Содержание

Предисловие ко второму изданию

Любезного читателя, купившего, укравшего, одолжившего, взявшего в библиотеке или иным способом получившего в постоянное или временное владение настоящую книгу, прошу прочесть предисловие к первому изданию. Оно идёт сразу вслед за этим предисловием.

Но ведь читатель сначала должен решить, стоит ли ему хотя бы фрагментарно читать настоящую книгу. Поэтому сообщаю, на кого она рассчитана. **Настоящая книга рассчитана на образованных дилетантов**.

Приятно отметить, что ошибку в одном из чертежей первого тиража первого издания указал мне вовсе не математик, а лингвист доктор филологических наук Анатолий Фёдорович Журавлёв.

Книга не вышла бы в свет, если бы этого не пожелало издательство «Альпина нон-фикшн». Приношу глубокую признательность этому издательству в лице тех, чьё содействие я ощутил.

Это генеральный директор Павел Дмитриевич Подкосов. Именно он позвонил мне и предложил переиздать «Апологию математики». Он пошёл мне навстречу в важном для меня вопросе: сделать исключение из стандартов издательства и использовать букву ***ё*** с двумя диакритическими точками. Личное общение с ним было приятным и полезным.

Это менеджер проектов Александра Михайловна Шувалова. С ней я вёл постоянную переписку. Она взяла на себя труд быть посредником между автором и генеральным директором, а также между автором и редактором книги.

Это редактор книги Маргарита Евгеньевна Савина. Не будучи математиком, она провела героическую работу по редактированию книги хотя и популярной, но всё же математической. Более того, она поправила некоторые формулы в этой книге.

Предисловие к первому изданию

Редкий читатель добирается до середины предисловия, поэтому главное следует сказать в начале. В тексте этого сборника наряду со всем знакомыми кавычками-ёлочками и кавычками-лапками применяются *одинарные* кавычки. Они называются также *марровскими.* Закрывающая марровская кавычка имеет вид запятой, поднятой на верхнюю линию шрифта (иногда опрокинутой «вниз головой» и одновременно зеркально отражённой). Открывающая марровская кавычка также выглядит как поднятая запятая, но непременно либо отражённая, либо опрокинутая. Марровские кавычки применяются для обозначений понятий и смыслов, то есть тех абстрактных сущностей, которые есть лишь в нашем сознании. Надеюсь, что всё станет ясным из двух приводимых ниже примеров.

1. Фразу *Слово «число» выражает понятие числа* можно записать так: *Слово «число» выражает понятие ‘число’*.
2. Фразу *Смысл предложения «Петя съел яблоко» состоит в том, что Петя съел яблоко* можно записать так: *Смысл предложения «Петя съел яблоко» есть ‘Петя съел яблоко’*.

Пропуски в цитатах обозначены многоточием, заключённым в квадратные скобки [...], чтобы читатель не путал его с многоточием, употреблённым автором цитаты.

В сборник вошли девять текстов, написанных автором в разное время, с 1965 по 2008 г. Все они были в своё время опубликованы[1]. Однако при подготовке сборника тексты подвергались переработке, иногда минимальной, а иногда довольно существенной. Наилучший способ получить представление об их тематике — заглянуть в содержание; все они в той или иной степени относятся (или хотя бы примыкают) к не имеющей чётких границ области знания, которую одни именуют *философией математики,* другие — *основаниями математики,* третьи — ещё как-нибудь. К этой же области принадлежат работы А. Н. Колмогорова и П. К. Рашевского, включённые в сборник в качестве приложений I и II. Автор имел честь быть учеником А. Н. Колмогорова и слушать лекции П. К. Рашевского во время учёбы в Московском университете.

Сочиняя включённые в сборник тексты, автор если кого и видел в качестве читателя, то отнюдь не профессионального математика. Уж скорее (в большинстве случаев) гуманитария. Правильнее всего будет сказать, что книга рассчитана на образованного дилетанта. Приходилось поэтому выбирать между понятностью и точностью. Предпочтение отдавалось понятности. (За неточности прошу прощения у коллег-математиков. Достигнуть абсолютной точности всё равно невозможно. Как, впрочем, и абсолютной понятности — вообще чего-либо абсолютного.) Тем не менее читателю-нематематику отдельные места могут показаться трудными для восприятия. Возможно также, что некоторую сообщаемую автором информацию он сочтёт избыточной, утяжеляющей чтение. Что ж, такие места автор советует пропускать, как и всё, что читатель посчитает неинтересным.

