ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . 9

Введение . . . 11

Глава 1. Случайные события. Вероятность . . . 14

1.1. Вероятностное пространство . . . 14

1.1.1. Пространство элементарных исходов и случайные события 14

1.1.2. Операции над событиями . . . 16

1.1.3. Алгебра. σ-алгебра . . . 17

1.1.4. Аксиоматика теории вероятностей . . . 19

1.2. Способы задания вероятности . . . 20

1.2.1. Классический способ задания вероятности . . . 20

1.2.2. Дискретное вероятностное пространство . . . 23

1.2.3. Геометрический способ задания вероятности . . . 25

1.2.4. Абсолютно непрерывное вероятностное пространство . . . 27

1.2.5. Частота и вероятность . . . 28

1.3. Простейшие формулы теории вероятностей . . . 29

1.3.1. Простейшие следствия из аксиом . . . 29

1.3.2. Теорема сложения . . . 30

1.3.3. Условная вероятность и ее свойства . . . 32

1.3.4. Теорема умножения . . . 34

1.3.5. Формула полной вероятности и формула Байеса . . . 35

1.4. Независимость случайных событий . . . 37

1.4.1. Независимые события и их свойства . . . 37

1.4.2. Типы связи между случайными событиями . . . 39

1.4.3. Независимость в совокупности . . . 40

1.4.4. Биномиальное распределение . . . 41

1.4.5. Схема Бернулли . . . 42

1.5. Задачи к главе 1 . . . 44

Глава 2. Случайные величины. Распределения . . . 47

2.1. Случайные величины . . . 47

2.1.1. Определение случайной величины на дискретном вероятностном пространстве . . . 47

2.1.2. Типичные дискретные случайные величины . . . 48

2.1.3. Определение случайной величины на произвольном вероятностном пространстве . . . 51

2.2. Функция распределения . . . 54

2.2.1. Свойства функции распределения . . . 54

2.2.2. Разложение функции распределения и типы случайных величин . . . 57

2.3. Дискретные случайные величины 59
2.4. Непрерывные случайные величины 60
2.4.1. Свойства плотности распределения 60
2.4.2. Типичные непрерывные случайные величины 61
2.4.3. Вывод распределения случайного времени работы сложной системы без учета эффекта усталости 62
2.5. Многомерные распределения 65
2.5.1. Свойства многомерной функции распределения 66
2.5.2. Типичные случайные векторы 69
2.6. Типы связи случайных величин 71
2.6.1. Маргинальное распределение 72
2.6.2. Независимость случайных величин 74
2.6.3. Стохастическая связь 75
2.6.4. Функции случайной величины 78
2.7. Функции случайного вектора 80
2.7.1. Распределение суммы. Формула свертки 81
2.7.2. Распределение отношения 82
2.8. Задачи к главе 2 85

Глава 3. Числовые характеристики 87
3.1. Математическое ожидание 87
3.1.1. Свойства математического ожидания 90
3.2. Дисперсия 92
3.2.1. Свойства дисперсии 93
3.3. Неравенство Чебышева 96
3.4. Закон больших чисел 98
3.5. Моменты распределения и другие характеристики 99
3.6. Числовые характеристики случайного вектора 101
3.6.1. Свойства ковариации 101
3.6.2. Коэффициент корреляции и его свойства 103
3.7. Условное математическое ожидание 105
3.8. Задачи к главе 3 109

Глава 4. Предельные теоремы 112
4.1. Предельные теоремы в схеме Бернулли 112
4.1.1. Предельный переход от гипергеометрической формулы к биномиальной формуле 112
4.1.2. Теорема Пуассона 114
4.1.3. Теоремы Муавра–Лапласа 115
4.2. Характеристические функции 116
4.3. Центральная предельная теорема 120
4.4. Задачи к главе 4 123

Глава 5. Выборка и ее характеристики 125
5.1. Задачи математической статистики 125
5.2. Статистическая структура и выборка 127
5.3. Выборочные аналоги функции распределения и моментов 131
5.4. Частота и вероятность 135
5.5. Задачи к главе 5 142

