ПРЕДИСЛОВИЕ К КНИГЕ

Юрий Николаевич Гавриленко (1951–2016), доктор технических наук, профессор, последние 30 лет своей жизни работал в Донецком национальном техническом университете на кафедре «Геоинформатика и геодезия», академик Академии горных наук Украины, специалист в области сдвижения горных пород и земной поверхности при разработке угольных месторождений в сложных горно-геологических условиях, проблемах охраны окружающей среды при закрытии угольных шахт Донбасса, применении геоинформационных систем и технологий для ведения земельного кадастра и оценки влияния подземных горных работ на земную поверхность. Автор 150 печатных работ, из которых 2 монографии, 1 учебное пособие и 1 учебник, выдержавший 3 издания, 7 отраслевых нормативно-методических документов, 6 авторских свидетельств и патентов. Являлся научным консультантом двух докторов наук и руководителем трех кандидатов наук. Награжден знаком «Шахтерская слава» третьей степени, знаком «Отличник образования Украины», знаком «Изобретатель СССР».

Последние годы своей жизни Юрий Николаевич активно занимался фундаментальными исследованиями в области высшей геодезии, спутниковых методов позиционирования. Так как он вел активную педагогическую деятельность, то у него возникло естественное желание как-то по-новому передать свой опыт и знания. Это и явилось побудительным мотивом написания данной книги.

Юрия Николаевича Гавриленко не стало, когда ему было всего 65 лет. Являясь признанным ученым, он продолжал активно заниматься научными исследованиями, создавать новые программы и писать научные труды. Еще много мог бы сделать человек с таким научным потенциалом, как у Юрия Николаевича Гавриленко.

Его коллеги и друзья считают, что издание этого учебника будет лучшей памятью о нем.

ВВЕДЕНИЕ

Сфероидическая геодезия является одним из важнейших разделов высшей геодезии. Она изучает:

— геометрию поверхности земного эллипсоида;

— методы решения геодезических задач на этой поверхности и изображения Земли на плоскости.

При этом как самостоятельные задачи рассматриваются:

— свойства нормальных сечений;

— свойства геодезических линий;

— основные координатные линии на поверхности эллипсоида;

— отображение поверхности эллипсоида по частям на плоскости;

— методы перевычисления эллипсоидальных координат B и L в плоские прямоугольные (x и y) и обратно.

В зарубежной литературе сфероидическую геодезию иногда называют математической геодезией или геометрической геодезией.

В сфероидической геодезии предполагается, что результаты геодезических измерений, которые используются для решения различных задач, относятся к поверхности эллипсоида. Так как геодезические измерения выполняются на физической поверхности Земли, то все непосредственные измерения предварительно должны быть приведены (редуцированы) на поверхность эллипсоида.

Для числового решения геодезических задач на поверхности эллипсоида необходимо знать его размеры. Их получают на основании результатов астрономо-геодезических и гравиметрических работ, а также спутниковых наблюдений.

Весьма желательно, чтобы эллипсоид имел наибольшую близость к фигуре Земли ***в целом***. Такой эллипсоид называется ***общим земным эллипсоидом*** и определяется следующими условиями:

1) совпадением центра эллипсоида с центром тяжести Земли и плоскости его экватора с плоскостью земного экватора;

2) минимумом суммы уклонений по высоте геоида во всех его точках от поверхности эллипсоида.

Для определения параметров и ориентировки общего земного эллипсоида необходимы геодезические измерения на всей поверхности Земли. Это достаточно трудоемкая задача, хотя она и упрощается с использованием искусственных спутников Земли. Поэтому в отдельных странах (или группах стран) для обработки геодезических измерений используются эллипсоиды, выведенные по результатам геодезических работ, охватывающих территорию данной страны или нескольких стран. Такие «рабочие» эллипсоиды называются ***рефе-***

ренц-эллипсоидами. Референц-эллипсоид отличается от общего земного эллипсоида. Это различие заключается в несовпадении их центров и размеров, а условие минимума суммы квадратов отклонений выполняется для референц-эллипсоида не на всей поверхности Земли, а только для той части, на которой были выполнены геодезические работы, результаты которых использованы для вывода его параметров. Поэтому ***референц-эллипсоид можно рассматривать как эллипсоид, подходящий только для части поверхности Земли***.