Должен также заметить, что отдельные сюжеты и даже рисунки повторяются в тексте сборника (но не в пределах одной и той же статьи). Вызвано это стремлением к тому,

[1] Сведения о предыдущих публикациях приведены в конце настоящего издания на с. 617.

чтобы каждую статью можно было читать как отдельное произведение, не обращаясь к другим статьям сборника. В большинстве случаев независимо друг от друга можно читать и разделы статей.

Хотел бы выразить глубокую благодарность заместителю главного редактора издательства «Амфора» Елене Сергеевне Суворовой, которая способствовала выходу в свет этой книги, и Татьяне Германовне Филатовой, которая эту книгу редактировала. Работать с ними было приятно.

Из предисловия к сборнику переводов «Математика в современном мире»

Современный мир неожиданно обнаружил, что математика уверенно расположилась в самых разных его частях и уголках[1]. Несмотря на то что вторжение математики продолжается — и со всё возрастающей интенсивностью, — удивление по этому поводу скорее даже убывает: математическая экспансия стала привычной. Сейчас уже все смирились со словосочетаниями «математическая биология», «математическая лингвистика», «математическая экономика», «математическая психология»; и какую дисциплину ни возьми, вряд ли кому-нибудь покажется невозможным присоединение к её наименованию эпитета «математический».

Распространение математики вширь сопровождается её проникновением вглубь; математика занимает теперь видное положение в жизни общества. Изменилось и традиционное представление о математиках: место паганелеобразных чудаков заняли молодые люди в ковбойках, увлекающиеся лыжным спортом. Всё большее число родителей желает определить своих детей в школы с математическим уклоном: математика стала модной профессией.

Исчерпывающие причины такого стремительного (в течение последних 10–15 лет) изменения роли математики

[1] Прошу читателя иметь в виду, что этот текст впервые был опубликован в 1967 г. К этому периоду и следует относить слово «современный».

в современном мире, конечно, легче будет установить будущим историкам науки, чем нам, наблюдающим его сегодня. Однако уже сейчас можно, пожалуй, сказать, что основная причина заключается не только и не столько в конкретных успехах последних лет, сколько в осознании необъятных возможностей применения математики и появлении возросших потребностей в использовании этих возможностей.

Тем не менее повсеместное проникновение математики некоторым кажется загадочным, а некоторым — подозрительным. В самом деле, не вызывает сомнений право на всеобщее признание, скажем, физики или химии: физика открывает нам новые мощные источники энергии и новые средства быстрой связи, химия создаёт искусственные ткани, а сейчас покушается и на создание искусственной пищи. (Сказанное не претендует, разумеется, на какое-либо определение и тем более ограничение роли физики и химии.) Неудивительно, что эти науки, помогающие человеку в его извечных поисках еды, одежды, источников силы и способов связи, прочно вошли в нашу жизнь, заняв в ней почётное место. А ведь математика проникла даже в науки, традиционно считающиеся гуманитарными. И хотя, например, в языкознании пользуются физическими приборами для исследования устной речи, никто не говорит о «физической лингвистике».

Так что же даёт людям математика, теоретическая наука, которая не открывает ни новых веществ, как химия, ни новых средств перемещения предметов или передачи сигналов, как физика? И почему появление в какой-либо отрасли науки математических методов исследования или хотя бы просто математического осмысления соответствующей системы понятий и фактов всегда означает достижение этой отраслью определённого уровня зрелости и начало нового этапа в её дальнейшем развитии? Наиболее распространённый в недавнем прошлом ответ состоял в том, что математика умеет хорошо вычислять и тем самым позволяет находить в нужных случаях требуемые цифровые данные. Однако при всей важности вычислительного аспекта математики — и особенно в последние годы, ознаменованные столь бурным развитием вычислительной техники, — этот аспект оказывается и второстепенным, и вторичным при попытке объяснить причины математизации современного мира.

