

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	6
Механические явления при фронтальном отверждении массивных изделий из различных материалов. Представление фронта.....	9
Глава 1. ДИСКРЕТНЫЙ ПОДХОД В МЕХАНИКЕ ФРОНТАЛЬНОГО ОТВЕРЖДЕНИЯ.....	10
1.1. Отверждение сферы при движении фронта от внутренней поверхности к периферии. Изотропный материал.....	10
1.2. Отверждение шара при движении фронта от внешней поверхности к центру. Изотропный материал.....	15
Глава 2. КONTИНУАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ МЕХАНИКИ ФРОНТАЛЬНОГО ОТВЕРЖДЕНИЯ.....	21
2.1. Условия сильного разрыва на фронте отверждения.....	21
2.2. Краевая задача и принципы соответствия при фронтальном отверждении упругих тел и идеальной жидкости.....	29
2.3. Фронтальное отверждение первоначально вязких тел.....	33
Глава 3. ОРТОТРОПНЫЙ КОМПОЗИЦИОННЫЙ ЦИЛИНДР.....	38
3.1. Отверждение намоточного композита ортотропной структуры фронтом, движущимся от внешней поверхности к оправке. Дискретный подход.....	38
3.2. Континуальный подход к решению задачи об отверждении ортотропного цилиндра на оправке фронтом, движущимся от внешней поверхности к внутренней. Сравнение результатов по обеим теориям.....	42
Глава 4. О ЗАКОНЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ РАСТУЩИХ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В БИПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.....	48
Глава 5. МЕХАНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ РАСТУЩИХ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ТВЕРДЫХ ШАРОВ. ЗАДАЧА В БИСФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ.....	57
5.1. Модель фронтального отверждения и силы взаимодействия двух растущих сферических тел.....	60
5.2. Расчет вязкого течения и силы притяжения для системы двух растущих сферических глобул.....	62
5.3. Специальные координаты.....	64
5.4. Нахождение величины давления в жидкой фазе между растущими глобулами.....	68
Глава 6. НАМОТКА ОРТОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА ИЗ ВОЛОКНИСТОГО ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТА БЕЗ ОПРАВКИ И С ОПРАВКОЙ.....	73
6.1. Намотка без оправки.....	73
6.2. Намотка на упругую изотропную оправку.....	78

Глава 7. ЭКСПЕРИМЕНТ. НАМОТКА НЕТКАНОГО ХОЛСТА ДЛЯ КОМПОЗИТА ИПРЕСКОНА, ПОЛУЧАЕМОГО ПО ЧЕСАЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ С ИГЛОПРОБИВАНИЕМ.....	90
7.1. Исследуемый материал и технологии получения цилиндрических изделий.....	90
7.2. Представление модели.....	92
7.3. Экспериментальная часть и численный расчет. Испытания полотна на растяжение.....	95
7.4. Анализ полученных результатов .....	99
Глава 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ГАРАНТИРОВАННОЙ МОНОЛИТНОСТИ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНОГО ЦИЛИНДРА .....	101
8.1. Создание толстостенного ортотропного цилиндра из армированного полимера .....	101
8.2. Оценка взаимодействия кольца и оправки. Эксперимент и теория. Послойное отверждение .....	110
Глава 9. ПРИМЕР АДДИТИВНОЙ ТЕХНОЛОГИИ. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ФРОНТАЛЬНО РАСТУЩЕГО ТЕЛА НА УПРУГОЙ ПОДЛОЖКЕ ПЛЮС КОНТАКТНЫЙ СЛОЙ .....	114
9.1. Абсолютное адгезионное взаимодействие наращиваемого материала с подложкой .....	114
9.2. Фронтальный одномерный рост с контактными слоями.....	116
Глава 10. КАПИЛЛЯРНАЯ МОДЕЛЬ КОМПОЗИТА.....	125
10.1. Постановка и решение задачи .....	125
10.2. Экспериментальное исследование кипения (разрывов) жидкостей в капилляре.....	129
Глава 11. ВЛИЯНИЕ РАСТУЩЕЙ ТВЕРДОЙ КОРЫ НА РАЗВИТИЕ ПЛАНЕТЫ (МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАНЕТЫ) .....	134
11.1. Введение .....	134
11.2. Основные гипотезы образования и роста твердой коры планеты. Кинетика напряженно-деформированного состояния растущей коры. Сравнение давлений в Земле и Пангее.....	136
11.3. Отверждение планеты при движении фронта от внешней поверхности к центру .....	140
11.4. Напряженно-деформированное состояние растущей твердой коры планеты при действии гравитации.....	148
11.5. Напряжения в планете от совместного действия растущей твердой коры и гравитации .....	153
Глава 12. ГРАВИТАЦИОННОЕ СЖАТИЕ АТОМА ВОДОРОДА.....	158
Заключение.....	165
Библиографический список .....	167

