ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современная система обучения предполагает большое количество часов, выделяемых на самостоятельную работу студентов. Данное пособие предназначено для организации такой работы. Оно содержит подробный теоретический материал по разделу теории вероятностей «Случайные события», а также необходимые для этого раздела сведения по комбинаторике. Теоретический материал проиллюстрирован примерами применения. Даны задания для самостоятельной работы студентов с подробным примером решения заданий.

РАЗДЕЛ 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Предмет изучения теории вероятностей

Наблюдая за окружающей действительностью и нашей собственной жизнью можно заметить следующее: имеется некоторый набор условий, реализация которых (опыт) приводит всякий раз к несколько различным результатам. Например, взяли монетку в руку, подбросили и ... то ли решка, то ли орёл, то ли ребром. Собрались, пошли в вуз, расстояние одно и то же, но время в пути каждый раз немного разное. Земля, вращаясь по орбите вокруг Солнца, заняла определённое положение, наступила весна, которая, тем не менее, всегда неповторима.

Эти и ещё множество других явлений называются случайными, т. е. от случая к случаю протекающими несколько по-иному.

Однако и в случайном есть свои закономерности. Например, в 18 веке французский учёный Бюффон 4040 раз подряд подбросил монету, в 2048 случаях выпал герб, английский математик Пирсон в начале нашего века подбросил монету 24000 раз, из которых 12012 раз появился герб. Повторение подобного опыта приводит к тому же результату: при большом числе подбрасываний практически в половине случаев выпадает цифра, в половине — герб. Время прихода в вуз также колеблется вокруг некоторой средней величины. В погоде также есть свои закономерности, которые отличают, скажем, погоду средних широт от экваториальной.

Теорией вероятностей называется раздел математики, изучающий закономерности массовых (т. е. повторяющихся многократно) случайных явлений.

При этом подразумевается, что закономерности проявляются, когда набор основных условий, определяющих исход опыта, остаётся постоянным. Например, на результаты артиллерийской стрельбы влияют калибр орудия, масса снаряда, заряд, угол наклона и т. д. Изменение хотя бы одного из этих условий приведёт к изменению всей картины результатов попаданий.

Испытание — это некоторая воспроизводимая совокупность условий, в которых наблюдается то или другое явление, фиксируется тот или другой вариант завершения испытания. Если результат испытания варьируется при его повторении, то говорят об испытании со случайным исходом. Каждый случайный исход называется *элементарным исходом* данного испытания.

Изучение теории вероятностей начинается с определения некоторого основного понятия, такого, как число в арифметике, вектор в векторной алгебре, матрица в линейной алгебре. Таким понятием является случайное событие.

Конкретное осуществление случайного явления, которое в результате опыта может произойти, а может и не произойти, называется случайным событием.

Например, бросание игральной кости — случайное явление (или, другими словами, испытание со случайным исходом). Оно может завершиться одним из шести исходов: появление на верхней грани единицы, двойки, тройки, четвёрки, пятёрки и шестёрки.

Случайные события обозначаются обычно большими латинскими буквами A, B, C и т. д.

Численная мера возможности осуществления случайного события называется его вероятностью и обозначается $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ *и т. д.*

1.2. Виды случайных событий

Если появление одного из событий исключает наступление другого, то события называются несовместными.

Например, выпадение одновременно и цифры и герба при бросании одной монеты.

Если же события могут произойти одновременно, то эти события называются совместными.

Например, при бросании двух монет могут одновременно выпасть и цифра и герб.

Если вероятности событий одинаковы, то эти события называются равновозможными.

Например, при бросании точно выполненной однородной игральной кости появление на верхней грани любой цифры от 1 до 6 равно возможно. Также одинакова вероятность извлечь любую карту из хорошо перетасованной колоды.

Если в результате опыта случайное событие обязательно произойдет, то оно называется достоверным и обозначается Ω.

Например, достоверное событие — замерзание чистой воды при отрицательных температурах.

Невозможным называется событие, которое в результате опыта никогда не наступает и обозначается $\varnothing$.

Например, появление цифры 7 при бросании игрального кубика.