Любая попытка дать краткое объяснение этих причин неизбежно приведёт к неполной и неточной формулировке. Если всё же заранее согласиться на это, то можно сказать следующее: математика предлагает весьма общие и достаточно чёткие модели для изучения окружающей действительности, в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками; действительность же так усложнилась (как за счёт познания новых её сторон, так и за счёт создания человеком новых её форм), что без упрощающих, огрубляющих, формализующих, охватывающих лишь одну сторону явления моделей ныне не обойтись. Появление таких моделей в какой-либо отрасли науки свидетельствует о том, что система понятий этой отрасли уточнилась настолько, что может быть подвергнута строгому и абстрактному, т. е. математическому, изучению. Такое изучение, в свою очередь, играет решающую роль в дальнейшем уточнении понятий, а следовательно, и в успешном их применении. Математическая модель нередко задаётся в виде особого «языка», предназначенного для описания тех или иных явлений. Именно так, в виде языка, возникли в XVII в. дифференциальное и интегральное исчисления. Важнейшим примером математического языка, описывающего количественную сторону явлений, служит «язык цифр»; вот почему упомянутый выше вычислительный аспект математики как производный от её основного языкового аспекта мы назвали вторичным. Замечательно, что, хотя математическая модель создаётся человеческим разумом, она, будучи создана, может стать предметом объективного изучения; познавая её свойства, мы тем самым познаём и свойства отражённой моделью реальности.

Сказанным обусловлен и специфический характер математических открытий. Естественно-научные открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства окружающего мира. Математические же открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства рассматриваемых моделей мира, а наиболее революционные открытия дают начало новым моделям. Так, поистине революционный характер носило осознание древними бесконечности натурального ряда, а точнее, создание такого понятия натурального числа (такой модели), при котором натуральных чисел оказывалось бесконечно много (ведь представление, что числовой ряд обрывается, скажем, на миллиарде, вряд ли могло быть опровергнуто прямым наблюдением). Возникнув как инструмент исследования мира, понятие натурального числа само стало предметом исследований, приведших к выявлению скрытых, но объективных свойств этого понятия. Поразительным достижением античной математики было, например, установление бесконечности множества[1] простых чисел — поразительным как по постановке вопроса о бесконечности, хотя и без употребления самого слова «бесконечность», так и по безукоризненной точности формулировки ответа (как гласит 20-е предложение книги IX Евклидовых «Начал», «простых чисел существует больше всякого предложенного количества простых чисел») и по неожиданной простоте доказательства. Точно так же принятая нами геометрическая картина мира неизбежно приводит к существованию несоизмеримых отрезков, потрясшему ещё пифагорейцев.

Появление новых моделей нередко означает принципиальный поворот в развитии математики. Один из таких

---

[1] *Множество* — принятый в математике синоним слова «совокупность».

переломных моментов связан с величайшими достижениями математической мысли прошлого века — открытием неевклидовой геометрии (правильнее сказать, «неевклидовых геометрий») и возникновением теории бесконечных множеств. Открытие неевклидовых геометрий знаменовало начало новой эры в математике: впервые было обнаружено, что одну и ту же сторону реального мира (в данном случае — его геометрическую структуру) можно отразить различными моделями, одинаково хорошо согласующимися с действительностью при определённых возможностях экспериментальной проверки. Теория множеств Г. Кантора продемонстрировала возможность строгого изучения бесконечности; она распространила на бесконечные совокупности понятие количества, замкнутое до того времени в рамки понятия натурального числа; оказалось, что не только конечные, но и бесконечные совокупности могут состоять из разного количества элементов.

Теория множеств дала универсальную систему понятий, которая охватила все существовавшие к тому времени математические теории. Вместе с тем при дальнейшем развитии теории множеств появились существенные трудности, не преодолённые полностью до сих пор. Исследования последних лет дают основания считать, что созданная Кантором «наивная теория множеств» описывает на самом деле не одну, а сразу несколько теоретико-множественных моделей, так что факты, верные в одной модели, могут быть неверны в другой[1]. Если это так (а по-видимому, это действительно так), то «наивная теория множеств» расщепится

[1] На первый взгляд кажется непостижимым, что у такого «наглядного понятия», как совокупность, могут быть разные математические модели; но ведь в прошлом веке, да и сейчас ещё, многим было столь же непонятно, что возможны различные математические модели «наглядного» представления о расположении прямых на плоскости.