## ВВЕДЕНИЕ

Механика фронтально растущих тел необходима:

1) на макроуровне:

- при отверждении крупных отливок из металла или термопластичного полимера (втулки из термопласта для валов судовых винтов диаметром более 0,5 м, длиной немного менее 1 м. При вытачивании втулок из отливок они часто взрывались (большие остаточные напряжения) либо в них обнаруживались пустоты, а также металлические объемные отливки, в которых часто образуются каверны;

- при намотке, например, цилиндрических изделий из армированных полимеров;

- в аддитивных технологиях — выращивание и послойное отверждение изделий из наполненных полимеров и керамики; в нашивной технологии.

- для моделирования механических явлений при росте планет с учетом гравитации, всестороннего сжатия вещества; сплошной среды и атома;

2) на микроуровне:

- для моделирования напряженного состояния при росте капли;

- при моделировании взаимодействия растущих кристаллов (поликристаллы) и глобул;

- для моделирования всестороннего сжатия вещества от сплошной среды до атома под действием гравитации.

Создание массивных и толстостенных изделий из различных материалов — гомогенных, в том числе дисперсно-наполненных и армированных, например бетонов и полимеров, — является важной, весьма сложной научной и практической задачей [1]. Одна из главных проблем при создании таких изделий — технологическая монолитность [2]. Суть ее заключается в том, что после завершения процессов отверждения и охлаждения в изделиях часто обнаруживаются пустоты, поры и трещины. До недавнего времени при изучении этой проблемы внимание исследователей было сосредоточено в основном на стадии охлаждения. Например, в изучении температурных напряжений в намоточных анизотропных изделиях из армированных пластиков значительных успехов достигла школа В.В. Болотина, наиболее глубоко изучавшая термоупругие напряжения. Начало этого направления было положено работой [3]. Стадия отверждения исследовалась довольно мало и эпизодически [4].

На основании анализа работ по химической кинетике [5–10], из которых следует, что процесс отверждения толстостенных массивных изделий из полимеров и композитов часто может быть фронтальным, нами была предположена возможность формирования пустот, пор, трещин, ослабленных мест и остаточных напряжений в процессе фронтального отверждения таких изделий [11; 12]. Та же проблема давно известна для массивных изделий из металла — это образование каверн, переводящих изделие в брак. Металлурги объясняли это наличием растворенных в расплаве металла газов, которые и создавали эти пустоты. Предложенная нами гипотеза послужила основой для постановки исследований.

Известно, что процессы отверждения разнообразны по своей природе. Твердое вещество может образовываться из газовой или из жидкой фазы — расплава или раствора. Часто отверждение выступает только как процесс изменения агрегатного состояния вещества, в результате которого не появляются новые химические связи, но энергия взаимодействия молекул намного превышает их кинетическую энергию. И есть класс твердых веществ, получаемых в результате химической реакции. В научной литературе имеется специальный термин для таких реакций — реакции отверждения. Таким путем получают, например, эпоксидные полимеры. К отверждению относят процессы кристаллизации, стеклования и т.п. Процессы отверждения чаще всего бывают фронтальными, но если ширина зоны фронта намного больше размеров области твердения или, иначе, фронт очень пологий, то можно говорить об однородном отверждении этой области. Однако и в случае однородного отверждения, по нашему мнению, процесс может быть опять-таки фронтальным, только уже на «микроуровне», ибо возникновение центров твердения по термофлуктуационному механизму подразумевает и рост твердой фазы вокруг образовавшихся центров. Этот рост будет фронтальным.