Глава 6. Оценивание 144
6.1. Задача оценивания параметров 144
6.2. Метод моментов 146
6.3. Метод разделяющих разбиений 149
6.4. Оценки максимального правдоподобия 151
6.5. Байесовские оценки 156
6.6. Свойства оценок 157
6.6.1. Несмещенность 158
6.6.2. Эффективность. 160
6.6.3. Состоятельность. 165
6.6.4. Асимптотическая нормальность 168
6.7. Доверительные интервалы 171
6.7.1. Неравенство Чебышева и доверительные интервалы. 171
6.7.2. Доверительный интервал для математического ожидания нормального закона при известной дисперсии 172
6.7.3. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения 175
6.7.4. Асимптотические доверительные интервалы 175
6.8. Асимптотические свойства эмпирической функции распределения 176
6.9. Задачи к главе 6 177

Глава 7. Тесты значимости 181
7.1. Гипотезы и тесты 181
7.2. Доверительные интервалы и проверка гипотез 182
7.3. Тесты значимости и принцип выбора критической области 183
7.4. Критерий χ^2. 185
7.5. Критерии Колмогорова и Смирнова 191
7.6. Вероятностное интегральное преобразование 194
7.7. Тесты λ Пирсона 195
7.8. Моделирование случайных величин 200
7.9. Задачи к главе 7 201

Глава 8. Оптимальные тесты 205
8.1. Понятие оптимальности 205
8.2. Фундаментальная лемма Неймана–Пирсона 208

8.3. Равномерно наиболее мощные тесты 215
8.4. Функция мощности 221
8.5. Несмещенность 223
8.6. Тест максимального правдоподобия 231
8.7. Достаточные статистики 234
8.8. Задачи к главе 8 237

Список литературы 239

Предметный указатель 240

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник содержит общий курс теории вероятностей и математической статистики, предусмотренный образовательными программами «Прикладная математика и информатика» и «Бизнес-информатика» Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Отметим ряд особенностей предлагаемого курса. Прежде всего, материал между теорией вероятностей и математической статистикой распределен равномерно, в то время как в имеющихся учебниках теории вероятностей традиционно уделяется большее внимание. Изучение математической статистики начинается с оценки числа наблюдений, необходимых для надежной оценки вероятности частотой, что подчеркивает общую цель получения практически достоверных выводов. Предлагаются вероятностная и статистическая трактовки неравенства Чебышева, что облегчает, на наш взгляд, понимание доверительных интервалов. Подчеркнуто значение универсального преобразования к равномерному закону и его применение к построению тестов проверки равномерности, которые позволяют лучше понять роль альтернативы при построении тестов проверки гипотез.

Подробно изучаются подход Неймана–Пирсона и экспоненциальные семейства распределений. Приводятся условия, при которых применение тестов приводит к надежным выводам при анализе реальных наблюдений. В части, связанной с теорией вероятностей, подчеркивается отличие аксиоматического определения вероятности от способов ее задания. Обсуждаются различные варианты введения пространства элементарных исходов. Делается акцент на построении и анализе вероятностных моделей. Выделяются условия, при которых типовые вероятностные модели адекватны реальным задачам; в частности, приводится подробный вывод экспоненциального распределения как вероятностной модели времени безотказной работы сложной системы без учета эффекта усталости. При изложении предельных теорем подчеркивается связь типовых вероятностных моделей; в частности, включен предельный переход от гипергеометрического к биномиальному распределению. Вместе с тем мы ограничились доказательством центральной предельной теоремы для независимых одинаково распределенных случайных величин, которого достаточно для статистического анализа повторной выборки. В годовой курс, по понятным причинам, не включены также «случайные процессы», «регрессионный анализ» и другие важные направления теории вероятностей и математической статистики. Доказательства основных теорем проводятся обычным образом, при необходимости даются соответствующие ссылки. При этом авторы опираются, в основном, на учебники [6, 16] и монографии [9, 11].

Учебник состоит из восьми глав. После каждой главы приведены задачи, которые служат для более детального изучения отдельных вопросов курса, и в этом случае на них даны ссылки в тексте. Кроме того, включены задачи, которые, на наш взгляд, обязательно должны быть детально разобраны на практических занятиях. Разумеется, они не исчерпывают набор задач, обычно решаемых на практических занятиях.