на несколько моделей, подобно тому как основанная на непосредственных пространственных представлениях «наглядная» геометрия расщепилась в XIX в. на евклидову и неевклидовы. Подобное расщепление моделей происходит, пожалуй, всё же реже, чем обратный процесс, приводящий к возникновению на основе нескольких моделей одной обобщающей сверхмодели; именно так, путём отвлечения от частностей, возникают алгебраические понятия кольца, поля, группы, структуры и даже поглощающее их все понятие универсальной алгебры.

Мы видим, что модель Кантора оказывается недостаточно чёткой, а ведь выше говорилось именно о достаточной чёткости как о характерной черте математических моделей. Дело в том, что само понятие достаточной чёткости не абсолютно, а исторически обусловлено. Определения, открывающие собой евклидовы «Начала»: «Точка есть то, что не имеет частей», «Линия же — длина без ширины» и т. д., казались, вероятно, достаточно чёткими современникам Евклида (III в. до н. э.), а непреложность его системы в целом не подвергалась публичным сомнениям вплоть до 11 (23) февраля 1826 г., когда Н. И. Лобачевский сделал сообщение в отделении физико-математических наук Казанского университета. Зато именно сомнения в этой непреложности и привели в конечном счёте к современной (достаточно чёткой на сегодняшний день) формулировке евклидовой системы геометрии.

Итак, действительное значение математической строгости не следует преувеличивать и доводить до абсурда; здравый смысл в математике не менее уместен, чем во всякой другой науке. Более того, во все времена крупные математические идеи опережали господствующие стандарты строгости. Так было с великим открытием XVII в. — созданием основ анализа бесконечно малых (т. е. основ дифференциального и интегрального исчисления) Ньютоном и Лейбницем. Введённое ими в обиход понятие бесконечно малой определялось весьма туманно и казалось загадочным современникам (в том числе, по-видимому, и самим его авторам). Тем не менее оно с успехом использовалось в математике. Разработанный Ньютоном и Лейбницем символический язык не имел точной семантики (которая в удовлетворяющей нас сейчас форме была найдена лишь через полтораста лет), но даже и в таком виде позволял описывать и исследовать важнейшие явления действительности. Так было и с такими фундаментальными понятиями математики, как предел, вероятность, алгоритм, которыми пользовались, не дожидаясь их уточнения. Так обстоит дело и с «самым главным» понятием математики — понятием доказательства. «Со времён греков говорить “математика” — значит говорить “доказательство”» — этими словами открывается знаменитый трактат Николя Бурбаки «Начала математики»[1]. Однако читатель заметит, что знакомое ему ещё со школы понятие доказательства носит скорее психологический, чем математический характер. Доказательство (в общепринятом употреблении этого слова) — это всего лишь рассуждение, которое должно убедить нас настолько, что мы сами готовы убеждать с его помощью других. Несомненно, что уточнение этого понятия (во всей полноте его объёма) — одна из важнейших задач математики.

Трудовые будни математики по необходимости состоят в получении новых теорем, открывающих новые связи между известными понятиями (хотя и теперь ещё приходится слышать — правда, всё реже — удивлённое: «Как? Неужели ещё не всё открыто в этой вашей математике?»). Однако к этому математика отнюдь не сводится. Вот какие цели математического исследования считает важными великий математик А. Н. Колмогоров:

---

[1] Бурбаки Н. Теория множеств. М., 1965. С. 23.

1. Привести общие логические основы современной математики в такое состояние, чтобы их можно было излагать в школе подросткам 14–15 лет.
2. Уничтожить расхождение между «строгими» методами чистых математиков и «нестрогими» приёмами математических рассуждений, применяемых прикладными математиками, физиками и техниками.