Процесс фронтального отверждения обычно связан с неоднородным распределением температуры. Последнее часто оказывается первопричиной фронтального способа отверждения, за исключением, может быть, случаев отверждения переохлажденной жидкости или роста кристаллов из раствора. Решение только тепловых задач такого рода представляет немалые сложности, но наука сделала заметные успехи. Так, поставлена и решена в некоторых вариациях известная тепловая задача Стефана [13] о фронтальном движении границы про-

мерзания (кристаллизация) жидкости, а в химической кинетике — задача о фронте реакции [5; 6].

Вообще говоря, отверждение исследуется давно и успешно на кристаллах, стеклах, полимерах, главным образом, с точки зрения термодинамики, например в работах физиков-стекловиков [18–20], в которых в процессе фронтального стеклования твердеющий слой пассивно приклеивается к уже образовавшейся твердой толще, напряжения в которой создаются градиентом температуры. В работах металлослов [21], геофизиков и механиков [12–25] практически речь идет не об отверждении, а о движении фронта фазового перехода в уже твердом теле, например переход типа аустенит-мартенсит в металлах. Есть еще проблема образования твердой коры первоначально жидких планет и взаимодействия этой коры с гравитацией [33]. По-видимому, такое состояние дел объясняется прежде всего сложностью физического механизма фронтального отверждения. Однако задача чрезвычайно важна как в научном, так и в практическом плане, ибо ее решение позволило бы не только ответить на ряд вопросов о формировании структуры, напряженно-деформированного состояния и физических свойств твердого тела, но и более свободно и целенаправленно управлять процессами отверждения.

С этих позиций представляются необходимыми исследования механических явлений, сопровождающих и влияющих на процесс отверждения и конечный результат. К ним относятся вопросы течения жидкости и газа, формирования напряжений и деформаций в образующемся твердом теле, возникновения пустот и пор. Очень важны вопросы обратной связи: т.е. каким образом возникающие в процессе отверждения напряжения и деформации оказывают влияние на сам процесс? Например, авторами работы [26] показано, что образующиеся в процессе отверждения сетчатого полимера напряжения существенно влияют на глубину реакции отверждения.

В нашу задачу не входила детализация физической картины возникновения центров или поверхностей отверждения — механизмы могут быть самыми разнообразными: химическая реакция, кристаллизация, стеклование. Здесь также не рассматриваются условия возникновения и существования фронта отверждения. Для химической реакции отверждения полимеров с ними можно ознакомиться, например, в работах [7–10].

Аддитивные технологии, ныне модные, с точки зрения теории являются одним из проявлений механики фронтально растущих тел. Здесь

им посвящен раздел о растущей стене или покрытии вкупе с разрабатываемым автором настоящей монографии методом контактного слоя, способным грамотоно описать адгезионное взаимодействие растущих тел с подложкой.

Одной из неисследованных научных проблем оказалась механика взаимодействия растущей коры планеты и гравитации. Постановке и решению ряда важных задач этой области, включая сжатие и разрушение атома, посвящены главы 11 и 12.

### **Механические явления при фронтальном отверждении массивных изделий из различных материалов. Представление фронта**

Переход из жидкого состояния в твердое обычно сопровождается изменением удельного объема — величины, обратной плотности (для краткости в дальнейшем будем называть это изменение *усадкой*) При уменьшении удельного объема усадка будет отрицательной, при увеличении — положительной.

