

Оглавление

Предисловие	5
1. Случайные события и их вероятности	6
1.1. Случайные события	6
1.2. Элементы комбинаторики	13
1.3. Классическое определение вероятности	18
1.4. Статистическое определение вероятности	21
1.5. Геометрическое определение вероятности	24
1.6. Аксиоматическое определение вероятности	25
1.7. Умножение вероятностей	27
1.8. Сложение вероятностей	32
1.9. Формулы полной вероятности и Байеса	36
1.10. Формулы Бернулли, Лапласа и Пуассона	41
2. Случайные величины	56
2.1. Случайная величина и ее функция распределения	56
2.2. Дискретные случайные величины	59
2.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин	66
2.4. Основные законы распределения дискретных случайных величин	71
2.5. Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины	76
2.6. Основные законы распределения непрерывных случайных величин	81
2.7. Случайные векторы	88
2.8. Функции от случайных величин и векторов	94
2.9. Числовые характеристики случайных векторов	98
2.10. Нормальное распределение двумерного случайного вектора	108
2.11. Случайные последовательности	113
2.12. Предельные теоремы теории вероятностей	117

3. Задачи	127
3.1. Задачи с краткими решениями	127
3.2. Задачи для самостоятельного решения	156
Контрольные задания	167
 4. Таблицы	 176
 Предметный указатель	 179



1. Случайные события и их вероятности

1.1. Случайные события

Теория вероятностей – это раздел математики, в котором изучаются закономерности в случайных явлениях. При описании окружающего нас мира в теории вероятностей используется набор строго определенных понятий, символов и операций над этими символами. Одним из основных понятий в теории вероятностей является понятие *события*. Событие определяется тем, произошло или не произошло некоторое явление. Например, событиями будут выпадение определенного числа очков на игральной кости, попадание в цель при выстреле, лунное затмение, выпадение снега и автомобильная авария.

Приведенное определение события для математических рассуждений не пригодно. В рамках теории вероятностей мы отвлекаемся от всех несущественных для математического анализа свойств события, и с этой точки зрения событие имеет только одно свойство *появляться или не появляться*. Именно такие абстрактные события мы и будем рассматривать.

В окружающем мире между событиями имеется связь. Поэтому естественно рассматривать события не изолированно, а при учете порождающего их *комплекса условий*. Другими словами, события в теории вероятностей рассматриваются как *результат* некоторого опыта, происходящего в природе либо по нашей воле, либо независимо от нее, либо вопреки нам.

Если при воспроизведении опыта событие может произойти, а может и не произойти, то событие называют *случайным*. Например, случайными событиями, будут результат подбрасывания игральной кости или монеты; безотказная работа некоторого устройства в течение указанного времени; наследование потомками определенной комбинации генов родителей.

Пример. Бросается игральная кость. В результате могут возникнуть различные ситуации. Например:

– Число выпавших очков может равняться 1, 2, 3, 4, 5 или 6.

- Число выпавших очков может быть больше четырех.
- Число выпавших очков может быть четным.

Для данного случая мы рассмотрим некоторые понятия.

Опыт: Бросание игральной кости.

Элементарные исходы опыта

w_k выпало k очков, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Событие A : выпало более четырех очков; $A = \{w_5, w_6\}$.

Событие B : выпало четное число очков; $B = \{w_2, w_4, w_6\}$.

Математическая модель. *Опыт* или *испытание* – первичное неопределяемое понятие. Под опытом понимается набор условий, при которых наблюдается тот или иной результат.

Элементарное событие или *элементарный исход* – первичное неопределяемое понятие. В результате опыта происходит ровно одно элементарное событие.

Множество всех элементарных событий называется *пространством элементарных событий* или *пространством элементарных исходов*. Оно обозначается через $\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$.

Случайным событием называется любое подмножество пространства элементарных событий, т.е. A – случайное событие $\iff A \subseteq \Omega$. Поэтому мы можем представить событие A в виде $A = \{w_{i_1}, \dots, w_{i_k}, \dots\}$.

