

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	5
Условные обозначения.....	6
1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КАПЕЛЬНЫХ НЬУТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ	8
1.1. Два режима движения жидкости.....	8
1.2. Уравнения гидромеханики ламинарных течений.....	9
1.3. Уравнения турбулентных течений.....	11
1.3.1. Уравнения гидромеханики	12
1.3.2. Полуэмпирические теории турбулентности.....	13
1.3.3. Двухслойная модель турбулентного течения.....	18
2. УСТАНОВИВШЕЕСЯ РАВНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СЛОЕ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА	20
2.1. Особенности течения, граничные условия и система уравнений.....	20
2.2. Распределение касательных напряжений	22
2.3. Распределение скоростей по глубине потока	23
2.4. Коэффициенты Буссинеска и Кориолиса	25
2.5. Функция тока	26
2.6. Вихревая структура течения	27
2.7. Гидравлические потери.....	28
3. УСТАНОВИВШЕЕСЯ РАВНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ШИРОКОМ КАНАЛЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА	31
3.1. Особенности течения, граничные условия и система уравнений.....	31
3.2. Распределение касательных напряжений.....	33
3.3. Течение в ламинарном пограничном слое	34
3.4. Течение в турбулентном ядре потока	37
3.4.1. Теория переноса количества движения Прандтля	37
3.4.2. Теория переноса завихренности Тейлора	45
3.4.3. Теория подобия Кармана	48
3.4.3.1. Модель Прандтля – Кармана	48
3.4.3.2. Модель Тейлора – Кармана	56
3.4.4. Сводные данные по теориям турбулентности	61
Заключение	62
Библиографический список	63

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие включает сведения по кинематике и динамике открытых потоков капельных жидкостей, основные термины, определения и условные обозначения, принятые в современной научной литературе по гидравлике.

В первой главе приводятся основные дифференциальные уравнения движения капельных жидкостей при равномерном и неравномерном движении в открытых руслах.

Вторая глава учебного пособия посвящена особенностям течения в слое на наклонной плоскости, рассмотрено распределение касательных напряжений, на основании которого получены зависимости для распределения продольных скоростей в ламинарном слое. Приведен вывод коэффициентов Буссинеска и Кориолиса, учитывающих неравномерность распределения скоростей. Показаны основные зависимости для расчета потерь напора в открытых потоках.

В третьей главе рассмотрены классические теории турбулентности, на основе которых получены зависимости для расчета распределения скоростей по глубине потока и гидравлических сопротивлений. Рассмотрены модели турбулентности Прандтля, Тейлора, Кармана и др., течение в пограничном слое и турбулентном ядре потока.

Учебное пособие позволит обучающимся самостоятельно изучить основные уравнения гидродинамики безнапорных течений ньютоновских жидкостей, а также применить полученные знания при выполнении собственных научных исследований в области гидравлики.

Условные обозначения

C	— коэффициент Шези
D	— дефицит максимальной скорости
Fr	— число Фруда
g	— ускорение силы тяжести
h	— глубина потока
h_w	— гидравлические потери (потери напора)
I	— пьезометрический уклон
i	— геодезический уклон дна
J	— гидравлический уклон
l	— длина пути перемешивания
La	— число Лагранжа
Ni	— число Никурадзе
P	— давление
n	— коэффициент шероховатости
Q	— расход потока
q	— удельный расход
R	— гидравлический радиус
Re	— число Рейнольдса
s	— смоченный периметр
t	— текущее время
U	— местная скорость течения
U_m	— максимальная скорость
U_δ	— скорость течения на границе ламинарной пленки и турбулентного ядра
U_*	— динамическая скорость
u_x, u_y, u_z	— составляющие вектора местной скорости по осям декартовой системы координат
$\bar{u}_i, u'_i$	— регулярная и пульсационная составляющие местной скорости при турбулентном режиме движения жидкости
V	— средняя скорость потока
X, Y, Z	— ускорения от действия внешних массовых (объемных) сил
x, y, z	— оси прямоугольной (декартовой) системы координат
α, α_0	— коэффициенты Кориолиса и Буссинеска
Δ	— абсолютная шероховатость стенок трубы
δ	— толщина ламинарного пограничного слоя
Λ	— расстояние от твердой границы потока (стенки, дна канала)
λ	— коэффициент гидравлического сопротивления по длине
μ	— динамическая вязкость жидкости
μ_t	— турбулентная вязкость
ν	— кинематическая вязкость жидкости
Π	— потенциал внешних массовых сил
ρ	— плотность жидкости
σ_{ii}	— нормальные напряжения