Таким образом, при изучении сфероидической геодезии будем исходить из следующих двух положений:

1) геодезические измерения относятся к поверхности эллипсоида, т. е. они как бы произведены непосредственно на поверхности эллипсоида;

2) параметры земного эллипсоида (референц-эллипсоида) известны.

При изложении материала авторами применены следующие принципы.

1. Изложение основ и методов решения задач применительно к использованию современной вычислительной техники. Персональные компьютеры существенно расширили возможности практического использования различных методов и математических формул решения вычислительных геодезических задач. Те формулы и способы, которые ранее были трудоемки и неудобны для вычислений, стали целесообразны и эффективны. Современные программные средства и компьютерная техника не накладывают практически никаких ограничений на алгоритмы решения вычислительных задач.

2. Вывод формул в простой и доступной форме для понимания современными студентами без ущерба строгости изложения.

3. Минимальное число формул, приводимых без вывода. Это, безусловно, несколько перегружает учебник, но позволяет избежать на лекциях механического вывода формул, т. е. упражнений в математических преобразованиях, оставляя их для самостоятельной проработки студентами.

4. Упор на практическое значение рассматриваемых вопросов, которые встречаются в практике специалистов. В соответствии с этим большое внимание уделено вопросам применения систем плоских прямоугольных координат и всему, что с этим связано.

5. Учебник содержит большое количество вычислительных примеров для того, чтобы любой специалист, владеющий азами программирования, мог осуществить проверку правильности функционирования разрабатываемых программных средств. Это позволяет

избавить студентов от механических вычислений, состоящих, как правило, в подстановке численных значений в формулы, сосредоточить внимание на понимании сущности решаемых задач, методах их решения и осознанного анализа получаемых результатов. Такой подход, на наш взгляд, должен развивать у студентов навыки в обобщении результатов и в формулировании выводов, приучать их к современной технологии решения геодезических задач.

ГЛАВА 1. ГЕОМЕТРИЯ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

1.1. Элементы земного эллипсоида

Земным эллипсоидом называется эллипсоид вращения, поверхность которого как по форме, так и по размерам достаточно близка к поверхности геоида. Поверхность земного эллипсоида образуется вращением эллипса вокруг его малой оси. Возьмем эллипс EPE_1P_1 (рис. 1.1) и будем его вращать вокруг малой оси PP_1. В результате получим эллипсоид вращения (рис. 1.2).

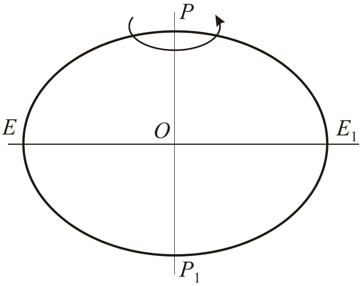

Рис. 1.1

Меридианный эллипс

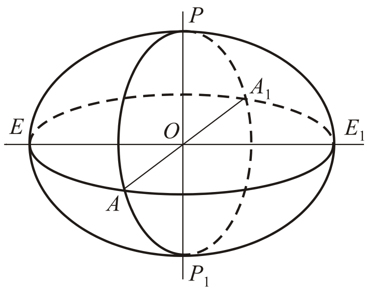

Рис. 1.2

Эллипсоид вращения

В качестве элементов земного эллипсоида, характеризующих его формы и размеры, в геодезии используют следующие величины:

$a = OE = OE_1 = OA$ — экваториальная или большая полуось эллипсоида;

$b = OP = OP_1$ — полярная или малая полуось эллипсоида;

$\alpha = \dfrac{a-b}{a}$ — полярное сжатие эллипсоида;

$e = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$ — первый эксцентриситет меридианного эллипса;

$e' = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{b^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}$ — второй эксцентриситет меридианного эллипса.