В этом случае элементарные исходы $w_{i_1}, \dots, w_{i_k}, \dots$ называются *исходами, благоприятствующими* A .

Говорят, что *событие* A *наступило* (*произошло*), если в результате опыта произошел элементарный исход, благоприятствующий событию A .

Пример.

Опыт: Бросают игральную кость. *Пространство элементарных исходов* $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$, где w_k – выпало k очков.

Событие A : выпало более 4 очков; $A = \{w_5, w_6\}$.

Исходы, благоприятствующие A : w_5, w_6 ; A наступает, если выпадает 5 или 6 очков.

Пространство элементарных исходов часто изображаются в виде прямоугольника, а события кругами внутри этого прямо-

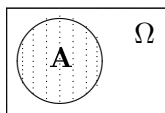


рис. 1.1.

угольника:

Если $A = \Omega$ – пространство элементарных исходов, то A называют *достоверным* событием. Иными словами, событие *достоверно*, если при каждом воспроизведении опыта оно неизбежно происходит.

Если $A = \emptyset$, ($\emptyset \subseteq \Omega$), то A называют *невозможным* событием. Иными словами, событие *невозможно*, если при воспроизведении опыта оно произойти не может. Например, при температуре 20°C и атмосферном давлении (комплекс условий) вода будет находиться в жидком состоянии (достоверное событие), а в твердом состоянии находиться не может (невозможное событие).

Для событий $A, B, \dots$ из множества Ω введем в рассмотрение следующие понятия.

События A и B называются *равными* (или *эквивалентными*, или *равносильными*), если им благоприятствуют одни и те же элементарные исходы, Другими словами, A и B равны, если при каждом воспроизведении опыта события A и B или происходят или оба не происходят, и записывают этот факт в виде $A = B$.

Суммой событий A и B называется событие $A + B = A \cup B$. Событие $A + B$ состоит в наступлении хотя бы одного из событий A или B .

Суммой конечного или бесконечного множества событий $A_1, A_2, \dots$ называется событие $A_1 + A_2 + \dots = A_1 \cup A_2 \cup \dots$. Событие $A_1 + A_2 + \dots$ состоит в наступлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots$.

Геометрическая интерпретация события $A + B$ приведена в первой части приведенного ниже рисунка 1.2.

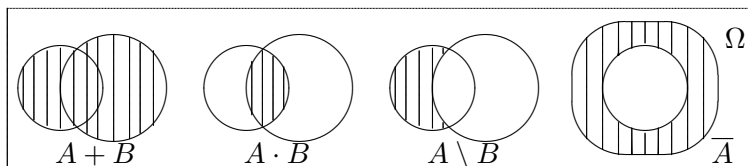


рис. 1.2.

Табличная интерпретация события $A + B$ приведена в следующей таблице, где знак „+” обозначает наступление события, а знак „-” обозначает ненаступление события:

A	B	$A + B$
+	+	+
+	-	+
-	+	+
-	-	-

Пример. Пусть бросается игральная кость.

Событие A : Выпало четное число очков,

$$A = \{w_2, w_4, w_6\} = \{w_2\} + \{w_4\} + \{w_6\}.$$

Событие B : Выпало число очков, кратное 3, $B = \{w_3, w_6\} = \{w_3\} + \{w_6\}.$

Тогда $A + B = \{w_2, w_3, w_4, w_6\}.$

Произведением событий A и B , называется событие $AB = A \cap B$. Это значит, что событие AB состоит в наступлении каждого из событий A и B .

Произведением $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$ или $A_1 \cap A_2 \cap \dots$

Произведением конечного или бесконечного множества событий $A_1, A_2, \dots$ называется событие $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots = A_1 \cap A_2 \cap \dots$, т.е. событие $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$ состоит в наступлении каждого из событий $A_1, A_2, \dots$.

Геометрическая интерпретация события $A \cdot B$ приведена во второй части приведенного выше рисунка 1.2.

Табличная интерпретация события $A \cdot B$ приведена в следу-

ющей таблице, где знак $+$ обозначает наступление события, а

A	B	$A \cdot B$
$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$-$

знак $-$ обозначает ненаступление события:

Пример. Пусть бросается игральная кость.