Формулы, рисунки, таблицы и задачи имеют двухступенчатую нумерацию: номер главы; номер формулы, рисунка, таблицы или задачи. Определения, примеры, теоремы, следствия и свойства имеют трехступенчатую нумерацию: номер главы; номер раздела; номер определения, примера, теоремы, следствия или свойства.

Предлагаемый учебник написан на основе лекционных и практических занятий, проводимых авторами на протяжении последних 10 лет в НИУ ВШЭ — Нижний Новгород. Он предназначен прежде всего студентам второго курса образовательных программ «Прикладная математика и информатика», «Бизнес-информатика», «Программная инженерия». Учебник может быть полезен студентам, обучающимся по другим образовательным программам, предусматривающим изучение теории вероятностей и математической статистики на базе обычного курса математического анализа, студентам магистерской программы «Интеллектуальный анализ данных», а также всем тем, кто хотел бы научиться грамотно применять методы вероятностного и статистического анализа и оценивать степень надежности результатов их применения.

ВВЕДЕНИЕ

Можно выделить класс явлений реального мира, которые характеризуются следующими общими чертами.

- Для описания этих явлений *естественно* использовать такое понятие, как вероятность.
- Знание вероятностей часто вполне *достаточно* для решения практических задач.
- Вероятности сложных событий можно вычислять, используя *формулы*, связывающие их с вероятностями простых событий. Ответ на вопрос, как это делается, является одной из основных задач теории вероятностей.
- На основе анализа наблюдений можно делать *выводы* о вероятностях и других характеристиках этих событий. Ответ на вопрос, как это делается, является одной из основных задач математической статистики.

Для пояснения сделанных утверждений рассмотрим одну из первых задач, с которой началось интенсивное развитие науки о случайном. Такая задача известна как задача де Мерэ об игре в кости, которая была распространена в XVII веке во Франции.

Пример В.1. Задача де Мерэ: играют два игрока, один из игроков подбрасывает 24 раза два кубика одновременно. Один из игроков ставит на то, что за 24 броска ни разу не выпадут две шестерки одновременно. Другой игрок ставит на противоположное событие. Вопрос: на что разумнее ставить?

Де Мерэ подробно рассмотрел вспомогательную задачу: играют два игрока, один из игроков подбрасывает 4 раза один кубик. Первый игрок ставит на то, что за 4 броска ни разу не выпадет шестерка. Второй игрок ставит на противоположное событие: за 4 броска хотя бы один раз выпадет шестерка. Де Мерэ правильно решил, что выгоднее ставить на выпадение хотя бы раз шестерки. Опираясь на этот результат, он считал, что больше шансов за то, что за 24 броска хотя бы один раз выпадут две шестерки одновременно. Стал ставить на это событие и стал чаще проигрывать.

Обсудим эту задачу с позиций сформулированных выше утверждений.

- Очевидно, что заранее предсказать, как именно выпадут кубики в каждом конкретном броске, невозможно. *Естественно* попытаться найти шансы (вероятность) наступления того или иного события.
- Французский математик Блез Паскаль вычислил вероятность того, что за 24 броска хотя бы раз выпадут две шестерки одновременно,

и для симметричных кубиков получил приблизительно 0,491. Таким образом, *достаточно* знать результаты Паскаля, чтобы выигрывать при большом количестве игр.

- *Формула*, по которой Паскаль вычислил вероятность события «за 24 броска хотя бы раз выпадут две шестерки одновременно», представляет самостоятельный интерес. Это событие мы рассматриваем как сложное событие. Под простым событием в данном случае понимается событие «при одном броске кубика выпала шестерка». Для симметричных кубиков естественно предположить, что вероятность простого события равна $\frac{1}{6}$.
- Наблюдая за результатами бросаний двух кубиков одновременно, де Мерэ пришел к *выводу* об ошибочности своей стратегии.

Сделаем замечание о природе возникновения случайного события в общем случае. Пусть нас интересуют шансы появления некоторого события A. Всякое событие происходит в некоторых условиях. Пусть S — условия, которые влияют на A и которые мы контролируем , а S' — условия, которые влияют на A, но не контролируются нами. Далее, пусть влияние S' на A существенно, т.е. от того, как сложится ситуация в S', событие A может как произойти, так и не произойти. Так как ситуацию в S' мы не контролируем, то событие A мы можем рассматривать как случайное.