   Две сформулированные задачи тесно связаны между собой. По поводу второй замечу, что, в отличие от времён создания Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления, математики умеют сейчас без большого промедления подводить фундамент логически безукоризненных математических построений под любые методы расчёта, родившиеся из живой физической и технической интуиции и оправдывающие себя на практике. Но фундамент этот иногда оказывается столь хитро построенным, что молодые математики, гордые пониманием его устройства, принимают фундамент за всё здание. Физики же и инженеры, будучи не в силах в нём разобраться, изготовляют для себя вместо него временные шаткие подмостки[1].

Непрерывное повышение уровня математической строгости одновременно с попытками представить самые сложные построения так, чтобы они стали интуитивно понятными, возникновение одних понятий и уточнение других, переставших удовлетворять новым требованиям, расщепление казавшихся ещё недавно незыблемыми моделей и образование новых обобщающих моделей — весь этот исполненный большого внутреннего драматизма процесс характерен для математики не менее, чем доказательство теорем (без

[1] Колмогоров А. Н. Простоту — сложному // Известия. 1962. 31 дек.

которого, впрочем, описанный процесс был бы совершенно бессодержателен, да и вообще не мог бы иметь места).

Математика подобна искусству — и не потому, что она представляет собой «искусство вычислять» или «искусство доказывать», а потому, что математика, как и искусство, — это особый способ познания. Имеет, быть может, смысл по аналогии с художественными образами говорить о математических образах как специфической для математики форме отражения действительности.

Математическое и гуманитарное: преодоление барьера

Поверх барьеров.

БОРИС ПАСТЕРНАК

Уточняйте значения слов.
Тогда человечество избавится
от большей части своих заблуждений.

РЕНЕ ДЕКАРТ

«Да, мой голубчик, — ухо вянет:
Такую, право, порешь чушь!»
И в глазках крошечных проглянет
Математическая сушь.

АНДРЕЙ БЕЛЫЙ. ПЕРВОЕ СВИДАНИЕ

Чем дальше, тем Белому становилось яснее…
что искусство и философия требуют примирения
с точными знаниями — «иначе и жить нельзя». <…>
Недаром прежде, чем поступить на филологический
факультет, он окончил математический.

ВЛАДИСЛАВ ХОДАСЕВИЧ

I

Никто не знает, сохранят ли грядущие века и тысячелетия сегодняшнее деление наук на естественные и гуманитарные. Но даже и сегодня безоговорочное отнесение математики к естественным наукам вызывает серьёзные возражения. Естественно-научная, прежде всего физическая, составляющая математики очевидна, и нередко приходится слышать, что математика — это часть физики, поскольку она, математика, описывает свойства внешнего, физического мира. Но с тем же успехом её можно считать частью психологии, поскольку изучаемые в ней абстракции суть явления нашего мышления, а значит, должны проходить по ведомству психологии. Не менее очевидна и логическая, приближающаяся к философской, составляющая математики. Скажем, знаменитую теорему Гёделя о неполноте, гласящую, что, какие способы доказывания ни установи, всегда найдётся истинное, но не доказуемое утверждение — причём даже среди утверждений о таких, казалось бы, простых объектах, как натуральные числа, — эту теорему с полным основанием можно считать теоремой теории познания.

В 1950-х гг. по возвращении с индийских научных конференций мои московские коллеги-математики с изумлением рассказывали, что в Индии математику — при стандартном разделении наук на естественные и гуманитарные — относят к наукам гуманитарным. И на этих конференциях им приходилось сидеть рядом не с физиками, как они привыкли, а с искусствоведами. К великому сожалению, у людей гуманитарно ориентированных математика нередко вызывает отторжение, а то и отвращение. Неуклюжее (и по содержанию, и по форме) преподавание математики в средней школе немало тому способствует.

Лет сорок назад было модно подчёркивать разницу между так называемыми *физиками* (к коим относили и математиков) и так называемыми *лириками* (к коим причисляли всех гуманитариев). Терминология эта вошла тогда в моду с лёгкой руки поэта Бориса Слуцкого, провозгласившего в 1959 г. в культовом стихотворении «Физики и лирики»:

Что-то физики в почёте,
Что-то лирики в загоне.
Дело не в сухом расчёте,
Дело в мировом законе.