Элементы эллипсоида связаны между собой простыми математическими зависимостями, позволяющими каждый из перечисленных элементов выразить в функции остальных:

$$\left.\begin{aligned}
&a=\frac{b}{1-\alpha}=\frac{b}{\sqrt{1-e^2}}=b\sqrt{1+e'^2};\quad b=a(1-\alpha)=a\sqrt{1-e^2}=\frac{a}{\sqrt{1+e'^2}};\\
&\alpha=\frac{a-b}{a}=1-\sqrt{1-e^2}=1-\frac{1}{\sqrt{1+e'^2}};\quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\alpha(2-\alpha)=\frac{e'^2}{1+e'^2};\\
&e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)^2}=\frac{e^2}{1-e^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Параметры a, b или a, α являются основными величинами, определяющими эллипсоид вращения; остальные — вспомогательными, применяемыми в вычислениях и теоретических выводах.

Для вывода численных значений земного эллипсоида используется большое количество геодезических, астрономических, гравиметрических и спутниковых измерений. В странах СНГ и в ряде других стран при выполнении геодезических и картографических работ используется эллипсоид Красовского. Значения исходных элементов этого эллипсоида, полученные в ЦНИИГАиК в 1940 г., равны [6]:

$$a = 6\ 378\ 245{,}0 \text{ м},$$

$$\alpha = 1 : 298{,}3 = 0{,}0033523299.$$

Численные значения других элементов эллипсоида Красовского, вычисленные по исходным, приведены ниже:

$$b = 6\ 356\ 863{,}0188 \text{ м};$$

$$e^2 = 0{,}0066934216;$$

$$e'^2 = 0{,}0067385254.$$

Согласно Постановлению Правительства Российской Федерации № 1463 от 28 декабря 2012 г., в России с 1 января 2021 г. при выполнении геодезических и картографических работ используется эллипсоид ГСК-2011 [11]. Значения исходных элементов этого эллипсоида равны:

$$a = 6\ 378\ 136{,}5 \text{ м},$$

$$\alpha = 1 : 298{,}2564151 = 0{,}00335281975.$$

Ввиду малого полярного сжатия земной эллипсоид по форме близок к шару. Такие эллипсоиды с малым сжатием называют также ***сфероидами***. Степень сжатия земного эллипсоида можно представить следующим образом. Если взять глобус радиусом 30 см, то приплюснутость данного эллипсоида сверху будет всего-навсего 1 мм.

1.2. Основные системы координат, применяемые в сфероидической геодезии

Система прямоугольных пространственных координат

За начало координат принимается центр эллипсоида, ось Z располагается по полярной оси эллипсоида, ось X — в плоскости, перпендикулярной оси вращения, ось Y дополняет систему координат до правой (рис. 1.3). Координаты точки M на эллипсоиде в этой системе следующие:

$$X = M_1M_2 \text{ или } X = OM_3;$$
$$Y = OM_2;$$
$$Z = MM_1.$$

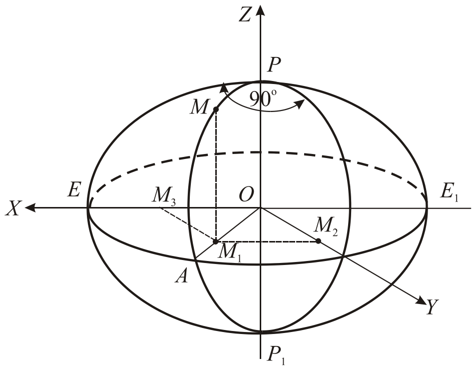

Рис. 1.3

Система прямоугольных пространственных координат

Пространственные координаты X, Y, Z до последнего времени имели небольшое применение, как в теоретических выводах, так и в практических вычислениях. Однако в связи с широким внедрением в геодезическую практику спутниковых методов позиционирования данная система координат приобретает большое теоретическое и практическое значение.

Система геодезических координат

Плоскости, перпендикулярные оси вращения, в пересечении с поверхностью эллипсоида дают окружности. Эти окружности называются ***параллелями.*** Параллель с наибольшим радиусом $r = a$ называется ***экватором*** (рис. 1.4).