Если несовместные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *таковы, что в результате опыта должно обязательно произойти одно из них, то говорят, что они образуют полную группу.*

Например, куплены два лотерейных билета. Для этого опыта следующие события образуют полную группу:

A_1 — выиграли оба билета;

A_2 — на первый билет выпал выигрыш, на второй — нет;

A_3 — выигрыш выпал на второй билет, на первый — нет;

A_4 — ни один билет не выиграл.

Каждое событие из полной для данного опыта группы событий часто называют исходом опыта или элементарным событием.

Если полную группу образуют два события, то они называются противоположными. Событие, противоположное A, обозначается $\overline{A}$. Смысл события, противоположного A, состоит в не наступлении события A.

Два события называются независимыми, если вероятность одного из них не меняется при наступлении другого.

Например, независимыми можно считать следующие события: попадание в мишень для одного из стрелков, когда два стрелка вместе стреляют по цели; присутствие отдельных студентов группы на лекции.

Событие A *называется зависимым от события* H, *если вероятность события* A *меняется при наступлении события* H.

Условной вероятностью $p_H(A)$ *события* A *относительно события* H *называется вероятность события* A, *вычисленная в предположении, что событие* H *наступило.*

1.3. Действия с событиями

Суммой (объединением) событий A и B называют событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из этих событий: либо только события A, либо только события B, либо и события A и события B одновременно (обозначение A+B).

Определение суммы можно распространить и на большее число событий.

Если событие A состоит в осуществлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то говорят, что событие A равно сумме событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и записывают

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Можно сделать такое пояснение. Если при рассмотрении некоторого события A мы говорим, что оно наступит, если произойдёт **или** событие A_1, **или** событие A_2, **или** и т. д., то речь идёт о сумме событий.

Пример. Пусть событие A — появление чётной цифры при бросании игральной кости. Оно наступит или при выпадении двойки (событие A_1), или при выпадении четвёрки (событие A_2), или при выпадении шестёрки (событие A_3), т. е. $A = A_1 + A_2 + A_3$.

Произведением (пересечением) двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном осуществлении события A и события B. (обозначение AB).

Определение произведения двух событий также можно расширить на большее число событий.

Если событие A состоит в совместном осуществлении событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то говорят, что оно равно произведению событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и записывают

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n.$$

Это определение также можно пояснить. Если при рассмотрении некоторого события A мы говорим, для того чтобы оно произошло, должно произойти **и** событие A_1, **и** событие A_2, **и** т. д., то речь идёт о произведении событий.

Пример. Пусть событие A — проведение аудиторного занятия. Чтобы оно произошло, должно произойти и событие A_1 — пришёл преподаватель, и событие A_2 — пришли студенты, т. е. $A = A_1 \cdot A_2$.

При решении задач используются следующие свойства действий с событиями.

1. Результат суммирования событий не зависит от порядка их написания:

$$A + B = B + A.$$

2. Результат произведения событий не зависит от порядка их написания:

$$A \cdot B = B \cdot A\,.$$

1.4. Способы непосредственного вычисления вероятностей

С практической точки зрения важно знать вероятности различных случайных событий. Способы вычисления, нахождения вероятности зависят от того, результатом какого опыта (испытания) является рассматриваемое событие.

1.4.1. Классическая формула вычисления вероятности

Применяется для вычисления вероятности событий, являющихся результатом опыта с конечным числом равновозможных исходов.

Если событие A может наступить в результате одного из m исходов, то говорят, что они благоприятствуют A. Если при этом общее число исходов опыта n, то вероятность события A равна отношению числа исходов, благоприятствующих A, к общему числу исходов:

$$p(A) = \frac{m}{n}\,.$$

Часто опыты, для которых применима классическая формула, связаны с азартными играми. Рассмотрим для примера опыт с бросанием двух игральных костей одновременно. Возможны следующие исходы:

11	12	13	<u>14</u>	15	16
21	22	<u>23</u>	24	25	26
31	<u>32</u>	33	34	35	36
<u>41</u>	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Первая цифра в паре указывает цифру, выпавшую при бросании первой кости, вторая — при бросании второй.

Найдем вероятность события A — выпадения в сумме 5 очков при одновременном бросании двух костей.