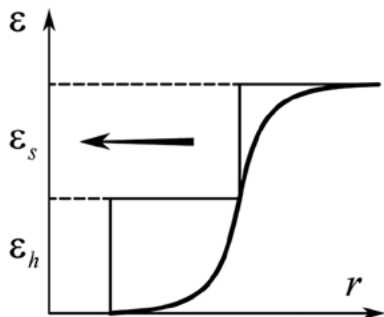
В качестве исходного параметра, характеризующего процесс отверждения, здесь выбрана химическая или физическая относительная изотропная усадка *свободного макроскопически бесконечно малого* объема жидкости, т.е. этот свободный элемент хотя и мал, но должен содержать число дискретных макрочастиц, из которых он состоит, достаточное для статистического усреднения.

В качестве примера далее рассмотрим отверждение первоначально жидкого шара двумя способами: фронт движется от центра к периферии и, наоборот, от периферии к центру.

# Глава 1. ДИСКРЕТНЫЙ ПОДХОД В МЕХАНИКЕ ФРОНТАЛЬНОГО ОТВЕРЖДЕНИЯ

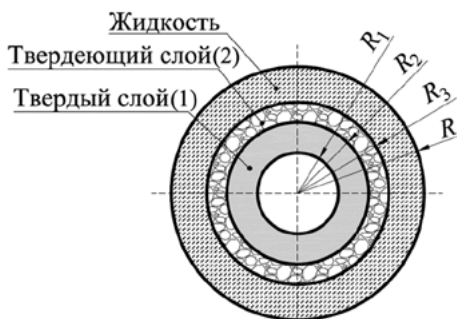
## 1.1. Отверждение сферы при движении фронта от внутренней поверхности к периферии. Изотропный материал

Будем считать, что одна часть усадки реализуется, когда полимер (или иной материал) остается еще жидким (например, для эпоксидного полимера это соответствует глубине превращения до точки геля), а другая часть — реализуется уже в твердом состоянии (для полимера — это после точки геля). Предположим, что фронт отверждения (ширина реакционной зоны) достаточно узок по сравнению с размерами области. Это вполне оправданно, так как обычно он намного уже даже температурного фронта [7–10]. Представим такой фронт отверждения (усадки) двумя ступеньками (рис. 1.1), нижняя из которых соответствует усадке в жидком состоянии  $\varepsilon_h$ , верхняя — в твердом  $\varepsilon_s$ .



а

Рис. 1.1. Схема представления фронта



б

Рис. 1.2. Модель отверждения сферы фронтом изнутри

На рис. 1.2, а представлена модель отверждения сферы, когда фронт реакции инициируется на внутренней поверхности  $R_1$  и распространяется к внешней поверхности  $R$ . В таком рассмотрении усадка в жидком состоянии  $\varepsilon_h$  не участвует в формировании напряжений, важна лишь усадка  $\varepsilon_s$ .

Пусть к некоторому моменту  $t$  волна отверждения продвинулась от  $R_1$  к  $R_2$  и слой  $1$  (см. рис. 1.2) уже затвердел. После этого зона отверждения захватывает тонкий слой  $2$ ,  $\Delta r = R_3 - R_2$  ширина фронта). Очевидно, что слою  $2$  безразлично напряженное состояние предыдущих слоев, для него важны лишь их совокупная жесткость и положение границы в данный момент. Предположим, что в этот момент твердый слой  $1$  способен лишь к упругому деформированию с постоянным модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Для простоты считаем, что в твердеющем слое  $2$  реализуются лишь усадка  $\varepsilon_s$  и упругие деформации (с теми же  $E$  и  $\nu$ ), т.е.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^1 &= e_r^1, \quad \varepsilon_\varphi^1 = \varepsilon_\theta^1 = e_b^1, \\ \varepsilon_r^2 &= e_r^2 + \varepsilon_s, \quad \varepsilon_\varphi^2 = \varepsilon_\theta^2 = \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

В случае сферической симметрии [27] решение для напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$  имеет вид

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^3}, \quad \sigma_\theta = C_1 - \frac{C_2}{2r^3}, \quad (1.2)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, определяемые здесь из следующих граничных условий для слоев  $1$  и  $2$ :

$$r = R_1: \sigma_r^1 = 0; \quad (1.3)$$

$$r = R_2: \sigma_r^1 = \sigma_r^2, \quad \varepsilon_{\theta 1} = \varepsilon_{\theta 2} + \varepsilon_s; \quad (1.4)$$

$$r = R_3: \sigma_r^2 = 0. \quad (1.5)$$

Равенства (1.3) и (1.5) означают отсутствие давления (для решения это не принципиально) на внутренней и внешней поверхностях. Первое равенство в выражении (1.4) отражает условие непрерывности нормального усилия на границе слоев, а второе — непрерывности радиальных перемещений.