- σ'_{ii} — нормальные рейнольдсовы напряжения
- τ_{ij} — касательные напряжения
- τ'_{ij} — касательные рейнольдсовы напряжения
- τ_0 — касательные напряжения на твердом дне канала
- χ — постоянные Прандтля, Тейлора, Кармана, универсальная постоянная
- Ψ — функция тока
- Ω — угловая скорость вихря
- $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — составляющие угловой скорости вихря по осям декартовой системы координат
- ω — площадь живого сечения потока

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КАПЕЛЬНЫХ НЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В пособии приведён обзор дифференциальных уравнений движения капельных ньютоновских жидкостей. Исследуются решения этих уравнений при малых и больших числах Рейнольдса в условиях безнапорного течения. *Безнапорным* называется движение жидкости под действием силы тяжести в открытых каналах и руслах со свободной поверхностью [1; 2]. Описание движения жидкости рассматривается в эйлеровой постановке [1] в декартовой прямоугольной системе координат x, y, z (рис. 1.1).

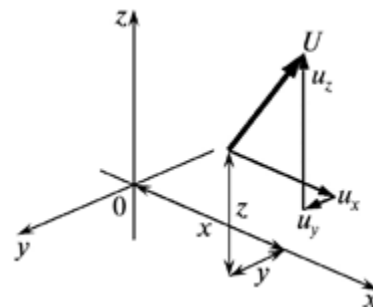


Рис. 1.1. Прямоугольная декартовая система координат

Обозначим вектор скорости бесконечно малой частицы жидкости в точке пространства с координатами x, y, z через U , а его составляющие по осям координат — через u_x, u_y, u_z . При этом

$$U = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \quad (1.1)$$

По Эйлеру, компоненты вектора скорости u_x, u_y, u_z в общем случае являются функциями координат точки x, y, z и текущего времени t . При установившемся движении, когда скорости жидкости не зависят от времени, они являются функциями только координат пространства.

1.1. Два режима движения жидкости

Существуют два режима движения жидкости: ламинарный и турбулентный. *Ламинарным* называется течение, при котором слои жидкости, не смешиваясь, скользят относительно друг друга в условиях вязкого трения; *турбулентным* — течение, при котором частицы жидкости движутся по постоянно изменяющимся траекториям, и в жидкости происходит интенсивное перемешивание, именуемое *турбулентной диффузией*.

Особенности двух режимов движения жидкости впервые изучил Осборн Рейнольдс¹. Он установил, что увеличение скорости потока вызывает возмущения, дестабилизирующие его структуру. Если под устойчивостью понимать способность потока подавлять возникающие в нем малые возмущения, то переход к турбулентному режиму может рассматриваться как потеря устойчивости. При этом из двух действующих на жидкие частицы категорий сил — сил вязкости и сил инерции — первые играют стабилизирующую роль, а вторые — дестабилизирующую. При ламинарном режиме с низкими скоростями течения силы вязкости, пропорциональные скоростям в первой степени, подавляют случайные возмущения, возникающие в потоке под действием инерционных сил, пропорциональных квадрату скоростей. С увеличением скоростей движения силы инерции начинают преобладать над силами вязкости, и течение теряет устойчивость, переходя в турбулентный режим. Таким образом, соотношение этих сил служит критерием устойчивости потока, этот критерий называют *числом Рейнольдса*

$$\text{Re} = \frac{VL}{\nu}, \quad (1.2)$$

¹ Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. — Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1895. — Series A. — V. 186. — P. 123–164.

где V — средняя скорость потока, $V = Q/\omega$; Q , ω и L — соответственно расход, площадь и характерный линейный размер сечения потока; ν — кинематическая вязкость жидкости, $\nu = \mu/\rho$; μ и ρ — соответственно динамическая вязкость и плотность жидкости.

Переход из ламинарного в турбулентный режим движения жидкости или из турбулентного в ламинарный происходит при критическом значении числа Рейнольдса $Re_{кр}$. При числах Рейнольдса меньше критического значения ($Re < Re_{кр}$) режим течения ламинарный, при больших ($Re > Re_{кр}$) — турбулентный.

1.2. Уравнения гидромеханики ламинарных течений

При ламинарном режиме течения дифференциальное уравнение неразрывности (сплошности) однородной капельной жидкости, считающейся практически несжимаемой, т.е. с постоянной плотностью ($\rho = \text{const}$), в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

В тех же прямоугольных координатах дифференциальные уравнения гидродинамики в частных производных компонент вязких напряжений записываются в виде системы трех дифференциальных уравнений, соответствующих трем осям x , y , z :

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(P + \sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{du_x}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(P + \sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) &= \frac{du_y}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(P + \sigma_{zz})}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) &= \frac{du_z}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где P — давление в точке занимаемого жидкостью пространства с координатами x , y , z ; σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ — нормальные (σ_{ij}) и касательные (τ_{ij}) вязкие напряжения в движущейся жидкости; X , Y , Z — ускорения от внешних массовых сил по соответствующим координатам, связанные с потенциалом этих сил (Π) равенствами