Случаев, благоприятствующих этому событию, 4 (подчеркнуты на общей картине исходов). Значит, $m=4$, $n=36$, $p(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Хотя классическая формула применима в ограниченном числе случаев, она позволяет получить результаты, полезные в теории вероятностей в целом. Пользуясь данным определением, можно определить рамки, в которых находится вероятность любого события.

Если взять невозможное для данного опыта событие (например, выпадение в сумме 20 очков), то $m=0$ и $p(A)=0$.

Если же взять достоверное событие — выпадение в сумме не более 12 очков, то ему благоприятствуют все исходы, $m=36$, $p(A)=\frac{36}{36}=1$.

Таким образом, вероятность произвольного события A подчиняется следующему неравенству:

$$0 \le p(A) \le 1.$$

1.4.2. Геометрический способ вычисления вероятности

Применяется для вычисления вероятности событий, являющихся результатом опыта с бесконечным числом равновозможных исходов.

Начнем с примеров. После грозы на участке между 40-м и 70-м километром произошел обрыв телефонной линии. Какова вероятность события A, состоящего в том, что обрыв произошёл между 50-м и 55-м километром?

Будем считать, что обрыв может произойти в любой точке линии с одинаковой возможностью. Тогда все возможные исходы опыта находятся на отрезке длиной 30 км, а исходы, которые нас интересуют, на отрезке длиной 5 км. В качестве вероятности A естественно взять отношение длин отрезков:

$$p(A)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Например, загадываются два числа x и y от нуля до единицы. Тут возможно бесконечное число вариантов, которые находятся внутри квадрата с единичной стороной, показанного на *рис. 1.4.2*.

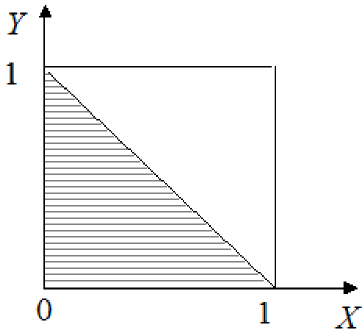

Рис. 1.4.2. Иллюстрация к опыту с загадыванием двух чисел от нуля до единицы

Если нас интересуют такие числа, сумма которых не больше 1, т. е. $x + y \le 1$, то они лежат внутри заштрихованного треугольника.

Так как площадь этого треугольника составляет половину от площади, представляющей все исходы опыта, то вероятность, что пара чисел (x, y) будет удовлетворять требованию $x + y \le 1$, равна 1/2.

В других случаях, например, при загадывании тройки чисел, все исходы некоторого опыта и исходы, благоприятствующие определенному событию, могут быть представлены объемом некоторого тела и его частью.

Поэтому можно дать такое общее определение. *Если все возможные исходы опыта можно представить областью G, а благоприятствующие событию A исходы — частью этой области* G_A*, то вероятность события A можно найти по формуле:*

$$p(A) = \frac{\mu(G_A)}{\mu(G)},$$

где $\mu(G)$ и $\mu(G_A)$ — численные меры соответствующих областей (длина, площадь или объём).

Это *геометрический способ* нахождения вероятности, полезный и при решении ряда задач и для иллюстраций.

1.4.3. Статистический способ нахождения вероятности

Применяется для нахождения вероятности событий, являющихся результатом опыта с не равновозможными исходами.

Пусть n — общее число опытов, в которых может произойти событие A, m — число опытов, в которых событие A произошло (частота события A). Тогда за вероятность события можно взять отношение частоты к общему числу опытов, если последнее достаточно велико:

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример. Найдём вероятность рождения мальчика, используя следующие данные:

Страна	Год	Всего родилось детей	Из них мальчиков
Польша	1927	958733	496544

Поскольку число опытов, в которых мог появиться мальчик, достаточно велико, то вероятность его рождения найдём по приведённой выше формуле:

$$p = \frac{496544}{958733} \approx 0,518.$$

1.5. Примеры решения задач на непосредственное вычисление вероятности событий

Пример 1. В группе детского сада 30 детей. На утреннике 20 из них танцуют, 10 поют песни, а 5 и танцуют, и поют. Какова вероятность, что наугад взятый ребенок не принимает участия в празднике?