Событие A : Выпало четное число очков, $A = \{w_2, w_4, w_6\}$.

Событие B : Выпало число очков, кратное 3, $B = \{w_3, w_6\}$.

Тогда $AB = \{w_6\}$.

Разностью событий A и B называется событие $A \setminus B$, которое происходит, если событие A происходит, а B не происходит.

Геометрическая интерпретация события $A \setminus B$ приведена в третьей части приведенного выше рисунка 1.2.

Табличная интерпретация события $A \setminus B$ приведена в следующей таблице, где знак $+$ обозначает наступление события, а знак $-$ обозначает ненаступление события:

A	B	$A \setminus B$
$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$-$

Событием, *противоположным* к событию A , называется событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$. Это значит, что событие $\bar{A}$ наступает, когда не наступает событие A .

Геометрическая интерпретация события $\bar{A}$ приведена в четвертой части рисунка 1.2.

Табличная интерпретация события $\bar{A}$ приведена в следующей таблице, где знак $+$ обозначает наступление события, а знак $-$

A	$\bar{A}$
$+$	$-$
$-$	$+$

обозначает ненаступление события:

Пример. Пусть бросается игральная кость.

Событие A: Выпало четное число очков, $A = \{w_2, w_4, w_6\}$.

Событие B: Выпало число очков, кратное 3, $B = \{w_3, w_6\}$.

Тогда $A \setminus B = \{w_2, w_4\}$, $\bar{A} = \{w_1, w_3, w_5\}$.

Замечание. При помощи таблиц можно иллюстрировать более сложные события. Например, событию $A\bar{B}+C$ соответству-

ет таблица

A	B	C	$\bar{B}$	$A\bar{B}$	$A\bar{B}+C$
+	+	+	−	−	+
+	+	−	−	−	−
+	−	+	+	+	+
+	−	−	+	+	+
−	+	+	−	−	+
−	+	−	−	−	−

и.т.д.

Событие B называется *следствием* события A , если $A \subseteq B$. В этом случае из наступления события A вытекает наступление события B .

Пример. Пусть бросается игральная кость.

Событие A: Выпало четное число очков, $A = \{w_2, w_4, w_6\}$.

Событие B: Выпало число очков, большее 1, $B = \{w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$.

Тогда $A \subseteq B$, B следует из A .

События A и B равны в точности тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е. из наступления каждого из событий A и B вытекает наступление другого события.

События A и B называются *несовместными* или *несовместимыми*, если их совместное появление в одном опыте невозможно, т.е. $A \cdot B = \emptyset$.

Пример. Пусть бросается игральная кость.

Событие A: Выпало менее 7 очков; A – достоверное событие.

Событие B: Выпало отрицательное число очков; B – невозможное событие.

Событие C: Выпало более 4 очков; $\overline{C}$ – выпало не более 4 очков, $C = \{w_5, w_6\}$, $\overline{C} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

Событие D: Выпало более 1 очко; $D = w_1$, $CD = \emptyset$, C и D несовместны.

Пример. Упростить выражение $(A + B)B + A(AB)$.

Так как $B \subseteq A + B$ и $AB \subseteq A$, то $(A + B)B = B$ и $A(AB) = AB$. Поэтому $(A + B)B + A(AB) = B + AB = B$.

Свойства операций над множествами. Пусть A , B и C – события, связанные с одним и тем же опытом, Ω – достоверное событие, $\emptyset$ – невозможное событие.

