

# ВВЕДЕНИЕ

Преобразования сигналов во многих случаях более успешно осуществляются при их цифровом представлении. Цифровые методы в отличие от аналоговых обеспечивают большую помехоустойчивость радиоэлектронных устройств, стабильность их характеристик, надежность, возможность обработки информации по быстро изменяющимся алгоритмам и ее хранения, универсализацию схемотехнических решений, зачастую более низкую стоимость, массу и габариты в сравнении с аналоговыми устройствами, выполняющими те же функции. Специальные методы обработки информации в цифровом виде позволяют решать задачи распознавания образов различной природы, снижать уровень шумов в сигналах, осуществлять их сжатие, что, в свою очередь, приводит к уменьшению полосы частот, занимаемой цифровым сигналом, в сравнении с полосой аналогового эквивалента, и осуществлять другие сложные преобразования, имеющие большое прикладное значение. Так, сжатие видеосигнала позволяет разместить в полосе частот, занимаемой одним каналом аналогового телевидения, пять-шесть каналов цифрового с высоким качеством изображения.

Интерес к дискретным функциям и их связи с аналоговыми прототипами был проявлен математиками задолго до их практического использования. Еще в 1841 году великий Огюстен Луи Коши сформулировал условия, при которых информация об аналоговом сигнале может быть однозначно получена по его дискретному представлению. Исследования по дискретизации были продолжены последующими поколениями математиков, неполный список которых включает Э. Бореля, Э.Т. и Дж.М. Уиттекеров, У. Феррера. С началом XX века теория дискретизации стала внедряться в практику. Появление прикладных за-

дач явилось мощным стимулом развития этой области математики. Большой вклад в решение общих вопросов и широкого спектра задач практической радиоэлектроники в этот период связан с именами Г. Найквиста, В. Котельникова, К. Шеннона. Основы цифрового представления дискретных сигналов были заложены в трудах Г. Лейбница и Д. Буля.

В области частот до единиц гигагерц и при малых уровнях мощности цифровые методы уверенно вытесняют аналоговые. Развитие элементной базы электронной техники, несомненно, будет уменьшать ограничения в использовании процедур цифровой обработки сигналов.

# 1. АНАЛОГОВЫЕ, ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ

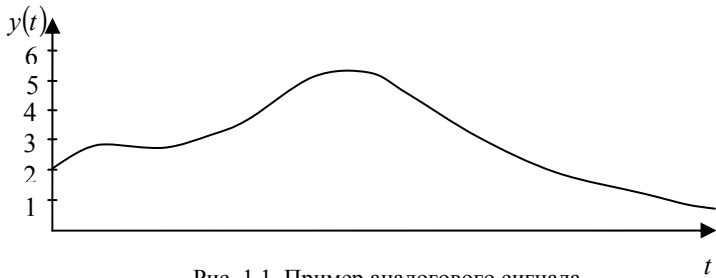


Рис. 1.1. Пример аналогового сигнала

Аналоговый сигнал – это сигнал, отображающий состояние того или иного процесса или системы в каждый момент времени (рис. 1.1). Информация содержится в изменениях величины сигнала во времени. Физическая природа сигнала определяется соответствующим параметром системы или процесса (ток, скорость, давление, деформация, напряжение и т.д.).

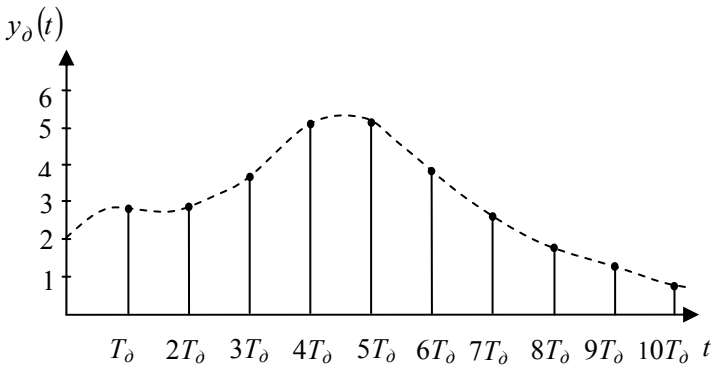


Рис. 1.2. Дискретный сигнал ( $T_d$  – интервал между отдельными выборками)

Дискретный сигнал – это сигнал, отображающий состояние процесса в отдельные моменты времени, это выборки (отсчеты) аналогового сигнала, осуществленные через определенный интервал (рис. 1.2).