Решение. Определим, сколько детей только танцуют: $20 - 5 = 15$. Теперь найдем, сколько детей только поют: $10 - 5 = 5$. Учитывая тех, кто и поет, и танцует, находим, что в представлении участвуют $15 + 5 + 5 = 25$ детей. Следовательно, не принимают участия в празднике 5 детей. Тогда искомую вероятность можно найти, используя классическую формулу вычисления вероятности:

$$p = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Пример 2. Имеется 15 стандартных изделий и 5 бракованных. Из них наугад выбирают два изделия. Какова вероятность, что одно из них бракованное?

Решение. Рассмотрим общую задачу. В партии из S изделий K бракованных. Найти вероятность того, что среди выбранных наугад для проверки r изделий ровно l окажутся бракованными.

Число возможных способов взять r изделий из S равно $n = C_S^r$. Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа K бракованных изделий взято l, что можно сделать C_K^l способами, а остальные $r-l$ изделий не бракованные, т. е. они взяты из общего числа $S-K$, что можно сделать C_{S-K}^{r-l} способами. Поэтому число благоприятствующих случаев равно $m = C_K^l \cdot C_{S-K}^{r-l}$. Искомая вероятность будет равна: $p = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_K^l \cdot C_{S-K}^{r-l}}{C_S^r}$. Тогда для нашей задачи имеем

$$p = \frac{C_{15}^1 \cdot C_5^1}{C_{20}^2} = \frac{15!}{1!14!} \cdot \frac{5!}{1!4!} : \frac{20!}{2!18!} = \frac{15 \cdot 5 \cdot 2}{19 \cdot 20} = \frac{15}{38} \approx 0{,}395.$$

Пример 3. Два экскурсионных теплохода могут подойти к пристани для высадки пассажиров между 12 и 13 часами. Высадка пассажиров на каждом теплоходе длится 20 минут. Какова вероятность, что одному из теплоходов придётся ждать, пока на другом закончится высадка пассажиров?

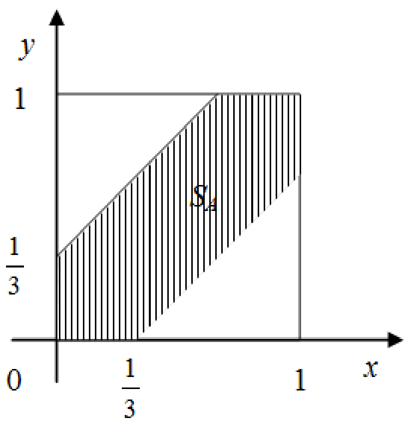

Рис. 1.5.1. Иллюстрация к решению задачи примера 3 раздела 1.5

Решение. Пусть время (в часах) прихода одного $12+x$, а второго $12+y$. Это состояние изображается точкой на плоскости с координатами $(x; y)$. Поскольку $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$, то эти точки $(x; y)$ наудачу брошены в квадрат со стороной 1, и все возможные исходы изображаются точками этого квадрата, площадь которого равна 1 (*рис 1.5.1*). По условию ждать придётся, если $|x-y| \le \dfrac{1}{3}$, (т. к. 20 мин =

$1/3$ ч.), или $y-\frac{1}{3}\le x\le y+\frac{1}{3}$. Этому событию соответствует заштрихованная область S_A, а отношение ее площади к площади квадрата равно искомой вероятности:

$$p=\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right):1=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}.$$

Пример 4. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает десяти. Найти вероятность того, что произведение этих чисел будет не больше десяти.

Рассмотрим на плоскости точку с координатами (x, y). Так как числа выбираются произвольно, то (x, y) есть точка, наудачу брошенная на плоскость. Согласно условию задачи все возможные исходы опыта определяются системой неравенств:

$$\begin{cases}0<x\le 10,\\ 0<y\le 10.\end{cases}$$

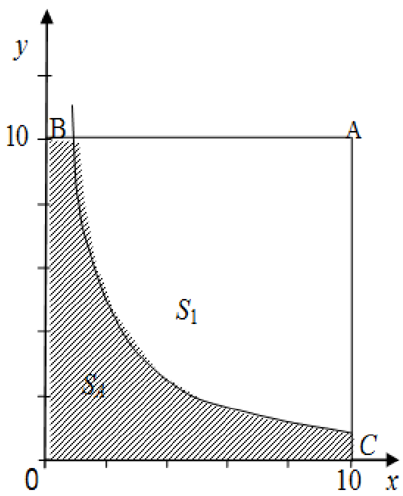

Рис. 1.5.2. Иллюстрация к решению задачи примера 4 раздела 1.5

Точки, удовлетворяющие этой системе, попадают в квадрат $OBAC$. Благоприятствующие исходы определяются условием: $xy\le 10$ (*рис. 1.5.2.*).