В результате получим распределение напряжений в слоях  $1$  и  $2$  от усадки одного слоя  $2$ . Следующий твердеющий слой будет взаимодействовать уже с твердой сферой из двух слоев  $1$  и  $2$ .

Таким образом, для того чтобы найти напряжения  $\sigma_{rk}(r)$  в точке  $r$  некоторого слоя  $k_1$  толщиной  $\Delta r = \Delta$  при фронтальном твердении сферы, когда фронт реакции движется в направлении увеличения радиуса, необходимо оценить совокупное действие на него и предыдущую



твердую толщу всех последующих за ним слоев плюс напряжения в этом слое  $k_1$ , возникшие от взаимодействия с предыдущей твердой сферой:

$$\begin{aligned}\sigma_{rk}(r) &= c_{1k}^2 + \frac{c_{2k}^2}{r^3} + \sum_{k=k_1}^{k_2} \left( c_{1k} + \frac{c_{2k}^1}{r^3} \right) = \\ &= \frac{2\varepsilon_s E}{3(1-\nu)} \left( 1 - \frac{R_1^3}{r^3} \right) \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{[R_1 + (k+1)\Delta]^3 - (R_1 + k\Delta)^3}{[R_1 + (k+1)\Delta]^3 - R_1^3}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

При выводе формулы (1.6) предполагалось, что все твердеющие слои имеют одинаковую толщину. Полагая, что  $R_1 + k_1\Delta = r$ ,  $R_1 + k_2\Delta = R(t) = R_f$  (координата фронта),  $R_1 + (k+1)\Delta = \xi_{k+1}$ , перейдем к интегралу, устремляя  $\Delta$  к  $d\xi$ :

$$\sigma_r(r) = \frac{2\varepsilon_s E}{3(1-\nu)} \left( 1 - \frac{R_1^3}{r^3} \right) \int_r^{R_f} \frac{d\xi^3}{\xi^3 - R_1^3} = \frac{2\varepsilon_s E}{3(1-\nu)} \left( 1 - \frac{R_1^3}{r^3} \right) \ln \frac{R_f^3 - R_1^3}{r^3 - R_1^3}, \quad (1.7)$$

который дает величину напряжения  $\sigma_r$  в точке  $r$ , возникающего в сфере при фронтальном отверждении ее изнутри, когда ширина фронта намного меньше  $R - R_1$  и  $R_1$ .

Выражение для  $\sigma_\theta(r)$  получается аналогичным суммированием или подстановкой выражения (1.7) в уравнение равновесия:

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_r + \frac{r}{2} \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2\varepsilon_s E}{3(1-\nu)} \left[ \left( 1 + \frac{R_1^3}{2r^3} \right) \ln \frac{R_f^3 - R_1^3}{r^3 - R_1^3} - \frac{3}{2} \right]. \quad (1.8)$$

Наличие особой точки  $r = R_1$  в решениях уравнений (1.7) и (1.8) является следствием рассмотренной модели с резкой крутизной фронта. В выражении (1.7) для  $\sigma_r$  эта особенность устранима — предел функции в этой точке равен нулю.

На рис. 1.3, *a*, *б* приведены кривые распределения напряжений  $\sigma_r(r)$  и  $\sigma_\theta(r)$ , полученные из выражений (1.7) и (1.8) для свободных (ненагруженных) сфер разных радиусов. Кривые 4 показывают фронтальное отверждение шара. Эта модель может соответствовать росту сферического монокристалла или глобулы в стеклах и эпоксидных полимерах.