Пример В.2. Задача о стрельбе. Пусть событие A — попасть в мишень. К комплексу условий S отнесем все то, что можно контролировать (тип оружия, характеристика стрелка и цели и т.п.). К комплексу условий S' (источники случайности) отнесем все то, что не поддается контролю (возможные маневрирования цели, дальность до цели, тщательность прицеливания и т.п). Если влияние S' на A существенно, то заранее предсказать его появление мы не можем. Пусть мы каким-то образом (например, экспериментально) оценили вероятность попадения в мишень при одном выстреле, и эта вероятность не так велика, как нам бы хотелось. Интуитивно кажется, что чем больше раз выстрелить, тем больше вероятность хотя бы один раз попасть. Поэтому можно поставить такой вопрос: сколько раз надо выстрелить, чтобы вероятность хотя бы одного попадания была, например 0,9 (0,99)? Интересно отметить, что такая задача решается так же, как и задача де Мерэ.

Таким образом, основная задача элементарной теории вероятностей заключается в получении формул расчета вероятностей сложных событий через вероятности связанных с ними простых событий. (При этом вопрос, откуда берутся вероятности простых событий, не суть важен.) Такие формулы позволяют выделять события, которые являются практически достоверными в ситуациях, когда многое случайно.

С прикладной точки зрения целью теории вероятностей является создание методов предсказания поведения наблюдений над случайными явлениями по известным вероятностным характеристикам этих явлений. Целью математической статистики является создание методов анализа результатов наблюдений, позволяющих сделать выводы о неизвестных характеристиках изучаемых явлений, что в конечном счете дает возможность строить обоснованную стратегию поведения в условиях неопределенности. Именно эти методы, основанные на соответствующей математической модели, представляют интерес и составляют предмет теории вероятностей и математической статистики.

1

ГЛАВА

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ

1.1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1.1.1. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ И СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Пусть в условиях S проводится (или планируется) некоторый эксперимент, результат которого неоднозначен. Пусть ω_1 — конкретный результат или исход этого эксперимента, ω_2 — другой исход и т.д.

Определение 1.1.1. *Совокупность всех возможных взаимоисключающих исходов обозначим Ω и назовем пространством элементарных исходов. Элементы Ω будем обозначать ω и называть элементарными исходами.*

Некоторые подмножества Ω будем называть случайными событиями и обозначать $A, B, C, \ldots$ Если эксперимент закончился исходом ω и известно, что $\omega \in A$, то будем говорить, что произошло событие A. Пара $(\Omega, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — некоторый класс событий, является математической моделью эксперимента со случайными исходами.

Выделим два предельных случая. Само пространство Ω будем называть достоверным событием, так как $\forall \omega \in \Omega$. Пустое множество $\varnothing$ будем называть невозможным событием, так как $\forall \omega \notin \varnothing$.

Так как Ω — модель, то не существует строгих правил построения Ω. Точно так же для одной и той же задачи пара $(\Omega, \mathcal{A})$ может быть введена разными способами. Однако существуют два обязательных требования к этой модели.

Требование 1: любой эксперимент в условиях S должен заканчиваться наступлением одного и только одного элементарного исхода из введенного пространства элементарных исходов.

Требование 2: если эксперимент планируется для изучения набора событий $\mathcal{K} = \{A, B, C, \ldots\}$, то Ω должно быть введено так, чтобы эти события были представимы как подмножества Ω, а если события по смыслу различны, то и подмножества должны быть разными. Другими словами, пространство элементарных исходов Ω вводится с позиций того класса событий, которые требуется изучить.

Пример 1.1.1. Пусть стрельба ведется так, что попадание в мишень (круг радиуса R) гарантировано (см. рис. 1.1).