Физическая природа дискретного сигнала, следовательно, совпадает с физической природой аналогового.

Цифровой сигнал – это дискретный сигнал, величина каждой выборки которого отображена в виде числа. Измерение при этом, естественно, выполняется с определенной точностью (масштабом). Поэтому число отображает количество масштабных единиц, содержащихся в дискретном образе. Например, если масштабной единицей (степенью точности измерения) является вольт, милливольт или микровольт, то число выражает соответственно количество вольт, милливольт или микровольт, содержащихся в сигнале. Масштабная единица называется квантом, а процедура выражения величины сигнала через масштабную единицу – квантованием. По сути дела, квантование – это дискретизация, но не аргумента функции, а ее значения.

Физическое содержание цифрового представления может совпадать с физической природой дискретизированного сигнала, но может и отличаться от него (например, значения скорости механического процесса в дискретные моменты времени могут быть отображены числом, физической природой которого являются ток или напряжение). На рис. 1.3 приведены значения цифрового сигнала (кода), соответствующие различным моментам времени на рис. 1.2. Числа, отображающие величину дискретного сигнала, представлены в двоичной системе счисления. Информация в данном случае содержится не в амплитудах импульсов (как в дискретном сигнале), а в двоичном числе (трехразрядном), выраженном комбинацией импульсов (набором нулей и единиц).

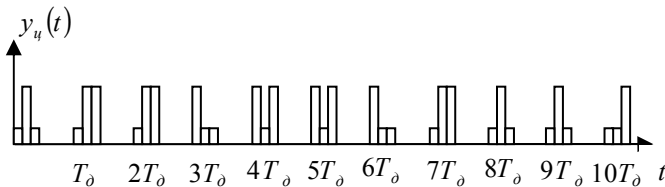


Рис. 1.3. Цифровое представление сигнала в двоичном коде (высокий уровень соответствует единице, низкий – нулю)

При этом нули и единицы должны передаваться в паузе между двумя соседними отсчетами.

Сравнивая аналоговую, дискретную и цифровую формы представления сигнала, можно прийти к выводу, что при передаче сигнала в аналоговой и дискретной формах он не подвергается процедуре измерения, а передача в цифровой форме подразумевает измерение его перед передачей.

Остановимся вначале на исследовании дискретного представления, поскольку цифровая форма является численным выражением дискретной в какой-либо системе счисления (чаще двоичной). Поэтому математический формализм описания дискретных сигналов будет справедлив и для цифровых. Различие появится лишь в аппаратной реализации математических процедур.

Дискретная функция  $f_o(t)$  может быть записана в виде:

$$f_o(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} f(\kappa T_o) \delta_1(t - \kappa T_o) \text{ или } f_o(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} f(t) \delta_1(t - \kappa T_o),$$

или

$$f_o(t) = f(t) \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \delta_1(t - \kappa T_o),$$

где  $f(t)$  - дискретизируемая аналоговая функция.

Знаком  $\delta_1(t - \kappa T_o)$  обозначена функция, значение которой равно единице от момента  $t = \kappa T_o$  до момента  $t_1 = \kappa T_o + \tau$  и равно нулю в другие интервалы:

$$\delta_1(t - \kappa T_o) = \begin{cases} 1, & \kappa T_o \leq t \leq \kappa T_o + \tau, \\ 0, & \kappa T_o > t > \kappa T_o + \tau. \end{cases}$$

Таким образом,  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t - \kappa T_o) dt = \tau$ .