Чтобы отметить исходы, благоприятствующие указанному условию, нарисуем линию $xy=10$ или $y=\frac{10}{x}$. Это гипербола, для её построения составим небольшую таблицу:

x	1	2	5	10
$y=\frac{10}{x}$	10	5	2	1

Подстановкой в условие $xy\le 10$ координат точек, находящихся выше и ниже гиперболы, определим, что оно выполняется ниже гиперболы. Тогда благоприятствующие исходы задаются заштрихованной областью S_A, отношение площади которой к площади квадрата равно искомой вероятности. Площадь S_A найдём как разность площади квадрата и площади S_1 между линией $y = 10$ и гиперболой:

$$100 - \int_1^{10} \left(10 - \frac{10}{x}\right) dx = 100 - \left(10x - 10\ln x\right)\Big|_1^{10} \approx 33{,}03 .$$

Окончательно имеем: $p = \dfrac{S_A}{S_{OBAC}} = \dfrac{33{,}03}{100} \approx 0{,}33$.

Пример 5. Покупая карточку лотереи «Спортлото», игрок должен зачеркнуть 6 из 49 возможных чисел от 1 до 49. Если при розыгрыше тиража лотереи он угадает все 6 чисел, то имеет шанс выиграть значительную сумму денег. Чему равна вероятность угадать все 6 номеров?

Решение. Так как число исходов данного опыта конечно, и все они равно возможны, используем классическую формулу вычисления вероятности: $p = \dfrac{m}{n}$. Общее число исходов опыта n равно числу способов выбрать 6 чисел из 49:

$$n = C_{49}^{6} = \frac{49!}{43!6!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816 .$$

К сожалению, благоприятный вариант только один. Тогда

$$p = \frac{1}{13983816} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-9} .$$

Пример 6. Пять фирм F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 предлагают свои услуги по выполнению трех различных контрактов. Какова вероятность, что фирма F_3 получит контракт, если любая фирма может получить не более одного контракта?

Решение. Также как в предыдущей задаче, используем классическую формулу. Общее число способов распределить контракты n найдём из следующих соображений. Первый контракт можно предложить одной из пяти фирм, второй — одной из четырёх оставшихся, третий — одной из оставшихся трёх. Таким образом: $n = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Благоприятствующими будут исходы, когда в число трёх фирм, получивших контракты, войдёт F_3 . Она может получить контракт тремя способами, оставшиеся два контракта могут быть распределены $4 \cdot 3 = 12$ способами. Тогда $p = \frac{m}{n} = \frac{3 \cdot 12}{60} = 0,6$.

РАЗДЕЛ 2
(ДОПОЛНЕНИЕ К РАЗДЕЛУ 1)
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

2.1. Основные правила комбинаторики

Во многих случаях для того, чтобы подсчитать число всех возможных исходов опыта, нужно перебрать огромное количество вариантов. Чтобы формализовать эту задачу и правильно подсчитать общее число опытов используют комбинаторные формулы.

Комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из конечного множества данных объектов.

При выводе комбинаторных формул руководствуются двумя правилами.

1) Правило суммы.

Если объект A можно выбрать l способами, а объект $B-k$ способами, то объект либо A, либо B можно выбрать $n=l+k$ способами.

Пример. В корзине лежат белые, синие и красные шары. Если синих шаров 5, а красных — 7, то цветной шар (либо красный, либо синий) можно выбрать $7+5=12$ способами.

2) Правило произведения.

Если объект A можно выбрать l способами, а объект $B-k$ способами, то пару AB можно выбрать $n=l\cdot k$ способами.