Теорема 1.1. Для любых событий A , B , C выполняются следующие свойства:

1.	$A + B = B + A$	1'.	$AB = BA$
2.	$(A + B) + C = A + (B + C)$	2'.	$(AB)C = A(BC)$
3.	$A(B + C) = AB + AC$	3'.	$A + BC = (A + B)(A + C)$
4.	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	4'.	$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$
5.	$\overline{A_1 + \dots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}$	5'.	$\overline{A_1 \cdot \dots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \dots + \overline{A_n}$
6.	$A + A = A$	6'.	$A \cdot A = A$
7.	$A + \Omega = \Omega$	7'.	$A \cdot \Omega = A$
8.	$A + \emptyset = A$	8'.	$A \cdot \emptyset = \emptyset$
9.	$A + \overline{A} = \Omega$	9'.	$A \cdot \overline{A} = \emptyset$
10.	$A \setminus B = A\overline{B}$	10'.	$A + B = A + \overline{AB}$

Заметим, что свойства 1'–10' получаются из свойств 1–10 соответственно заменой $, , +$ на $, , \cdot$ и Ω на $\emptyset$ (и наоборот).

Доказательство. Доказать приведенные выше свойства можно либо с помощью таблиц, либо непосредственными рассуждениями.

Например, докажем 6 с помощью рассуждений. Включение $w \in \overline{A_1 + \dots + A_n}$ равносильно тому, что $w \notin A_1 + \dots + A_n$. Это означает, что одновременно верно, что $w \notin A_1$, $w \notin A_2$, ..., $w \notin A_n$, т.е. $w \in \overline{A_1} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}$. Поэтому множества $\overline{A_1 + \dots + A_n}$ и $\overline{A_1} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}$ равны, так как состоят из одних и тех же элементов.

Теперь докажем 10 с помощью таблицы:

A	B	$\overline{B}$	$A \setminus B$	$A \cdot \overline{B}$
+	+	−	−	−
+	−	+	+	+
−	+	−	−	−
−	−	+	−	−

Следовательно, события $A \setminus B$ и $A\overline{B}$ наступают в одних и тех же случаях. Поэтому $A \setminus B = A\overline{B}$.

Алгебра событий. Непустое множество событий W называется σ -алгеброй событий, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- а) если $A \in W$, то и $\overline{A}$;
- б) если $A, B \in W$, то $A + B \in W$ и $A \cdot B \in W$.

Отметим, что приведенные выше понятия суммы, произведения и противоположного события соответствуют логическим элементам **ИЛИ**, **И**, **НЕ**. Например, фразу "Событие A произойдет, если **не** произойдет событие B **или** произойдут события C и D " можно записать в виде $A = \overline{B} + C \cdot D$. Это соответствие часто позволяет формализовать задачу. Например, пусть событие A_i – это безотказная работа за указанный период времени i -го элемента участка электрической цепи (рис. 1.3). Безотказная работа этого участка цепи (событие A) эквивалентна безотказной работе хотя бы одного элемента в каждой из пар: 1-2 и 3-4 элементов. Поэтому $A = (A_1 + A_2) \cdot (A_3 + A_4)$.

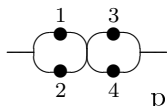


рис. 1.2

1.2. Элементы комбинаторики

Общий комбинаторный принцип. Для двух множеств элементов $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ подсчитаем число способов составить новое множество, выбрав из A и B по одному элементу. Элемент a из A можно выбрать m способами,

а элемент b из B — n способами. Пару элементов ab можно составить $m \cdot n$ способами. Это следует из таблицы

	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	a_1b_1	a_1b_2	$\dots$	a_1b_n
a_2	a_2b_1	a_2b_2	$\dots$	a_2b_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	a_mb_1	a_mb_2	$\dots$	a_mb_n

в которой перечислены все способы такого выбора.

Все способы выбора трех элементов трех множеств $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ и $C = \{c_1, \dots, c_s\}$ приведены в таблице

	c_1	c_2	$\dots$	c_s
a_1b_1	$a_1b_1c_1$	$a_1b_1c_2$	$\dots$	$a_1b_1c_s$
a_1b_2	$a_1b_2c_1$	$a_1b_2c_2$	$\dots$	$a_1b_2c_s$
a_2b_1	$a_2b_1c_1$	$a_2b_1c_2$	$\vdots$	$a_2b_1c_s$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_mb_n	$a_mb_nc_1$	$a_mb_nc_2$	$\dots$	$a_mb_nc_s$

Так как в этой таблице $m \cdot n$ строк и s столбцов, то $m \cdot n \cdot s$ — требуемое число способов. Продолжая аналогичные рассуждения, получим следующий *общий комбинаторный принцип*.