Из рис. 1.3 видно, что кривые для  $\sigma_r(r)$  имеют экстремальный характер, и в случае  $\varepsilon_s < 0$  напряжения сжимающие; напряжения  $\sigma_\theta(r)$  — сжимающие для внутренних слоев и растягивающие для внешних. Все это, естественно, приводит к зависимости плотности отвержденного гомогенного материала от радиуса.

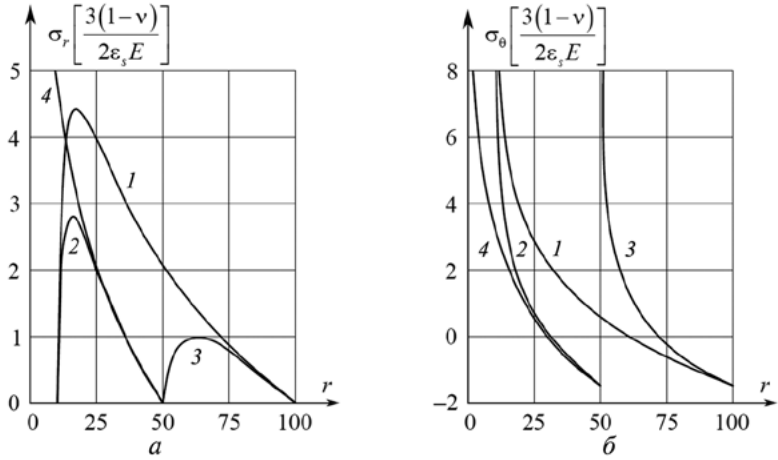


Рис. 1.3. Кривые распределения  $\sigma_r$  ( $a$ ) и  $\sigma_\theta$  ( $b$ ) по радиусу сферы  $r$ , мм:  
 $10 \leq r \leq 100$  (1);  $10 \leq r \leq 50$  (2);  $50 \leq r \leq 100$  (3);  $0 \leq r \leq 50$  (4)

В случае, когда внутри имеется сферическая оправка, формулы для напряжений в образовавшемся слое полимера и в оправке соответственно имеют следующий вид:

в слое полимера:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r) &= \frac{2\varepsilon_s E}{3(1-\nu)} \left(1 - \lambda \frac{R_1^3}{r^3}\right) \ln \left(\frac{R_f^3 - \lambda R_1^3}{r^3 - \lambda R_1^3}\right); \\ \sigma_\theta(r) &= \frac{2\varepsilon_s E}{3(1-\nu)} \left[ \left(1 + \lambda \frac{R_1^3}{r^3}\right) \ln \left(\frac{R_f^3 - \lambda R_1^3}{r^3 - \lambda R_1^3}\right) - \frac{3}{2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

$$R_1 \leq r \leq R_f;$$

в оправке:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r) &= \frac{2\varepsilon_s E(1-\lambda)R_1^3}{3(1-\nu)(R_1^3 - R_0^3)} \left(1 - \lambda \frac{R_0^3}{r^3}\right) \ln \frac{R_f^3 - \lambda R_1^3}{(1-\lambda)R_1^3}; \\ \sigma_\theta(r) &= \frac{2\varepsilon_s E(1-\lambda)R_1^3}{3(1-\nu)(R_1^3 - R_0^3)} \left(1 + \lambda \frac{R_0^3}{2r^3}\right) \ln \frac{R_f^3 - \lambda R_1^3}{(1-\lambda)R_1^3}; \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

$$R_0 \leq r \leq R_1,$$

где  $\lambda = \frac{E[(1-\nu_1)(2R_1^3 + R_0^3) - 2\nu_1(R_1^3 - R_0^3)] + 2(2\nu - 1)E_1(R_1^3 - R_0^3)}{E[(1-\nu_1)(2R_1^3 + R_0^3) - 2\nu_1(R_1^3 - R_0^3)] + 2(\nu - 1)E_1(R_1^3 - R_0^3)}$ .

Конец ознакомительного фрагмента.  
Приобрести книгу можно  
в интернет-магазине  
«Электронный универс»  
[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)