Пример. Подарочный набор состоит из флакона духов и помады. Имеются духи трех видов, помада — пяти тонов. Сколько различных наборов можно составить? Так как каждый из трех видов духов можно дополнить помадой 5 цветов, то всего получится $15=3\cdot 5$ вариантов подарочных наборов.

Теперь перейдем к составлению комбинаторных формул.

2.2. Формула размещений без повторений

Размещениями называют различные комбинации m объектов, которые выбраны из множества n различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке, так и их порядком.

Размещения без повторений получаются по следующей схеме. Имеется n различных предметов. Из них выбирают m предметов так, что меняется и состав выбранных предметов и порядок их расположения относительно друг друга. Представить такую ситуацию можно следующим образом. Рисуем ряд из m клеток

1	2	3	…	m

Берем произвольный предмет из n имеющихся и помещаем в первую клетку (это можно сделать n способами), затем берем любой из оставшихся $n-1$ предметов и помещаем во вторую клетку ($n-1$ способами). Значит, по правилу произведения, пару — первую и вторую клетку — можно заполнить $n\left(n-1\right)$ способами. Рассуждая аналогично, найдем, что число способов разместить m предметов из n в клетках — число размещений из n по m обозначаемое A_n^m, равно

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-m+1).$$

Используя обозначения $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ и $(n-m)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \times$ $\times (n-m)$ формулу для размещений можно переписать по-другому:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)(n-m)...3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-m)(n-m-1)...3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример. Фирма открывает новый отдел, в котором имеется пять различных должностей. Сколькими способами можно заполнить имеющиеся вакансии, если на них претендуют 12 человек?

Решение. При заполнении вакансий важно и кого из претендентов выбрали, и на какую должность назначили, для подсчёта числа способов N используем формулу размещений без повторений, учитывая, что $n = 12, m = 5$.

$$N = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040.$$

2.3. Формула размещений с повторениями

Пусть даны n различных видов предметов, которые можно разместить по m различным местам, причём число предметов в каждом виде может неограниченно повторяться (т. е. можно выбрать несколько предметов одного вида). Такие выборки называются *размещениями с повторениями*, а их количество вычисляется по формуле: $\overline{A}_n^m = n^m$.

Размещения с повторениями можно получить следующим образом. Ячейку из m клеток заполняем, используя n различных типов (классов) предметов. Первую клетку можно заполнить n способами, вторую — также n способами (поскольку каждый предмет не в единственном числе, а может повторяться сколько угодно раз), третья клетка заполняется также n способами и т. д. Тогда число размещений с повторениями, обозначаемое $\overline{A}_n^m$, равно

$$\overline{A}_n^m = n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^m.$$

Пример. Шифр сейфа состоит только из 6 цифр, которые должны набираться последовательно и могут повторяться. Чему в этом случае равно общее число всех возможных комбинаций шифра?

Решение. В данной ситуации порядок важен, так как шифр набирается в строгом порядке, повторения есть (цифры могут повторяться). Воспользуемся формулой $\overline{A}_n^m = n^m$. Считаем, что в шифр может входить любая из 10 цифр, всего 6 возможных позиций (длина шифра равна 6 цифрам). Подсчитаем общее число всех возможных комбинаций шифра. Первую цифру можно выбрать 10 способами, вторую — также 10 (цифры могут повторяться), и так далее для всех шести цифр шифра, то есть $N = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$.

2.4. Формула перестановок

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Перестановки получаются, если n различных предметов располагать в различном порядке (например, книги на полке). Число перестановок из n предметов, обозначаемое P_n, можно найти, если в предыдущей схеме размещений без повторений считать, что $m = n$. Тогда

$$P_n = n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Пример. Из цифр 1, 2, 3, 5 составляются всевозможные четырехзначные числа так, чтобы цифры не повторялись. Сколько чисел можно составить?

Решение. Так как цифры не могут повторяться, значит, различные числа могут различаться только расположением цифр, тогда для подсчёта количества чисел N используем формулу перестановок, учитывая, что $n = 4$:

$$N = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Пример. На деловой встрече должны выступить три докладчика: Иванов, Петров, Сидоров. Сколькими различными способами можно наметить порядок их выступлений?