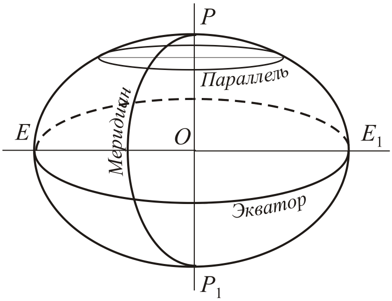

Рис. 1.4

Координатные линии на поверхности эллипсоида

Пересекая поверхность эллипсоида плоскостями, содержащими ось вращения, получим в сечении совершенно одинаковые кривые — эллипсы. Половина каждого эллипса, расположенная между полюсами, называется ***меридианом***.

Параллели и меридианы можно применять в качестве системы ортогональных линий на эллипсоиде, так как каждая параллель пересекается с каждым меридианом под прямым углом, а их пересечение определяет положение единственной точки на поверхности эллипсоида.

В данной системе в качестве координат приняты угловые величины. Рассмотрим их.

Примем один из меридианов за начальный (например, меридиан PAP_1, рис. 1.5). Тогда положение любого другого меридиана будет определяться двугранным углом, составленным плоскостью начального меридиана и плоскостью данного меридиана. Этот угол имеет одну и ту же величину для всех точек данного меридиана, обозначается буквой L и является геодезической долготой.

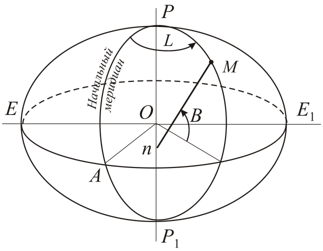

Рис. 1.5

Геодезические координаты

Геодезической долготой L некоторой точки M называется двугранный угол, образованный плоскостью начального меридиана и плоскостью меридиана, проходящего через данную точку M.

В качестве начального меридиана для счета долгот в настоящее время повсеместно принят меридиан, проходящий через Гринвичскую обсерваторию, — Гринвичский меридиан. Долготы, отсчитываемые от плоскости начального меридиана к востоку (в северном полюсе — против движения часовой стрелки) в пределах от 0 до 180°, называют восточными долготами, а к западу в пределах от 0 до –180° — западными долготами точки.

Таким образом, меридиан есть координатная линия, во всех точках которой геодезическая долгота имеет одну и ту же величину (L = const).

Для установления второй координаты проведем нормаль к поверхности эллипсоида в точке M. Она пересечет ось вращения в точке n.

Острый угол, образованный нормалью к поверхности эллипсоида и плоскостью экватора (или плоскостью любой параллели), называется ***геодезической широтой*** — B.

Геодезическая широта отсчитывается от плоскости экватора до полюсов в пределах от 0 до 90°. Для точек, расположенных в северном полусфероиде, ее принято называть северной и считать положительной, а в южном полусфероиде — соответственно южной и отрицательной.

Таким образом, параллель есть координатная линия, во всех точках которой широта имеет одну и ту же величину (B = const).

Система геодезических координат является единой для всей поверхности эллипсоида. В этом заключается одно из ее достоинств. Она используется [1]:

— при обработке обширных геодезических сетей;

— при решении задач, связанных с передачей координат на значительные расстояния;

— при изучении фигуры и размеров Земли;

— при наблюдении искусственных спутников Земли;

— при составлении географических и топографических карт, в частности система геодезических координат положена в основу разграфки листов топографических карт, рамками которых служат меридианы и параллели.

Практическое значение геодезических координат состоит в том, что они незначительно отличаются от астрономических координат φ и λ, определяемых астрономическими методами независимо от геодезических измерений.

Вместе с тем геодезические координаты относятся к математически правильной поверхности эллипсоида вращения. Их нельзя измерить, а можно только вычислить. Геодезические широту и долготу следует отличать от астрономических широты и долготы, которые относятся к уровенной поверхности и определяются непосредственно из измерений.

В дальнейшем при изучении вопросов сфероидической геодезии будут подразумеваться геодезические координаты.

Система прямоугольных сфероидических координат

Это система координат на поверхности эллипсоида, т. е. координатные оси располагаются на поверхности эллипсоида. В зависимости от положения осей будем иметь различные системы координат, которые, оставаясь сфероидическими, будут иметь свои особенности. Рассмотрим одну из таких систем (рис. 1.6).