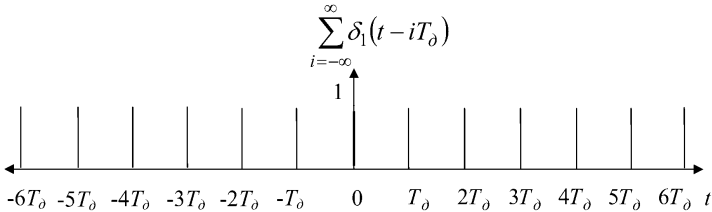


Рис. 1.4. Фрагмент графика функции  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_1(t - iT_o)$

Параметр  $\tau$  учитывает длительность реальной выборки (отсчета). Внутри интервала времени выборки функция  $f(t)$  считается неизменной. Тогда  $f(t)\delta_1(t - \kappa T_o)$  представит собой прямоугольный импульс длительностью  $\tau$  и амплитудой  $f(\kappa T_o)$ .

Длительность импульса выборки будет учитываться лишь при проведении процедур интегрирования функции  $\delta_1$ . Во всех других случаях выборка считается идеальной, то есть предполагается  $\tau \rightarrow 0$ . Функция  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_1(t - \kappa T_o)$  для этого идеального случая приведена на рис. 1.4. Каждое из слагаемых  $\delta_1(t - \kappa T_o)$  становится равным единице только при  $t = \kappa T_o$ .

Аналоговый, дискретный и цифровой сигналы могут взаимно преобразовываться. Способ преобразования аналогового сигнала в дискретный сводится к фиксации значений функции в определенные моменты времени. Преобразование дискретного сигнала в цифровой осуществляется с помощью устройств, сравнивающих дискретный сигнал с масштабным коэффициентом, т.е., по сути, измеряющих с определенной точностью дискретный сигнал и отображающих его значение в цифровой форме. Эта процедура выполняется аналого-цифровыми преобразователями, принципы работы которых будут рассмотрены далее. Обратное преобразование цифрового сигнала в дискретный или ступенчато изменяющийся осуществляется цифроаналоговыми преобразователями, принципы работы и устройство которых тоже будут исследованы в дальнейшем.

Дискретный сигнал преобразуется в аналоговый, если его пропустить через фильтр низких частот (аналогично тому, как из протектированного амплитудно-модулированного колебания выделяется огибающая). Однако для точного воспроизведения аналогового сигнала из дискретного необходимо при осуществлении процедуры дискретизации выполнение ряда требований, т.е. в цепочке переходов аналоговый — дискретный — аналоговый первое звено будет совпадать с третьим только при определенных условиях. Взаимная связь дискретного и аналогового сигналов является наиболее важной частью общего процесса переходов из аналоговой формы в цифровую и обратно. Поэтому данной связи уделим большее внимание и основное математическое описание переходов аналог — цифра — аналог посвятим взаимной связи *дискретных* и *аналоговых* функций,

подразумевая каждый раз, что дискретный во времени сигнал может быть дискретизирован и по амплитуде (квантован) и представлен в цифровой форме. Условия однозначной связи дискретного и аналогового сигналов следуют из общих принципов представления функций ортонормированными системами. Напомним их, начав с рядов и интегралов Фурье.

Ограниченная и кусочно-непрерывная периодическая функция может быть разложена в ряд Фурье, т.е. представлена системой функций  $\{e^{i\alpha t}\}$ . Записывается ряд следующим образом:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{in\omega_0 t}, \quad (1.1)$$

где  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  – круговая частота изменения функции,  $T$  – период колебаний,

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (1.2)$$

- коэффициент разложения, характеризующий вес гармоники с частотой  $n\omega_0$  в спектре функции.

Если функция непериодическая, то она может быть представлена интегралом Фурье

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) e^{i2\pi f t} df, \quad (1.3)$$

где  $\omega = 2\pi f$  – круговая и линейная частоты,

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (1.4)$$

- спектральная плотность (спектральная функция), характеризующая вес синусоидального сигнала частоты  $\omega$  в спектре функции. Спектральная функция  $\dot{S}(\omega)$  имеет размерность, равную произведению размерностей  $F(t)$  и  $t$  (или отношению

$F(t)$  и  $\frac{1}{t}$ ):

$$[\dot{S}(\omega)] = [F(t)] \cdot [t] = \frac{[F(t)]}{\left[\frac{1}{t}\right]} = \frac{[F(t)]}{[f]},$$

(например,  $\frac{[Вольт]}{[Герц]}$ ,  $\frac{[Ватт]}{[Герц]}$ ,  $\frac{[Ампер]}{[Герц]}$ ).