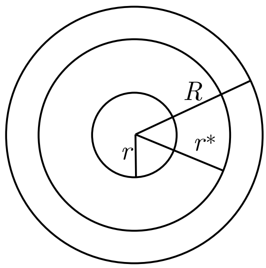

Рис. 1.1. Мишень

Требуется построить пространство элементарных исходов для изучения следующего набора событий: событие A — попасть в круг радиуса r^*, событие B — попасть в круг радиуса r. Введем пространство элементарных исходов двумя способами:

- Способ 1: пусть элементарный исход ω_1 означает попасть в круг радиуса r, элементарный исход ω_2 означает попасть между кругами с радиусами r^* и r (заметим, что элементарный исход ω_2 нельзя ввести как попадание в круг радиуса r^*, так как в этом случае элементарные исходы ω_1, ω_2 не являются взаимоисключающими), элементарный исход ω_3 означает попасть вне круга радиуса r^*. Тогда $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, событие $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, событие $B = \{\omega_1\}$.
- Способ 2: введем систему координат (см. рис. 1.2).

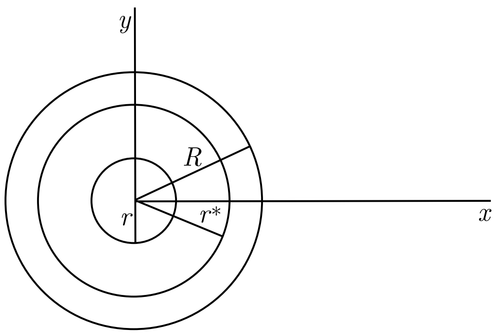

Рис. 1.2. Мишень

Пусть элементарным исходом являются координаты точки попадания, т.е. пара чисел (x, y). Тогда пространство элементарных исходов имеет вид $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$, а события $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r^*\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r\}$.

Для рассматриваемой задачи оба способа введения пространства элементарных исходов допустимы. Однако, если изучать также событие «попасть в сектор некоторого угла с центром в т. (0,0)», то это событие не представимо как подмножество пространства элементарных исходов, введенного первым способом, и представимо как подмножество пространства элементарных исходов, введенного вторым способом. Вместе с тем, если интересоваться еще и типом оружия, то оба способа введения пространства элементарных исходов не удовлетворяют необходимым требованиям.

1.1.2. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Так как события рассматриваются как множества, то естественно воспользоваться операциями теории множеств.

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, A, B — события, т.е. некоторые подмножества Ω.

Определение 1.1.2. *Говорят, что событие A влечет событие B, и записывают $A \subset B$, если $\forall \omega \in A$ справедливо $\omega \in B$.*

Определение 1.1.3. *Событие A называют равносильным событию B и записывают $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.*

Определение 1.1.4. *Событие $C = A \cup B$ называется объединением событий A и B, если C происходит тогда и только тогда, когда происходит или A, или B, или A и B одновременно, $C = \{\omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$.*

Определение 1.1.5. *Событие $C = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ называется объединением событий $A_\gamma, \gamma \in \Gamma$, Γ — произвольное множество индексов, если C происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий $A_\gamma, \gamma \in \Gamma$.*

Определение 1.1.6. *Событие $D = A \cap B$ называется пересечением событий A и B, если D происходит тогда и только тогда, когда происходят A и B одновременно, т.е. $D = \{\omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$.*

Определение 1.1.7. *Событие $D = \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ называется пересечением событий $A_\gamma, \gamma \in \Gamma, \Gamma$ — произвольное множество индексов, если D происходит тогда и только тогда, когда происходят все события $A_\gamma, \gamma \in \Gamma$.*

Определение 1.1.8. *События A и B называются несовместными, если $A \cap B = \varnothing$.*

Определение 1.1.9. *Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A или дополнением события A, если $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит A, т.е. $\overline{A} = \{\omega : \omega \notin A\}$.*

Определение 1.1.10. *Событие $F = A \setminus B$ называется разностью событий A и B, если F происходит тогда и только тогда, когда происходит A и не происходит B, т.е. $F = \{\omega : \omega \in A, \omega \notin B\} = A \cap \overline{B}$.*

Из теории множеств известно, что для введенных операций выполняются следующие законы:

1) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$,
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
4) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

1.1.3. АЛГЕБРА. σ-АЛГЕБРА

Под вероятностью мы будем понимать функцию, аргументом которой является случайное событие. Областью определения этой функции является некоторый класс событий. Классы событий, удобные в математическом плане, определяются свойством замкнутости относительно введенных операций.