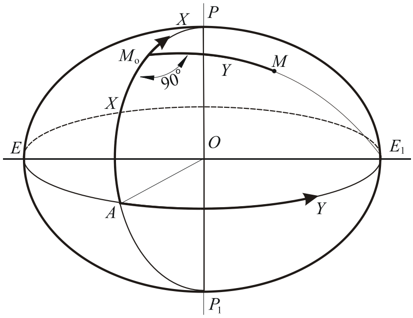

Рис. 1.6

Прямоугольные сфероидические координаты

Примем точку A с известными геодезическими координатами (B, L) за начало координат. Меридиан, проходящий через точку A, примем за ось X. Для определения положения точки M проведем через нее нормальное сечение так, чтобы оно пересекло меридиан точки A под углом 90°.

Тогда положение точки M определяется следующими координатами:

— сферической абсциссой X, равной длине дуги $\cup AM_0$;

— сферической ординатой Y, равной длине дуги $\cup MM_0$.

Данные координаты выражаются в линейной мере, например, в километрах.

Система координат с приведенной широтой

Одной из координат в этой системе является геодезическая долгота L.

Положение точки M в меридианном эллипсе, имеющем долготу L, определяется приведенной широтой u, которая получается из следующего вспомогательного построения (рис. 1.7).

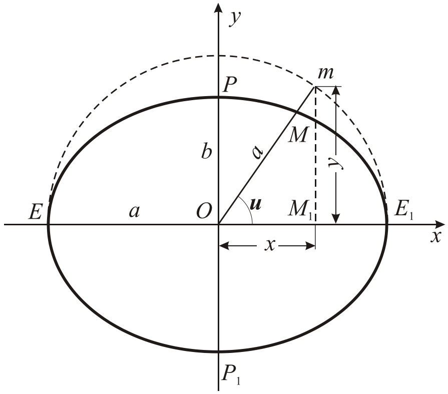

Рис. 1.7

Система координат с приведенной широтой

Опишем в плоскости меридианного эллипса PEP_1E_1 из точки O как из центра окружность радиусом OE, равным большой полуоси a. Продолжим ординату MM_1 до пересечения с построенной вспомогательной окружностью. Пусть они пересекутся в точке m. Соединим точку m с центром эллипса O; угол mOE_1 и будет приведенной широтой u точки M.

Приведенная широта u применяется в ряде теоретических выводов.

Для вывода соотношения между широтами B и u возьмем прямоугольную систему координат xOy в плоскости меридианного эллипса и запишем уравнение эллипса в параметрической форме:

$$x = a \cdot \cos u;$$

$$y = b \cdot \sin u. \qquad (1.2)$$

Проведем касательную MK к эллипсу в точке M (рис. 1.8). Отрезок Mn является нормалью к поверхности эллипсоида (по определению геодезических координат), и, следовательно, $Mn \perp MK$. Тогда $\angle MKO = 90° - B$.

Известно, что тангенс угла, образуемого касательной к кривой в данной точке с положительным направлением оси абсцисс, есть первая производная функции, описывающей кривую, $\frac{dy}{dx}$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}(90 + B) = -\mathrm{ctg}B. \tag{1.3}$$

Дифференцируя выражение (1.2) и подставляя значение дифференциалов

$$dx = -a\sin u du;$$

$$dy = b\cos u du$$

в формулу (1.3), получим

$$-\frac{b\cos u du}{a\sin u du} = -\mathrm{ctg}B,$$

$$\mathrm{tg}B = \frac{a}{b}\mathrm{tg}u$$

или

$$\mathrm{tg}u = \frac{b}{a}\mathrm{tg}B. \tag{1.4}$$

Ввиду того, что земной эллипсоид имеет малое полярное сжатие, широты B и u незначительно различаются между собой. Максимальная разность $(B - u) \approx 5{,}8'$ при $B = 45°$.

Координата x представляет собой радиус параллели. Поэтому на основании формулы (1.2) можно записать формулу для вычисления радиуса параллели:

$$r = x = OM_1 = a\cos u. \tag{1.5}$$

1.3. Основные сфероидические функции

Почти во всех формулах сфероидической геодезии присутствуют две величины, зависящие от эксцентриситета эллипсоида и широты. Они обозначаются W и V, называются первой и второй основными сфероидическими функциями и определяются следующими формулами:

$$W = \sqrt{1 - e^2\sin^2 B}, \tag{1.6}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2\cos^2 B}. \tag{1.7}$$

Эти функции связаны между собой следующим соотношением:

$$W = V\sqrt{1 - e^2}. \tag{1.8}$$

Часто встречается еще одна вспомогательная функция эксцентриситета

$$\eta = e'\cos B. \tag{1.9}$$

Она связана с функцией V такой зависимостью:

$$V^2 = 1 + \eta^2. \tag{1.10}$$

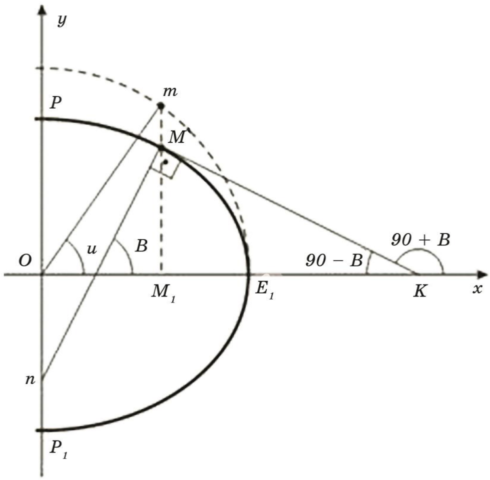

Рис. 1.8

Связь между геодезической и приведенной широтой

1.4. Сечение эллипсоида плоскостями

При сечении эллипсоида плоскостями будем получать различные кривые разного радиуса.

Пусть на эллипсоиде задана точка A (рис. 1.9). Прямая AN является нормалью к поверхности эллипсоида в точке A.

Все возможные сечения эллипсоида плоскостями, проведенными через точку А, разделим на два группы:

— нормальные сечения;

— косые (наклонные) сечения.

Все сечения эллипсоида плоскостями, содержащими в себе нормаль AN, называются нормальными сечениями эллипсоида в точке A.

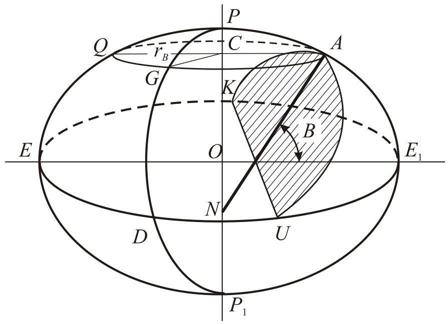

Рис. 1.9

Нормальные и косые сечения

Из бесконечного множества выделяют два главных сечения, одно из которых имеет минимальный радиус кривизны, а другое — максимальный:

— ***меридианное сечение***, содержащее нормаль AN и ось вращения PP_1 (сечение PAE_1P_1EQ на рис. 1.9);

— ***сечение первого вертикала*** — плоскость, которая содержит нормаль и перпендикулярна плоскости меридианного сечения (сечение KAU на рис. 1.9).

Радиусы кривизны главных нормальных сечений (***главные радиусы кривизны***) поверхности эллипсоида вращения имеют свои обозначения:

M — радиус кривизны меридиана;

N — радиус кривизны первого вертикала.

Все прочие сечения эллипсоида плоскостями, проходящими через точку A, но не содержащими нормаль AN, называются косыми сечениями эллипсоида в точке A.

Одно из них AGQ (рис. 1.9) является параллелью. Радиус параллели обычно обозначается r_B, где индекс обозначает широту параллели.

1.5. Радиус кривизны меридианного сечения

Получим выражение для радиуса кривизны меридиана M в зависимости от геодезической широты B и элементов земного эллипсоида.

На рисунке 1.10 изображена часть меридианного эллипса, на котором выделен элемент дуги меридиана KD, равный dX и соответствующий бесконечно малому приращению широты dB. Точка C является центром кривизны элемента dX, так что отрезки DC и KC равны радиусу кривизны меридиана M. На основании известного опре-