Соотношение (1.3) называется обратным преобразованием Фурье, а соотношение (1.4) – прямым преобразованием Фурье.

## 1.1. Дискретизация аналоговой функции

Используя представления Фурье и общие принципы разложения произвольной (в определенной степени) функции в ряд по ортонормированным системам, установим связь между аналоговым сигналом и его дискретным образом. Связь оказывается однозначной, если аналоговый сигнал имеет ограниченный спектр.

На первый взгляд кажется, что это требование является серьезным препятствием в использовании дискретных (а следовательно, и цифровых) сигналов взамен аналоговых. Однако, если учесть, что спектр практически всех природных сигналов можно ограничить (звуковых – частотой 20 кГц, видеосигналов – частотой 6 - 8 МГц, сигналов биологических систем – частотой 1 - 2 кГц и т.д.), то оно практически во всех случаях оказывается выполнимым.

В общем случае спектральная функция  $\dot{S}(\omega)$  в области  $0 \leq \omega \leq \omega_g$ , где  $\omega_g$  - верхняя граничная частота в спектре сигнала, может произвольным способом зависеть от частоты  $\omega$ . Каждому виду зависимости  $\dot{S}(\omega)$ , используя обратное преобразование Фурье, можно поставить в соответствие определенную функцию времени.

Рассмотрим наиболее простой случай. Допустим, что спектральная функция отлична от нуля и постоянна в области частот  $0 \leq \omega \leq \omega_g$  и равна нулю при  $\omega > \omega_g$ . Итак,

$$\dot{S}(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega| \leq \omega_g, \\ 0, & |\omega| > \omega_g. \end{cases}$$

По заданной спектральной функции на основе обратного преобразования Фурье найдем временную зависимость сигнала:



$$\vartheta_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} S_0 e^{i\omega t} d\omega,$$

$$\vartheta_0(t) = \frac{S_0}{\pi} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} = \frac{S_0}{\pi} \sin \omega_0 t = \frac{S_0 \omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}.$$

Функция  $\frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$  равна единице при  $t = 0$  и, колеблясь, спадает до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Нули функции соответствуют нулям числителя  $(\sin \omega_0 t)$  и определяются из соотношения  $\omega_0 t = \pm \kappa \pi$ ,  $\kappa = (1, 2, 3, \dots)$ .

Та же функция, сдвинутая относительно нуля на интервал времени  $t_0$ , записывается в виде:

$$\vartheta(t) = \frac{S_0 \omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0 (t - t_0)}{\omega_0 (t - t_0)},$$

а ее спектральная функция —  $\dot{S}(\omega) = S_0 e^{-i\omega t_0}$ . (В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} d(t - t_0) = \dot{S}(\omega) e^{-i\omega t_0}.)$$

Покажем, что набор функций  $\vartheta(t)$  с определенным законом изменения  $t_0$  представляет собой ортогональную систему функций.

Обозначим  $\vartheta_m(t)$  и  $\vartheta_n(t)$  две функции рассматриваемого вида с различным  $t_0$  ( $\vartheta_m$  имеет запаздывание  $t'_0$ , а  $\vartheta_n - t''_0$ ) и покажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t) \vartheta_m(t) dt = 0 \text{ для } m \neq n \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t) \vartheta_m(t) dt \neq 0 \text{ для } m = n.$$

Используя преобразование Фурье, записываем:

$$\vartheta_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_m(\omega) e^{i\omega t} d\omega \text{ и подставляем это в интегралы:}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t) \vartheta_m(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_m(\omega) e^{i\omega t} d\omega dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_m(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t) e^{i\omega t} dt \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_m(\omega) \dot{S}_n^*(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Пределы интегрирования нужно заменить на  $\pm\omega_\epsilon$  в связи с тем, что спектр ограничен  $\omega_\epsilon$ .