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (1.5)$$

Ускорения в правой части уравнений (1.4) представляют собой полные производные, которые можно разложить на суммы частных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_x u_z), \\ \frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(u_y u_z), \\ \frac{du_z}{dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_z) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z^2). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

С учетом равенств (1.5) и (1.6) система (1.4) приводится к дивергентной форме дифференциальных уравнений динамики вязкой жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\rho(u_x^2 + \Pi) + P + \sigma_{xx}] + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x u_y - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_x u_z - \tau_{zx}) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x u_y - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}[\rho(u_y^2 + \Pi) + P + \sigma_{yy}] + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_y u_z - \tau_{zy}) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x u_z - \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y u_z - \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}[\rho(u_z^2 + \Pi) + P + \sigma_{zz}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

При ламинарном режиме движения в жидкости возникают только вязкие напряжения, определяемые законом вязкого трения Ньютона, гласящим, что напряжения в жидкости зависят от рода жидкости, её температуры и характера течения и при слоистом течении прямо пропорциональны градиенту скоростей. Коэффициентом пропорциональности выступает коэффициент динамической вязкости $\mu = \rho\nu$. Жидкости, вязкие напряжения в которых отвечают закону вязкого трения Ньютона, называют *ньютоновскими*. К ньютоновским относятся наиболее распространенные жидкости на земле, в том числе вода и воздух.

Компоненты тензора вязких напряжений в ньютоновских жидкостях записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \sigma_{yy} &= -2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \sigma_{zz} &= -2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Схема распределения напряжений на гранях бесконечно малой частицы жидкости показана на рис. 1.2.

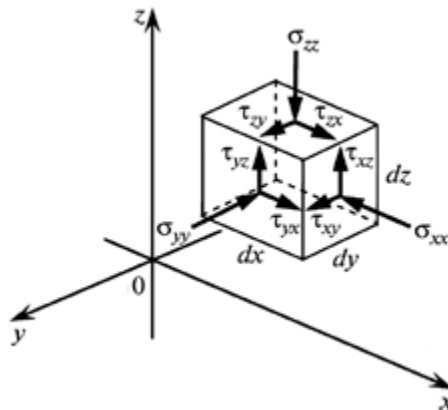


Рис. 1.2. Тензор напряжений

Подставляя в систему (1.7) значения вязких напряжений по системе уравнений (1.8), получим дифференциальные уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости в частных производных скоростей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9), известные как уравнения Навье – Стокса, совместно с уравнением неразрывности (1.3) составляют замкнутую систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными: давлением P и скоростями u_x, u_y, u_z .

1.3. Уравнения турбулентных течений

Наблюдения показывают, что при турбулентном режиме скорости (и другие параметры — давление, температура и т.д.) в любой точке потока изменяются во времени. Процесс носит хаотичный (стохастический) характер, в котором можно выделить *регулярную* часть движения (осредненную по времени) и *случайную* (пульсации). На рис. 1.3 показан вид непрерывной записи измерения скорости в некой точке потока во времени.

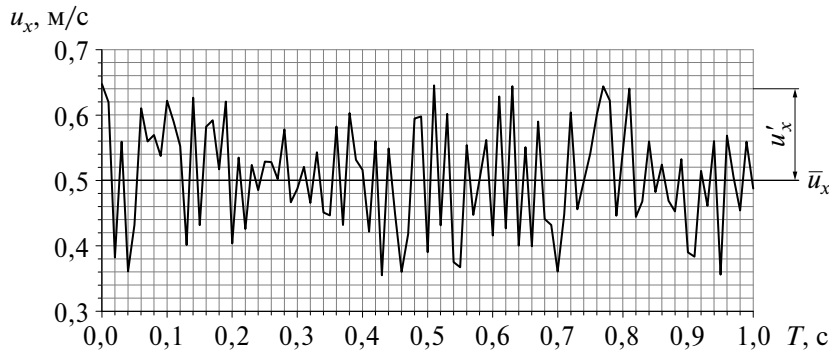


Рис. 1.3. Диаграмма изменения осевой скорости в турбулентном течении

Согласно рис. 1.3, в любой момент мгновенная (действительная) скорость частицы жидкости может быть представлена как сумма

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x \quad (1.10)$$

осредненной в течение времени T скорости $\bar{u}_x$, представляющей собой регулярную часть, и пульсационной скорости u'_x , равной разности между мгновенным и регулярным значениями.

Определение регулярной осредненной по интервалу T составляющей

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_0^T u_x dt \quad (1.11)$$

называется *осреднением по Рейнольдсу*.