Определение 1.1.11. *Класс событий $\mathcal{A} = \{A, B, C, \ldots\}$ называется алгеброй, если выполняются условия*:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$,
2) *если* $A \in \mathcal{A}$, *то* $\overline{A} \in \mathcal{A}$,
3) *если* $A, B \in \mathcal{A}$, *то* $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Замечание 1.1.1. Этих условий достаточно для того, чтобы все события, образованные посредством конечного числа всех введенных операций над событиями из $\mathcal{A}$, также принадлежали $\mathcal{A}$. Для пояснения этого покажем, что если $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Так как $A, B \in \mathcal{A}$, то $\overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{A}$, следовательно, $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{A}$ и $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{A}$. Так как $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$. Таким образом, если мы зададим вероятность на $\mathcal{A}$, то все события из $\mathcal{A}$ будут иметь вероятность, что необходимо для получения формул, связывающих вероятности сложных и простых событий из $\mathcal{A}$.

Из определения алгебры следует, что наименьший класс событий, который является алгеброй, имеет вид $\{\varnothing, \Omega\}$.

Если нас интересует только одно событие A, то в качестве алгебры можно использовать класс событий $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\}$. Такую алгебру называют алгеброй, порожденной событием A.

Пусть нас интересует некоторый класс событий $\mathcal{K} = \{A, B, C, \ldots\}$.

Определение 1.1.12. *Алгебра $\mathcal{A}$, содержащая все события из $\mathcal{K}$ (порожденная $\mathcal{K}$), называется минимальной, если никакое ее подмножество, содержащее все события из $\mathcal{K}$, не является алгеброй.*

Для изучения бесконечного числа событий вводится понятие σ-алгебры.

Определение 1.1.13. *Класс событий $\mathcal{A} = \{A, B, C, \ldots\}$ называется σ-алгеброй, если выполняются условия:*

1) $\Omega \in \mathcal{A}$,
2) *если* $A \in \mathcal{A}$, *то* $\overline{A} \in \mathcal{A}$,
3) *для любой последовательности событий* $\{A_i\}, i = 1, \ldots$, *таких что* $A_i \in \mathcal{A}$, *справедливо* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Определение 1.1.14. *σ-алгебра $\mathcal{A}$, порожденная $\mathcal{K}$, называется минимальной, если никакое ее подмножество, содержащее все события из $\mathcal{K}$, не является σ-алгеброй.*

В приложениях теории вероятностей часто возникают задачи, связанные с нахождением вероятностей событий, которые представляют собой попадания некоторых чисел в интервалы действительной прямой. Очевидно, что множество всех интервалов не является алгеброй, так как, например, объединение двух интервалов не обязательно является интервалом. Можно построить минимальную σ-алгебру, содержащую все интервалы действительной прямой, их счетные объединения, пересечения, противоположные им события и т.д.

Определение 1.1.15. *Минимальная σ-алгебра, порожденная интервалами действительной прямой, называется борелевской.*

Аналогично вводится понятие борелевской σ-алгебры в R^N.

Доказано, что на борелевской σ-алгебре можно задать вероятность как функцию множества, обладающую определенными свойствами, которые сформулированы в разд. 1.1.4 как аксиомы. В этом случае все подмножества R^N, которые являются элементами борелевской σ-алгебры, будут иметь вероятность.

Определение 1.1.16. *Случайным событием или просто событием называется такое подмножество пространства элементарных исходов Ω, которое является элементом выделенной σ-алгебры подмножеств Ω.*

Определение 1.1.17. *Пара $(\Omega, \mathcal{A})$ называется измеримым пространством.*

Более детально введенные понятия обсуждаются в [18].

1.1.4. АКСИОМАТИКА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В настоящее время общепринятой является аксиоматика, предложенная в [8]. Пусть дано пространство Ω, которое мы будем называть пространством элементарных исходов. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый класс подмножеств Ω.

Аксиома 1: *$\mathcal{A}$ является алгеброй. Элементы $A \in \mathcal{A}$ называются случайными событиями.*

Аксиома 2: $\forall A \in \mathcal{A}$ *поставлено в соответствие действительное, неотрицательное число* $P(A) \geqslant 0$, *которое называется вероятностью события A.*

Аксиома 3 (аксиома нормировки)**:** $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 4 (аксиома конечной аддитивности)**:**

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \varnothing \to P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1.1}$$

Замечание 1.1.2. Аксиому 4 можно было бы сформулировать сразу для произвольного конечного числа попарно непересекающихся событий. Такая формулировка дана в следствии 1.3.5.

Замечание 1.1.3. Здесь и далее мы будем использовать сокращенную запись, используя математические кванторы. Например, запись (1.1) означает: для любых событий A, B, являющихся элементами алгебры $\mathcal{A}$, которые не имеют общих точек (не пересекаются), вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B.

Теория вероятностей, основанная на этих 4-х аксиомах, называется элементарной. Ее вполне достаточно для рассмотрения всех случаев, когда пространство Ω состоит из конечного числа элементарных исходов.

При рассмотрении задач, в которых пространство Ω состоит из бесконечного числа элементарных исходов, система аксиом имеет следующий вид.

Аксиома 1: *$\mathcal{A}$ является σ-алгеброй событий.*

Аксиома 2: $\forall A \in \mathcal{A} \to P(A) \geqslant 0$.

Аксиома 3: $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 4: $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \varnothing \to P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Аксиома 5 (непрерывности)**:** для любой монотонно убывающей последовательности событий $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_i \supset A_{i+1} \supset \ldots$ справедливо $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing \to \lim\limits_{i \to \infty} P(A_i) = 0$.

Можно доказать [3], что аксиомы 4 и 5 эквивалентны аксиоме 6.

Аксиома 6 (счетной аддитивности): *для любой последовательности событий* $\{A_n\} : A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$, *справедливо*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Определение 1.1.18. *Тройка* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *где* Ω — *пространство элементарных исходов*, $\mathcal{A}$ — σ*-алгебра его подмножеств*, P *удовлетворяет аксиомам 2–5, называется вероятностным пространством.*

1.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Подчеркнем, что с точки зрения получения формул то, как именно заданы вероятности, значения не имеет. Необходимо лишь, чтобы они существовали. Вместе с тем для приложений важно знать типовые апробированные способы задания вероятностей, т.е. способы задания (чаще говорят, определения) функций, которые удовлетворяют всем аксиомам теории вероятностей. Мы будем пользоваться термином «задание», чтобы подчеркнуть аксиоматический характер определения вероятности.

1.2.1. КЛАССИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Исторически первым способом задания вероятности является классический способ, который основан на двух постулатах.

Постулат конечности: пространство элементарных исходов Ω состоит из конечного числа элементарных исходов, т.е.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}.$$

Постулат равновозможности: выделенные элементарные исходы симметричны, и представляется естественным предположение о равновозможности элементарных (состоящих только из одного элементарного исхода) событий, т.е. полагаем, что $\forall i, j = 1, \ldots, N$

$$P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\}).$$

Предположим, что нас интересуют все подмножества Ω. Каждому непустому подмножеству $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\} \subset \Omega$ поставим в соответствие число $P(A) = \dfrac{k}{N}$. Положим также $P(\varnothing) = 0$.

Проверим, что так заданная функция удовлетворяет аксиомам 1–4, т.е. может рассматриваться как вероятность.

1. Множество всех подмножеств конечного множества замкнуто относительно операций объединения и дополнения, т.е. является алгеброй.

2. $P(A) = \dfrac{k}{N} \geqslant 0$.
3. $P(\Omega) = \dfrac{N}{N} = 1$.
4. Если $A \cap B = \varnothing$, то A и B состоят из разных элементарных исходов. Пусть $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, $B = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots, \omega_{j_l}\}$. Тогда $A \cup B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}, \omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots, \omega_{j_l}\}$ состоит из $k + l$ элементарных исходов. Следовательно,
$$P(A \cup B) = \frac{k+l}{N} = \frac{k}{N} + \frac{l}{N} = P(A) + P(B).$$

Пример 1.2.1. Кубик подбрасывается один раз. Событие $A = \{$выпало четное число очков$\}$. Пусть элементарный исход ω_i означает, что при броске кубика выпало i очков, $i = 1, \ldots, 6$. Тогда пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, событие $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Поэтому в соответствии с классическим способом задания вероятности $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Подчеркнем, что решающим предположением при этом является постулат равновозможности, который можно принять, если кубик идеальный.