$$\dot{S}_m(\omega) = S_0 e^{-i\alpha\omega'_0}; S_n = S_0 e^{-i\alpha\omega''_0}; S_n^*(\omega) = S_0 e^{i\alpha\omega''_0}.$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_\epsilon}^{\omega_\epsilon} \dot{S}_m \dot{S}_n^* d\omega = \frac{S_0^2 e^{i\omega(t''_0 - t'_0)}}{2\pi i(t''_0 - t'_0)} \Big|_{-\omega_\epsilon}^{\omega_\epsilon} = \frac{S_0^2 \omega_\epsilon \sin \omega_\epsilon(t''_0 - t'_0)}{\pi \omega_\epsilon(t''_0 - t'_0)}.$$

Условие ортогональности выполняется (то есть последнее выражение равно нулю), если  $\omega_\epsilon(t''_0 - t'_0) = \kappa\pi$ , ( $\kappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ).

$$2\mathcal{P}_\epsilon(t''_0 - t'_0) = \kappa\pi, \text{ откуда } t''_0 - t'_0 = \frac{\kappa}{2f_\epsilon}.$$

Поскольку  $t''_0$  и  $t'_0$  произвольны, то, полагая  $t'_0 = 0$ , получим  $t''_0 = \frac{\kappa}{2f_\epsilon}$  или, опустив индекс,  $t_0 = \frac{\kappa}{2f_\epsilon}$ .

$$\text{Если } t''_0 = \frac{\kappa''}{2f_\epsilon}, \text{ а } t'_0 = \frac{\kappa'}{2f_\epsilon}, (\kappa' \neq \kappa''), \text{ то } t''_0 - t'_0 = \frac{\kappa}{2f_\epsilon}$$

всегда выполняется.

Найдем норму функций  $\dot{S}_m(\omega)$ , т.е. коэффициент, на который нужно умножить  $\dot{S}(\omega)$ , чтобы  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_\epsilon}^{\omega_\epsilon} \dot{S}_m \dot{S}_n^* d\omega = 1$  при  $m = n$ .

Если  $m = n$ , то  $t''_0 = t'_0$ , и выражение справа в интеграле  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_\epsilon}^{\omega_\epsilon} \dot{S}_m \dot{S}_n^* d\omega$  равно  $\frac{S_0^2 \omega_\epsilon}{\pi}$ . Приравняв это выражение к единице, т.е. нормировав функцию к единице, получим  $S_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_\epsilon}}$ .

С учетом этого  $\vartheta_\kappa(t)$  примет вид:

$$\vartheta_\kappa(t) = S_0 \frac{\omega_\epsilon}{\pi} \frac{\sin \omega_\epsilon(t - t_0)}{\omega_\epsilon(t - t_0)} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_\epsilon}} \frac{\sin \omega_\epsilon \left( t - \frac{\kappa\pi}{\omega_\epsilon} \right)}{\omega_\epsilon \left( t - \frac{\kappa\pi}{\omega_\epsilon} \right)}.$$

Таким образом, мы получили общий вид функций ортонормированной системы с ограниченным спектром. В соответствии с общими правилами любую функцию со спектром, не превышающим  $\omega_g$ , можно разложить в ряд по этим функциям.

Сделаем это.

Представим функцию  $U(t)$  с ограниченным спектром в виде ряда по функциям  $\vartheta_\kappa = (t)$ :

$$U(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_\kappa \vartheta_\kappa(t).$$

В соответствии с общим правилом нахождения коэффициентов разложения по ортонормированной системе

$$c_\kappa = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_\kappa(t) U(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \dot{S} \dot{S}_\kappa^* d\omega,$$

$$\dot{S}_\kappa = S_0 e^{-i\omega \frac{\kappa\pi}{\omega_g}} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} e^{-i\omega \frac{\kappa\pi}{\omega_g}}.$$

Величина  $\dot{S}$  – спектральная плотность функции  $U(t)$ .