1.3.1. Уравнения гидромеханики

Операциями (1.10) и (1.11) из уравнения (1.3) получают дифференциальное уравнение неразрывности при турбулентном режиме движения:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0, \quad (1.12)$$

а из уравнений (1.7)–(1.9) — дивергентную форму дифференциальных уравнений динамики:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial(\rho \bar{u}_x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(\bar{u}_x^2 + \Pi) + \bar{P} + \sigma_{xx}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{u}_x \bar{u}_y - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \bar{u}_x \bar{u}_z - \tau_{zx}) = 0, \\ & \frac{\partial(\rho \bar{u}_y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{u}_x \bar{u}_y - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} [\rho(\bar{u}_y^2 + \Pi) + \bar{P} + \sigma_{yy}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \bar{u}_y \bar{u}_z - \tau_{zy}) = 0, \\ & \frac{\partial(\rho \bar{u}_z)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{u}_x \bar{u}_z - \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{u}_y \bar{u}_z - \tau_{yz}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [\rho(\bar{u}_z^2 + \Pi) + \bar{P} + \sigma_{zz}] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

и тензор напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -2\mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \overline{\rho u'_x u'_x}, \\ \sigma_{yy} &= -2\mu \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \overline{\rho u'_y u'_y}, \\ \sigma_{zz} &= -2\mu \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \overline{\rho u'_z u'_z}, \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \right) - \overline{\rho u'_x u'_z}, \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right) - \overline{\rho u'_x u'_y}, \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} \right) - \overline{\rho u'_y u'_z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

содержащий наряду с вязкими турбулентные составляющие

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{xx} &= \overline{\rho u'_x u'_x}, & \sigma'_{yy} &= \overline{\rho u'_y u'_y}, & \sigma'_{zz} &= \overline{\rho u'_z u'_z}, \\ \tau'_{xz} = \tau'_{zx} &= -\overline{\rho u'_x u'_z}, & \tau'_{yx} = \tau'_{xy} &= -\overline{\rho u'_x u'_y}, & \tau'_{zy} = \tau'_{yz} &= -\overline{\rho u'_y u'_z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

называемые *рейнольдсовыми напряжениями*.

Подставляя значения напряжений (1.14) в уравнения (1.13), получаем дифференциальные уравнения в частных производных скоростей:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{\bar{P}}{\rho} \right) - \\
& - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_x})}{\partial x} - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_y})}{\partial y} - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_z})}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} \right), \\
& \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\Pi + \frac{\bar{P}}{\rho} \right) - \\
& - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_y})}{\partial x} - \frac{\partial (\overline{u'_y u'_y})}{\partial y} - \frac{\partial (\overline{u'_y u'_z})}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial z^2} \right), \\
& \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\Pi + \frac{\bar{P}}{\rho} \right) - \\
& - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_z})}{\partial x} - \frac{\partial (\overline{u'_y u'_z})}{\partial y} - \frac{\partial (\overline{u'_z u'_z})}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} \right).
\end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Уравнения (1.16), известные как уравнения Рейнольдса, совместно с уравнением неразрывности (1.12) образуют систему четырех уравнений с десятью неизвестными: давлением $\bar{P}$, скоростями $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$, $\bar{u}_z$ и шестью рейнольдсовыми составляющими (1.15). Наличие в дифференциальных уравнениях гидродинамики турбулентных течений (1.16) рейнольдсовых составляющих делает расчетную систему незамкнутой. Возникает проблема её замыкания.

1.3.2. Полуэмпирические теории турбулентности

Методом замыкания уравнений гидродинамики является привлечение полуэмпирических соотношений, связывающих турбулентные напряжения с осредненными по Рейнольдсу параметрами поля скоростей течения. Это поле характеризуется величиной и направлением осредненных скоростей и их производных. Таким образом, турбулентные напряжения выражают через осредненные скорости либо через производные от них, либо через те и другие одновременно:

$$\frac{\tau'_{ij}}{\rho} = \frac{\tau'_{ji}}{\rho} = -\overline{u'_i u'_j} = f \left(\bar{u}_i, \bar{u}_j, \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}, \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i^2} \right). \quad (1.17)$$

Задача отыскания функций (1.17) решается в рамках полуэмпирических теорий турбулентности, основывающихся на формулировании гипотез и последующей их опытной проверке. Наиболее известными являются гипотезы (теории) Прандтля, Тейлора и Кармана.

По Людвигу Прандтлю², турбулентный моль, охватывающий достаточно существенную массу жидкости, переносит некоторое количество движения, которое сохраняется постоянным на длине пути перемешивания — l . Эта длина определяет путь, который проходит моль жидкости, прежде чем перемешается с другими жидкими молями и передаст им свой импульс. В рамках этой гипотезы Прандтль рассматривал плоское двумерное течение в координатах x, z .

Следует отметить, что положения, высказанные Прандтлем, в значительной степени противоречивы [4]. Основу теории составляет схема возникновения турбулентных ка-

² Prandtl L. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. — Zeitschrift Fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1925. — V. 5. — P. 137–139.

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru