вершины C и D элемента.

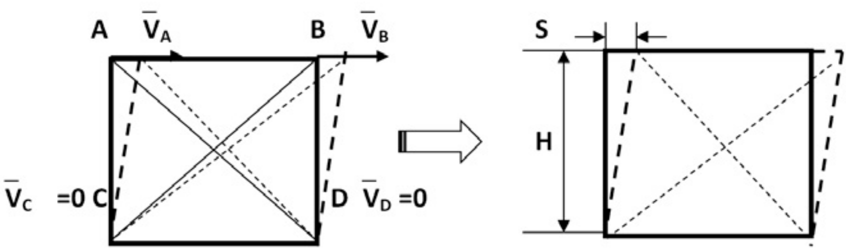


Рис. 13

Теорема о скоростях не выполняется только по отношению к диагоналям элемента, и выполняется в отношении его сторон. Угловые деформации элемента в его вершинах сопровождаются линейными деформациями диагоналей AD и CB. Стороны элемента деформаций не испытывают.

При малых значениях упругих деформаций принимают H = const;

S — *абсолютный сдвиг*.

Из рис. 12, *б* и 13 следует также, что стороны элемента ведут себя как абсолютно твердые брусья, сочлененные шарнирами в вершинах элемента. В элементе, показанном рис. 14, закрепим вершины A и C.

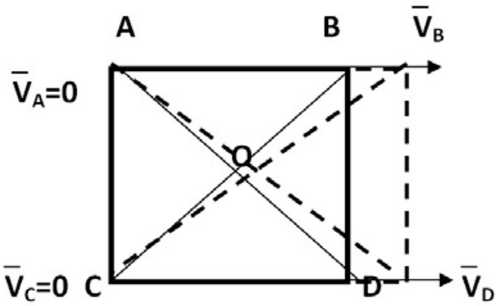


Рис. 14

Линейные деформации испытывают диагонали элемента и его стороны AB и CD. Угловые деформации происходят в точке пересечения диагоналей — т. O. Стороны AC и BD ведут себя как абсолютно твердые брусья.

На рис. 15 изображен элемент, скорости вершин которого перпендикулярны его диагоналям. Стороны AC и BD не деформируются. Стороны AB и CD линейно деформируются, удлиняясь и укорачиваясь соответственно. Тогда размер среднего отрезка ms не изменяется. Точка O как принадлежащая неподвижной оси симметрии kn, остается неподвижной. Точки m и s перемещаются, оставаясь принадлежащими сторонам AC и BD. Отрезок ms искривляется, принимая форму дуги окружности.

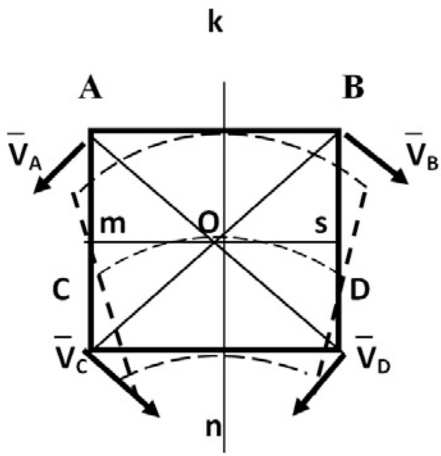


Рис. 15

Аналогичную форму получают и стороны AB и CD, с той лишь разницей, что они испытывают линейные деформации. Торцевые стороны AC и BD остаются перпендикулярными изогнутому отрезку ms.

Данный вид деформаций называется *чистым изгибом*.

Рассмотрим еще один вопрос, связанный с понятием скалярного произведения векторов. Так, в качестве основных характеристик систем сил в теоретической механике используются главный вектор, главный момент, главное произведение. Для изложения теоретической механики этих характеристик вполне достаточно. Однако, для обеспечения преемственности этой науки, например, с инженерным учением — сопротивление материалов полезно вспомнить такую дополнительную характеристику, как вириал. В сопротивлении материалов вектор силы является закрепленным, т. е. имеет конкретную точку приложения, положение которой можно задать ее радиус — вектором $\bar{r}_{oi}$, относительно произвольного полюса в плоскости S. Вариал силы это скалярная величина, определяемая формулой: $A_0 = \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{oi}} \cdot \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}$ — *вириал силы* относительно полюса и $A_0 = \sum(\bar{\mathbf{r}}_{\text{oi}} \cdot \bar{\mathbf{F}}_{\text{i}})$ — *главный вириал* системы сил Понятие вириала позволяет полнее проанализировать действие системы сил на твердое тело. Например, для пары сил $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}}$ **и** $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}}$ (см. рис. 16):

S — плоскость действия пары сил.

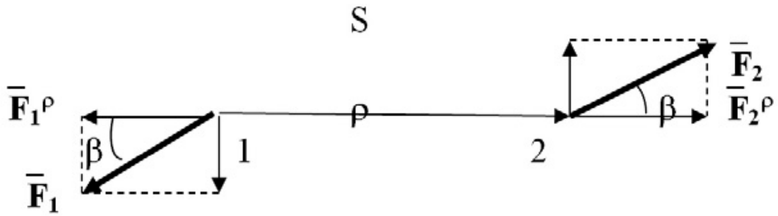


Рис. 16

$$A_o(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = (\bar{r}_{1,0} \cdot \bar{F}_1) + (\bar{r}_{2,0} \cdot \bar{F}_2) = |\bar{\rho}| \cdot |\bar{F}_1| \cos\beta. \quad (13)$$

Из (13) следует, что вириал пары сил не зависит от выбора полюса, т. е. является ее инвариантной характеристикой. Его значение зависит от угла β.

При $\beta = \pi/2$ вириал обращается в ноль $A(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = 0$, а линии действия сил пары перпендикулярны отрезку ρ. Такая пара сил вызывает вращение абсолютно твердого тела, а в деформируемом твердом теле может вызвать угловые деформации.

При $0 < \beta < \pi/2$ вириал будет положительным и действие пары сил, наряду с вращением, будет состоять в стремлении растянуть тело на отрезке ρ, за счет составляющих $\bar{F}_1^P$ и $\bar{F}_2^P$.

При $90° < \beta < 180°$ вериал отрицательный, и дополнительное действие пары сил на деформируемое твердое тело буде состоять в стремлении сжать тело на отрезке ρ.

При $\beta = 0$ $A(\bar{F}_1, \bar{F}_2) > 0$ и силы пары только растягивают.

При $\beta = 180°$ $A(\bar{F}_1, \bar{F}_2) < 0$ и силы пары только сжимают отрезок ρ твердого деформируемого тела. Причем, при $\beta = 0$ и при $\beta = 180°$ момент пары сил обращается в ноль $\bar{M}_o(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = 0$.

Заметим, что если приложить силы пары в одну точку тела, т. е. при $\rho = 0$, то обращаются в ноль и момент $\bar{M}_o(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = 0$ и вериал $A(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = 0$ пары сил. То есть действие на тело сил пара вообще отсутствует. И значит: две равные по величине и противоположные по направлению силы, приложенные в одну точку тела эквивалентны нулю.