Вводя значение  $\dot{S}_\kappa^*$  в формулу для  $c_\kappa$ , получаем:

$$c_\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} S_0 e^{i\omega \frac{\kappa\pi}{\omega_g}} \dot{S} d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \underbrace{\left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \dot{S} e^{i\omega \frac{\kappa\pi}{\omega_g}} d\omega \right]}.$$

Если бы вместо  $\frac{\kappa\pi}{\omega_g}$  в показателе экспоненты было  $t$  (текущее время), то выражение в квадратных скобках было бы обратным преобразованием Фурье и равнялось бы  $U(t)$ . Но  $\frac{\kappa\pi}{\omega_g}$  –

момент времени. Поэтому и  $U(t)$  равно  $U\left(\frac{\kappa\pi}{\omega_g}\right)$ , т.е. значению

$U(t)$  в момент  $t = \frac{\kappa\pi}{\omega_g}$ .

Обозначив его  $U_\kappa$ , для  $c_\kappa$  получим:  $c_\kappa = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} U_\kappa$ , и ряд примет

вид:

$$U(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U_{\kappa} \frac{\sin \omega_{\theta} \left( t - \frac{\kappa \pi}{\omega_{\theta}} \right)}{\omega_{\theta} \left( t - \frac{\kappa \pi}{\omega_{\theta}} \right)} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U_{\kappa} \frac{\sin \omega_{\theta} \left( t - \frac{\kappa}{2f_{\theta}} \right)}{\omega_{\theta} \left( t - \frac{\kappa}{2f_{\theta}} \right)}.$$

Из этого соотношения следует вывод, звучащий следующим образом:

«Сигнал с ограниченным спектром полностью определяется своими значениями, взятыми через интервал времени

$$\Delta t = \frac{1}{2f_{\theta}} \text{»}.$$

Внося в скобки  $\omega_{\theta}$ , можно получить еще одну форму записи ряда:

$$U(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U_{\kappa} \frac{\sin(\omega_{\theta} t - \kappa \pi)}{(\omega_{\theta} t - \kappa \pi)}. \quad (1.5)$$

Таким образом, если функция имеет ограниченный спектр, то бесконечный ряд (1.5) позволяет восстановить ее по дискретным выборкам, то есть этот ряд устанавливает связь между дискретным и аналоговым сигналами.

## 1.2. Восстановление аналогового сигнала из дискретного

Ряд (1.5) можно рассматривать как выражение, связывающее напряжение на выходе какого-то устройства  $U(t)$  с характеристикой устройства и напряжением на его входе в виде последовательности отсчетов  $U_{\kappa}$ . Покажем это.

Подвергнем обе стороны (1.5) прямому преобразованию Фурье (найдем спектр выходного сигнала):

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{вых}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U_{\kappa} \frac{\sin(\omega_{\theta} t - \kappa \pi)}{(\omega_{\theta} t - \kappa \pi)} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U_{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega_{\theta} t - \kappa \pi)}{(\omega_{\theta} t - \kappa \pi)} e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных  $\omega_6 t - \kappa \pi = x$ . Тогда

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U_{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega_6 t - \kappa \pi)}{(\omega_6 t - \kappa \pi)} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\omega_6} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U_{\kappa} e^{-i\frac{\omega}{\omega_6} \kappa \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-i\omega_6 x} dx$$

( $\omega_1 = \frac{\omega}{\omega_6}$  - относительная частота).

Интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-i\omega_6 x} dx$  может быть вынесен за знак

суммы, поскольку это постоянная величина:

$$\dot{U}_{\text{вых}}(\omega) = \frac{1}{\omega_6} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-i\omega_6 x} dx \right) \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U_{\kappa} e^{-i\frac{\omega}{\omega_6} \kappa \pi}. \quad (1.6)$$