Решение. Количество способов можно пересчитать непосредственно:

Иванов / Петров / Сидоров, Иванов / Сидоров / Петров,
Сидоров / Иванов / Петров, Сидоров / Петров / Иванов,
Петров / Сидоров / Иванов, Петров / Иванов / Сидоров

Итого**:** 6 комбинаций или 6 перестановок. То же самое можно сделать с помощью вышеприведённой формулы: $P_3 = 3! = 6$.

Кстати, формула перестановок объясняет, почему $0! = 1$, т. к. переставить 0 предметов между собой можно только одним способом.

2.5. Формула перестановок с повторениями

Имеется n элементов k различных типов: n_1 — элементов первого типа, n_2 — элементов второго типа, … n_k — элементов k-го типа, $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$. Сколько можно составить различных перестановок из этих элементов?

Перестановки такого типа называются *перестановками с повторениями*, их число обозначаются $P(n_1, n_2, ..., n_k)$. Оно равно количеству способов, которыми можно переставить n объектов, среди которых объект первого вида повторяется n_1 раз, объект второго вида повторяется n_2 раз, объект третьего вида — n_3 раз, ..., объект k-го вида — n_k раз.

Если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы $n!$. Но из-за того, что некоторые элементы совпадают, получится меньшее число перестановок, так как перестановки одинаковых элементов не ведут к появлению новой перестановки. В первой группе элементы (первого типа) можно переставлять друг с другом $n_1!$ способами. Но так как все эти элементы одинаковы, то такие перестановки ничего не меняют. Точно так же ничего не меняют $n_2!$ перестановок элементов во второй группе, … , $n_k!$ перестановок элементов в k-ой группе.

Поскольку перестановки элементов в разных группах можно делать независимо друг от друга, то по правилу произведения элементы перестановки можно переставлять друг с другом $n_1!n_2!...n_k!$ способами так, что она остается неизменной. То же самое верно и для любого другого расположения элементов.

Значит, число различных перестановок с повторениями, которые можно сделать из данных элементов, равно

$$P\left(n_1, n_2, ..., n_k\right) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Пример. Сколько различных перестановок можно сделать из букв слова «математика»?

Решение. В этом слове есть две буквы «м», три буквы «а», две буквы «т», по одной букве «е», «и» и «к», а всего 10 букв. Значит число перестановок будет равно: $P\left(2, 3, 2, 1, 1, 1\right) = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200$.

2.6. Формула сочетаний без повторений

Сочетаниями называют различные комбинации m объектов, которые выбраны из множества n различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание — это уникальная выборка из m элементов, в которой не важен их порядок (расположение), а важен только состав. Число сочетаний из n объектов по m объектов обозначается C_n^m. Общее же количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по формуле $C_n^m = \frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}$.

Выведем формулу для подсчёта числа сочетаний из n объектов по m, используя следующее соображение. Чтобы получить все возможные размещения нужно взять выборку m предметов определенного состава и произвести в ней все возможные перестановки. Затем взять другой состав и снова переставить и т. д. Тогда число размещений (по правилу произведения) будет равно

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m,$$

откуда для числа сочетаний получим:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Число сочетаний используется в формуле бинома (двучлена) Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

и поэтому еще называется биномиальным коэффициентом.

Пример. С помощью бинома Ньютона составим формулу четвёртой степени суммы двух чисел.

$$(a+b)^4 = \sum_{m=0}^{m=4} C_4^m a^{4-m} b^m =$$

$$= C_4^0 a^{4-0} b^0 + C_4^1 a^{4-1} b^1 + C_4^2 a^{4-2} b^2 + C_4^3 a^{4-3} b^3 + C_4^4 a^{4-4} b^4 =$$

$$= \frac{4!}{4!0!} a^4 + \frac{4!}{3!1!} a^3 b + \frac{4!}{2!2!} a^2 b^2 + \frac{4!}{1!3!} a b^3 + \frac{4!}{0!4!} b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Пример. Руководство фирмы выделило отделу рекламы средства для размещения в печати объявлений о предлагаемых фирмой товарах и услугах. По расчётам отдела рекламы, выделенных средств хватит для того, чтобы поместить объявления только в шести из десяти городских газет. Сколько существует способов случайного отбора газет для помещения объявлений?