Пример 1.2.2. Одновременно подбрасываются два кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков при одном броске равна 12. Введем пространство элементарных исходов Ω двумя различными способами.

Способ 1. Элементарным исходом ω_i является сумма очков, выпавших на кубиках, т.е. $\Omega_1 = \{\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{12}\}$. Следовательно, в предположении равновозможности элементарных событий $P(\{\omega_{12}\}) = \dfrac{1}{11}$.

Способ 2. Элементарным исходом является пара (i, j) выпавших очков т.е. $\Omega_2 = \{\omega_{i,j} : i, j = 1, \ldots, 6\} = \{\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \omega_{1,3}, \ldots, \omega_{6,6}\}$. Следовательно, в предположении равновозможности $P(\{\omega_{6,6}\}) = \dfrac{1}{36}$.

Таким образом, имеем две различные вероятности одного и того же события. Возникает естественный вопрос: какой способ подсчета вероятности «правильный», т.е. отвечает сути задачи?

Приведем аргументы за то, что вероятность, подсчитанная вторым способом, «правильна». В самом деле, едва ли можно предположить, что элементарные события из пространства элементарных исходов Ω_1 равновозможны, так как элементарному исходу ω_2 соответствует случай, когда на первом кубике выпала «1» и на втором кубике выпала «1», элементарному исходу ω_3 соответствует случай, когда на первом кубике выпала «1» и на втором кубике выпала «2» или на первом кубике выпала «2» и на втором кубике выпала «1», элементарному исходу ω_4 соответствует случай, когда на первом кубике выпала «1» и на втором кубике выпала «3» или на первом кубике выпала «2» и на втором кубике выпала «2», или на первом кубике выпала «3» и на втором кубике выпала «1» и т.д. То есть естественно предположить, что вероятность события «сумма выпавших очков равна 2» в два раза меньше вероятности события «сумма выпавших очков равна 3» и в три раза меньше вероятности события «сумма выпавших очков равна 4».

Необходимо подчеркнуть, что проблема состоит не в том, что пространство элементарных исходов для этой задачи нельзя задавать как Ω_1, а в том, что для вычисления вероятностей событий, используя пространство элементарных исходов Ω_1, классический способ задания вероятности применять не стоит, так как элементарные события неразумно считать равновозможными. При этом формальной ошибки не возникает, так как вероятностное пространство $(\Omega_1, \mathcal{A}, P)$ введено корректно, т.е. все аксиомы выполняются. Практически же мы решаем не ту задачу, которую хотели.

Пример 1.2.3. Контроль знаний студентов. Для каждого студента зачет представляет собой тест из 5 вопросов, на каждый из которых можно дать или положительный (да), или отрицательный (нет) ответ. Перед зачетом преподаватель объявляет студентам, что те из них, кто правильно ответит не менее, чем на n $(1 \leqslant n \leqslant 5)$ вопросов, получат зачет. Задача заключается в следующем: каким надо задать n, чтобы вероятность того, что студент, совершенно не знающий материал и отвечающий наугад (т.е. ставящий ответ «да» на текущий вопрос с вероятностью 0,5), получил бы зачет, была не более 0,2?

Решение. Под элементарным исходом будем понимать вектор из 5 компонент с элементами 0, 1, где 0 на i-й позиции означает, что на i-й вопрос студент дал ответ «нет», 1 на i-й позиции означает, что на i-й вопрос студент дал ответ «да», т.е.

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \forall x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, 5\}.$$

Для студента, отвечающего наугад, все элементарные события равновозможны, поэтому можно положить, что вероятность события, состоящего из одного (любого) элементарного исхода, равна $\frac{1}{32}$.

Пусть $n = 5$. Тогда событие $A =$ «зачет будет сдан студентом, отвечающим наугад» состоит из исхода, соответствующего всем правильным ответам. Такой исход один, т.е. вероятность события А равна $\frac{1}{32} < 0{,}2$.

Пусть $n = 4$. Тогда событие $A =$ «зачет будет сдан студентом, отвечающим наугад» состоит из 6 исходов. Если предположить, что правильным является, например, набор $(1, 1, 1, 1, 1)$, то эти исходы имеют вид

$$(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1),$$
$$(1, 1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1),$$

т.е. вероятность события А равна $\frac{6}{32} < 0{,}2$.