Последний интеграл можно представить в виде алгебраической суммы четырех интегралов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-i\omega_6 x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos \omega_1 x}{x} dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin \omega_1 x}{x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cdot (1 - \omega_1)}{x} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cdot (1 + \omega_1)}{x} dx - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \cdot (1 - \omega_1)}{x} dx - \\ &- \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \cdot (1 + \omega_1)}{x} dx. \end{aligned}$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x (1 - \omega_1)}{x (1 - \omega_1)} dx (1 - \omega_1) = \begin{cases} \pi & \text{при } \omega_1 < 1, \text{ т.е. при } \omega < \omega_6, \\ -\pi & \text{при } \omega_1 > 1, \text{ т.е. при } \omega > \omega_6. \end{cases}$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x (1 + \omega_1)}{x (1 + \omega_1)} dx (1 + \omega_1) = \pi \text{ при всех } \omega.$$

Два последних интеграла равны нулю.

$$\text{Таким образом, } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-i\omega_6 x} dx = \begin{cases} \pi & \text{при } \omega < \omega_6, \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_6. \end{cases}$$

Входной сигнал  $U_{\text{вх}}(t)$  представляет собой последовательность импульсов амплитудой  $U_{\kappa}$  и длительностью  $\tau$ , сдвинутых друг относительно друга на интервал  $\Delta t = \frac{1}{2f_{\text{г}}} = \frac{\pi}{\omega_{\text{г}}} = T_{\text{д}}$ :

$$U_{\text{вх}}(t) = \sum U(\kappa T_{\text{д}}) \delta_1(t - \kappa T_{\text{д}}) = \sum U_{\kappa} \delta_1(t - \kappa T_{\text{д}}).$$

Спектр  $\dot{U}_{\text{вх}}(\omega)$  сигнала  $U_{\text{вх}}(t)$  определяется интегралом Фурье:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{вх}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U(\kappa T_{\text{д}}) \delta_1(t - \kappa T_{\text{д}}) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U(\kappa T_{\text{д}}) \int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t - \kappa T_{\text{д}}) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Из определения  $\delta_1$  следует:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t - \kappa T_{\text{д}}) e^{-i\omega t} dt &= e^{-i\omega \kappa T_{\text{д}}} \int_{\kappa T_{\text{д}}}^{\kappa T_{\text{д}} + \tau} \delta_1(t - \kappa T_{\text{д}}) e^{-i\omega(t - \kappa T_{\text{д}})} d(t - \kappa T_{\text{д}}) = \\ &= \tau \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} e^{-i\omega \frac{\tau}{2}} e^{-i\omega \kappa T_{\text{д}}}. \end{aligned}$$

С учетом  $T_{\text{д}} = \frac{1}{2f_{\text{г}}} = \frac{\pi}{\omega_{\text{г}}}$  и  $U(\kappa T_{\text{д}}) = U_{\kappa}$  получаем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{вх}}(\omega) &= \tau \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} e^{-i\omega \frac{\tau}{2}} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U_{\kappa} e^{-i\frac{\omega}{\omega_{\text{г}}} \kappa \pi}, \\ \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} U_{\kappa} e^{-i\frac{\omega}{\omega_{\text{г}}} \kappa \pi} &= \dot{U}_{\text{вх}}(\omega) \frac{1}{\tau} \frac{\omega \frac{\tau}{2}}{\sin \omega \frac{\tau}{2}} e^{i\omega \frac{\tau}{2}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если связь входного и выходного сигналов в частотной области записать в виде  $\dot{U}_{\text{вых}}(\omega) = \dot{K}(\omega) \dot{U}_{\text{вх}}(\omega)$ , то, подставив (1.7) в (1.6), можно прийти к выводу, что

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega) &= \frac{\pi}{\omega_{\text{г}} \tau} \frac{\omega \frac{\tau}{2}}{\sin \omega \frac{\tau}{2}} e^{i\omega \frac{\tau}{2}} = \frac{T_{\text{д}}}{\tau} \frac{\omega \frac{\tau}{2}}{\sin \omega \frac{\tau}{2}} e^{i\omega \frac{\tau}{2}} \text{ при } \omega < \omega_{\text{г}}, \\ \dot{K}(\omega) &= 0 \text{ при } \omega > \omega_{\text{г}}. \end{aligned}$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)