Пусть элемент x_1 можно выбрать k_1 способами, при каждом выборе x_1 элемент x_2 можно выбрать k_2 способами, при каждом выборе пары x_1, x_2 элемент x_3 можно выбрать k_3 способами и т.д. Тогда число всех последовательностей $(x_1, \dots, x_n)$ равно $(k_1 \cdot \dots \cdot k_n)$.

Пусть множество A содержит n элементов. Если из множества A мы выбираем k элементов, то совокупность отобранных элементов будем называть *выборкой объема k* . При этом правила выбора k элементов множества A могут быть различными. Например, если из 10 цифр выбираются 7 для телефонного номера, то в выборке могут быть одинаковые элементы, а также важен порядок элементов. Если же из 10 студентов выбираются 7 дежурных, то порядок отобранных студентов не важен и все

они различны. Мы будем рассматривать следующие выборки объема k из множества A , содержащего n элементов: сочетания, векторы, размещения, а также перестановки n элементов.

Векторы, размещения и перестановки. Пусть множество A содержит n элементов. *Вектором* из n по k называется упорядоченный набор $x_1, \dots, x_k$, где каждый элемент x_i принадлежит множеству A . Из этого определения сразу следует, что в векторе важен порядок элементов, при этом вектор может содержать одинаковые компоненты. Семизначный телефонный номер – пример вектора из 10 по 7.

Пусть V_n^k – число всех векторов из n по k . В силу общего комбинаторного принципа $V_n^k = n^k$.

Если в векторе из n по k все компоненты различны, то он называется *размещением* из n по k . В размещении так же, как и в векторе, порядок элементов имеет значение, но в отличие от вектора, в размещении нет одинаковых элементов.

Пусть A_n^k – число всех размещений из n по k . В размещении первый элемент можно выбрать n способами. При каждом выборе первого элемента второй можно выбрать $n - 1$ способами, третий элемент можно выбрать $n - 2$ способами и т.д. Элемент размещения с номером k может быть выбран $n - (k - 1) = n - k + 1$ способами. Согласно комбинаторному принципу,

$$A_n^k = n(n - 1)(n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Пример. Сколько словарей нужно иметь, чтобы напрямую переводить с любого из данных пяти языков на любой другой из этих пяти языков? Для конкретного словаря нужно выбрать из данных пяти языков два различных языка. При этом важен порядок языков. Поэтому число необходимых словарей равно $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Перестановкой n элементов называется размещение из n по n . Расстановка 5 человек в очередь – пример перестановки 5 элементов. Пусть P_n – число всех перестановок n элементов.

Тогда

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Например, пять человек могут встать в очередь $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способами.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ – множество из трех элементов. Выпишем все векторы из 3 по 2:

$$(1, 1), (1, 2), (3, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3),$$

получили $V_3^2 = 3^2 = 9$ векторов.

Чтобы выписать все размещения из 3 по 2, надо выписать все векторы из 3 по 2 с различными элементами:

$$(1, 2), (3, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2),$$

получим $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ размещений.

И, наконец, выпишем все перестановки 3 элементов:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1),$$

получили $P_3 = 3! = 6$ перестановок.

Сочетания. Сочетанием из n по k ($k \leq n$) называется любое k -элементное подмножество n -элементного множества A . Из этого определения следует, что сочетание не содержит одинаковых элементов, и порядок элементов в сочетании не важен. Число всех сочетаний из n по k обозначается символом C_n^k . Другими словами, C_n^k – это число способов, которыми из n элементов можно выбрать k элементов. Каждое сочетание из n по k можно упорядочить $k!$ способами. Таким образом из каждого сочетания получается $k!$ размещений из n по k , так как в сочетании все элементы различны. Следовательно, из всех C_n^k сочетаний получим $C_n^k \cdot k!$ размещений, причем таким образом мы получаем все размещения. Отсюда $C_n^k \cdot k! = A_n^k$ и, значит

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru