

Оглавление

Лекция 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ СТРОИТЕЛЬСТВА	5
1.1. О моделях, математическом и компьютерном моделировании зданий и сооружений	5
1.2. Об истории построения модели окружающего мира	5
1.3. О роли математики в моделировании объектов и явлений	7
1.4. Задача Ньютона о траектории брошенного камня	8
Лекция 2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	12
2.1. Идеи, привлекаемые в качестве основы математических моделей	12
2.2. Последовательность действий при математическом моделировании	14
2.3. Моделирование дифференциальными выражениями в частных производных	16
Лекция 3. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ	20
3.1. Аналитические и численные методы в моделировании. Дискретные и непрерывные математические модели	20
3.1.1. Задача об изгибе консоли	20
3.1.2. Метод Ритца	21
3.1.3. Задача об изгибе балки	23
3.2. Принцип наименьшего действия. В поисках вариационных основ. Принцип наименьшего — фундаментальный закон природы	27
3.2.1. Задача о траектории луча света, отражающегося от зеркала	28
3.2.2. Задача о траектории преломляющегося луча света	30
3.3. Построение математических моделей на основе законов сохранения	34
Лекция 4. ПОНЯТИЕ О ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	39
4.1. Понятие о вариационной задаче	39
4.2. Теорема П. Ферма об условиях минимума функции и примеры поиска условий минимума при решении прикладных задач	42
4.2.1. Задача о наилучших размерах консервной банки	42
4.3. Формулировка и решение задачи вариационного исчисления на примере задачи о брахистохроне	46
Лекция 5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СООРУЖЕНИЯ	56
5.1. Гипотезы и допущения в задачах механики деформируемого твердого тела	56
5.2. Математическая модель сооружения при его расчете на прочность, деформативность, устойчивость, надежность, безопасность	63
5.3. Понятие расчетной модели объекта	71
Лекция 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	73
6.1. Построение математической модели задачи теплопроводности	73
6.2. Формулировка задачи теплопроводности. Стационарные и нестационарные задачи	80
6.3. Решение задачи теплопроводности	84
Лекция 7. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЯ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ	88
7.1. О выборе критерия оптимального решения	88
7.2. Математическое программирование	90
7.3. Пример формулировки и решения практических задач поиска оптимального решения как задачи математического программирования	91
Библиографический список	95

Лекция 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ СТРОИТЕЛЬСТВА

История науки рассматривает процесс бесконечного,
последовательного приближения картины мира
к ее неисчерпаемому оригиналу...

Б.Г. Кузнецов, российский философ

1.1. О моделях, математическом и компьютерном моделировании зданий и сооружений

А начнем курс с постановки такого вопроса: как лучше всего оценить риск разрушения уникального автомобильного моста, представленного пока еще на чертежах? Какие существуют подходы для проверки его устойчивости к разрушению:

- полномасштабное испытание построенного моста;
- лабораторное испытание уменьшенной модели;
- виртуальное испытание математической модели?

Какой из этих методов предоставит наиболее надежную информацию о безопасности конструкции?

Цель курса — разобраться, что же такое математическая модель и как ее можно «испытать». О роли моделей в познании говорит цитата российского физика, математика, академика Л.И. Седова: «В науках всегда нужно строить модели и можно иметь дело только с моделями».

Что же собой представляет математическая модель?

Математическая модель — это инструмент, позволяющий изучать реальность с помощью математики. Она включает:

- математические выражения, описывающие связи между параметрами;
- приближенное представление закономерностей, свойственных определенным объектам или явлениям;
- является аналогом реального объекта или явления, который представлен математическим языком.

Что такое математическое моделирование?

Математическое моделирование — это ключ к пониманию сложных систем и явлений. Это технология, позволяющая исследователям изучать и прогнозировать поведение объектов с использованием математических методов. Зачастую она является единственным доступным инструментом для достижения этой цели [4].

Стремление каждого специалиста — найти реальный, дешевый и быстрый способ получения точных ответов на интересующие вопросы, выявить оптимальные параметры управляемых объектов.

Получить ответы на эти вопросы можно, только построив и изучив (испытав) модель интересующего нас объекта.

1.2. Об истории построения модели окружающего мира

Рассмотрим кратко исторический аспект интересующего нас процесса построения модели и становление самого понятия модели.

И начнем мы с IV века до н. э.

Аристотель (384–322 гг. до н. э.)

Новизна, революционность учения (научного мышления) Аристотеля состоит уже в том, что он строил изучение природы не в отдельных частичных ее проявлениях, а в систематическом изучении ее и мироздания в целом, в познании его общей гармонии, единых закономерностей поведения окружающего мира, объяснении хода процессов природы с единых позиций, в построении единой картины мира.



С древних времен жрецы и философы верили, что эти единые закономерности мироздания установлены Создателем, подчинены так называемым причинам конечным. Конечные причины — ключевое понятие учения Аристотеля.

В Аристотелевской картине мира вся Вселенная в целом подчинена конечным причинам. И в картине мира Аристотеля Вселенная конечна. А в самом центре Вселенной — Земля. А это означает, что пространство Вселенной неоднородно.

Познанием мира занимается и телеология (от греческого τέλειος «заклучительный, совершенный» + λόγος — «учение»). Это наука о целесообразности бытия, основанного на разумной творческой воле (воле Творца).

Телеология ставит перед собой задачу ответить на вопрос: зачем, с какой целью, в чем заключаются причины конечные?

Леонардо да Винчи (1452–1519)

«Постигни причину, и тебе не нужен опыт» — значимое высказывание Леонардо да Винчи.

Уже в юные годы он проектировал и рисовал различные машины и схемы гидротехнических сооружений на реке Арно во Флоренции.

Леонардо да Винчи считал, что ключ к глубокому пониманию мира лежит в точности. Для него важнейшими инструментами познания были:

- безупречная перспектива в изображении;
- тщательное воспроизведение анатомии;
- точный подбор красок и материалов.



Он полагал, что наука начинается с визуального восприятия природы, утверждая: «Живопись — это прежде всего наука». Леонардо был убежден, что идеальный рисунок, воспроизводящий пространственные образы, дает наиболее полное представление о природе, считая пространственные отношения ее глубочайшей тайной. Рисунок для него — основа модели объекта.

По Леонардо, наука должна состоять из экспериментальных исследований, и предметами исследований должны быть таинственные истоки творений природы, пока еще не познанные по результатам экспериментов.

И в картине мира Леонардо да Винчи «Солнце не движется», и для него пространство все еще неоднородно.

Николай Коперник (1473–1543)

Согласно представлениям Николая Коперника, Земля находится в центре орбиты Луны. Планеты обращаются вокруг Солнца. Кроме движения по орбите Земля вращается вокруг своей оси. Солнце, вокруг которого обращается Земля, абсолютно неподвижно, а это означает, что пространство все еще считается неоднородным.



Если Солнце неподвижно, значит, Вселенная имеет центр, значит, не всякая точка пространства с одним и тем же правом может быть избрана в качестве начала системы отсчета, значит, по-прежнему пространство неоднородно.

Только в XVII в. в основу научной картины мира легла идея однородного пространства. Но высказана эта идея была уже в конце XVI в., причем в очень яркой и решительной форме.

Джордано Бруно (1548–1600)

У Бруно не только Земля, но и Солнце уже не центр Вселенной. У Вселенной вообще нет центра. А это означает, что пространство однородно!

17 февраля 1600 г. Джордано Бруно за свои революционные идеи окончил жизнь на костре на площади Цветов в Риме.



Галилео Галилей (1564–1642)

Для нас значимо высказывание Галилео Галилея, с которого и начнем рассмотрение основных интересующих нас идей: «...Хотя человек и познает тысячи истин, но тысяча по сравнению с бесконечностью как бы нуль; но я утверждаю, что человеческий разум познает некоторые истины столь совершенно и с такой абсолютной достоверностью, какую представляет сама природа».

Под совершенным, достоверным знанием Галилей подразумевает математическое, количественное определение явления: «Математика достигает понимания явления, а высшей степени достоверности не существует».

Галилео Галилей принял у мыслителей Ренессанса идею однородности пространства, и она приняла у него точную и ясную форму учения о бесконечном равномерном движении тел, длящемся без поддерживающего это движение воздействия.

На основе изученных понятий механики Галилей сначала обосновал, а затем и обобщил систему Коперника.



1.3. О роли математики в моделировании объектов и явлений

Еще одна значимая цитата Галилео Галилея: «Философия написана в грандиозной книге, которая открыта всегда для всех и каждого, — я говорю о природе. Но понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, а знаки ее — математические формулы»

При решении **Исааком Ньютоном (1642–1727)** задачи о траектории брошенного камня зародилось понятие производной и зародилось дифференциальное исчисление. Считается, что идею предельно малой величины Ньютон почерпнул еще студентом Тринити-колледжа Кембриджского университета у своего (тогда молодого 34-летнего) преподавателя математики Исаака Барроу.

Прием, использованный Ньютоном при решении практических задач, был понят основателем математического анализа Готфридом Лейбницем и затем в решении задач механики использован Леонардом Эйлером, Анри Навье, Огюстеном Луи Коши, Жозефом Луи Лагранжем и другими.



1.4. Задача Ньютона о траектории брошенного камня

Построим математическую модель траектории полета камня, чтобы понять, как он движется в гравитационном поле. Будем считать, что камень массой m брошен горизонтально со скоростью $v_{\text{гор}}$ с определенной высоты, а сопротивление воздуха отсутствует (рис. 1.1).

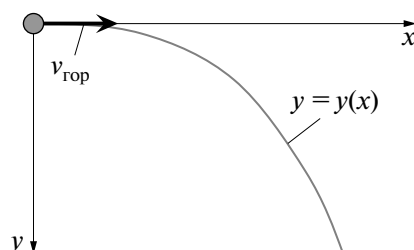


Рис. 1.1. Задача Ньютона о траектории брошенного камня

Наша цель — найти функцию $y(x)$, описывающую траекторию. Эта функция должна соответствовать реальному движению камня, учитывая сделанные допущения и выбранную систему координат.

Для решения задачи поместим начало декартовой системы координат в точку старта камня $(0; 0)$.

Наша цель — построить уравнение траектории $y(x)$ брошенного камня. При построении математической модели траектории камня будем исходить из предположения, что в любой момент времени камень движется в направлении касательной к траектории его движения [4].

Обозначим скорость камня в любой точке траектории как v . Эта скорость меняется из-за гравитации, увеличивающей вертикальную составляющую $v_{\text{грав}}$ (рис. 1.2).

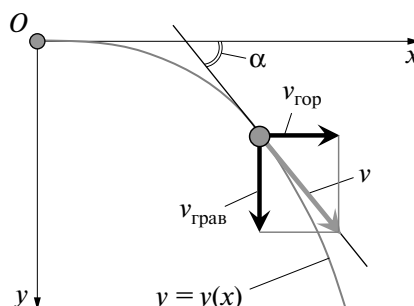


Рис. 1.2. Решение задачи

Основная идея модели заключается в том, что направление движения камня всегда совпадает с касательной. Для вычисления тангенса угла наклона этой касательной будем использовать соотношение

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\text{грав}}}{v_{\text{гор}}}. \quad (1.1)$$

Решение этой задачи стало отправной точкой для И. Ньютона в разработке математической конструкции, которую мы сейчас знаем как производная. Теперь, вооружившись этим инструментом и воспользовавшись геометрической интерпретацией понятия первой производной, мы можем установить дифференциальную связь между ортогональными компонентами вектора скорости камня:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_{\text{грав}}}{v_{\text{гор}}}. \quad (1.2)$$

Полученная зависимость является ключом к нахождению уравнения траектории $y(x)$.

Важно отметить, что горизонтальная составляющая скорости $v_{\text{гор}}$ — это постоянная величина, заданная в условиях задачи. А вот вертикальная составляющая $v_{\text{грав}}$ увеличивается по мере падения камня, а значит, зависит от его текущей высоты (координаты y).

О законе состояния и его роли в математической модели

Теперь нам нужна формула для расчета $v_{\text{грав}}$ в любой точке траектории, т.е. зависимость $v_{\text{грав}}$ от координаты y . Для этого необходим закон состояния — правило, связывающее характеристики падающего тела, используемые в модели [6–8].

Закон состояния может быть основан на экспериментальных данных, предположениях или проверенных законах физики. В нашем случае в качестве закона состояния мы выберем закон сохранения энергии, согласно которому в любой точке траектории (в инерциальной системе координат) полная энергия движущегося тела массой m остается неизменной:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{потенц}} + \mathcal{E}_{\text{кинетич}} = mgh + \frac{mv_{\text{грав}}^2}{2} = \text{const}, \quad (1.3)$$

где g — ускорение свободного падения, характеризующее силу гравитации; $v_{\text{грав}}$ — гравитационная составляющая скорости, т.е. скорость, которую тело набирает под действием гравитации в выбранной системе координат; h — высота положения камня относительно некоторой зафиксированной точки C (рис. 1.3). Важно, что эта высота $h = H - y$ связана с координатой y , где H — значение ординаты (по оси Oy) для фиксированной точки C .

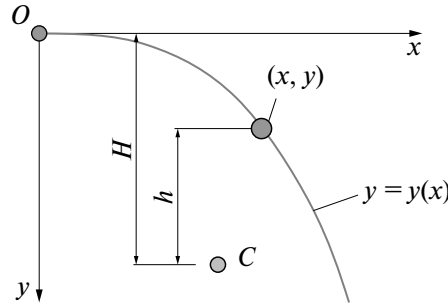


Рис. 1.3. Иллюстрация к формуле 1.3

Падение тела под действием силы тяжести приводит к трансформации энергии: потенциальная энергия уменьшается, а кинетическая — увеличивается ровно на столько же. Это можно записать в виде следующего соотношения:

$$\text{изменение } (\mathcal{E}) = \text{изменение } (mg(H - y)) + \text{изменение } \left(\frac{mv_{\text{грав}}^2}{2} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Поскольку в нашей задаче H , m и g — это константы, то

$$\text{изменение } (mgH) = 0, \quad (1.5)$$

и тогда можем записать:

$$\text{изменение } (mgy) = \text{изменение } \left(\frac{mv_{\text{грав}}^2}{2} \right). \quad (1.6)$$

Из равенства (1.6) следует, что в любом положении тела с координатами x и y , при нулевой начальной скорости падения тела (скорости $v_{\text{грав}}$ в точке O):

$$\frac{v_{\text{грав}}^2}{2} = gy. \quad (1.7)$$

Далее, из равенства (1.7) мы можем получить формулу для вычисления гравитационной составляющей скорости полета камня в зависимости от высоты его положения y :

$$v_{\text{грав}} = \sqrt{2gy}, \quad (1.8)$$

и формируемая зависимость (1.2) с учетом значения (1.8) приобретает вид дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2g}}{v_{\text{гор}}} \cdot \sqrt{y}. \quad (1.9)$$

Таким образом, полученная зависимость (1.9) является математической моделью траектории полета брошенного камня. Решив уравнение (1.9), мы получим вид функции $y(x)$, удовлетворяющей этому уравнению. График функции $y(x)$ станет достаточно близким приближением траектории брошенного камня.

Приступим к решению этого уравнения. Сначала для удобства решения упростим уравнение (1.9), введя следующее обозначение:

$$k = \frac{\sqrt{2g}}{v_{\text{гор}}} = \text{const}. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.9) принимает более простой вид

$$\frac{dy}{dx} = k\sqrt{y}. \quad (1.11)$$

Приступим к его решению. Преобразуем уравнение (1.11) и проинтегрируем обе его части:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = k \int dx. \quad (1.12)$$

Выполняя преобразования, получим

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}k(x + C), \quad (1.13)$$

где C — константа интегрирования.

Для упрощения дальнейшей работы с уравнением (1.13) воспользуемся тем, что мы рассматриваем только положительную четверть координатной плоскости xOy . Это позволяет нам возвести обе части уравнения в квадрат, что не повлияет на решение в интересующей нас области:

$$y = \frac{1}{4}k^2(x + C)^2. \quad (1.14)$$

Для того чтобы завершить решение задачи, нужно определить значение константы интегрирования C . Для этого воспользуемся начальными условиями, которые мы задали в начале: стартовая точка полета камня совпадает с началом координат. Следовательно, при $x = 0$ координата y также равна нулю. Подставив эти значения в полученное общее ре-

шение (уравнение 1.14), мы найдем значение C и получим уравнение траектории, которое должно описывать движение камня для всех $x \geq 0$, включая точку старта $x = 0, y = 0$. Подставим это принятое граничное условие в общее решение (1.14), а при $x = 0, y = 0$:

$$0 = \frac{1}{4}k^2(0 + C)^2 \quad (1.15)$$

$k \neq 0$, поскольку мы приняли $k = \frac{\sqrt{2g}}{v_{\text{гор}}} = \text{const} \neq 0$, выражение (1.15) станет тождеством, только если $C = 0$.

Итак, согласно сформулированным условиям и принятым допущениям задачи, введенному обозначению k , траекторией брошенного камня является парабола, чей график описывается функцией вида $y = y(x)$:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_{\text{гор}}^2} x^2. \quad (1.16)$$

Таким образом, уравнение

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_{\text{гор}}^2} (x + C)^2 \quad (1.17)$$

и его частное решение (при $C = 0$) — это функция $y(x)$, которая представляет математическую модель траектории полета брошенного тела.

Исаак Ньютон рассматривал решение задачи о траектории камня как принципиальный шаг к достижению более общей цели: созданию математической модели движения одной планеты вокруг другой (рис. 1.4).

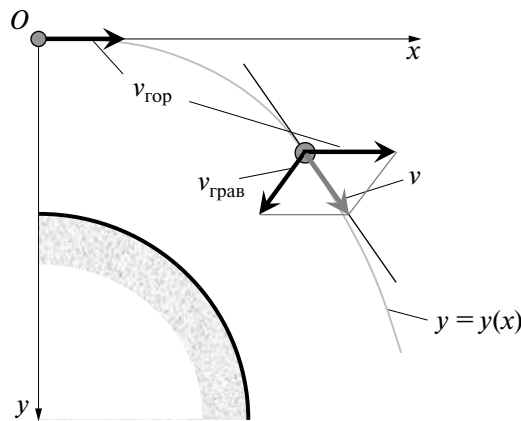


Рис. 1.4. Движение планет

По сути, задача о движении планеты — это обобщение задачи о брошенном камне, в которой направление силы гравитации постоянно меняется относительно декартовой системы координат.

Лекция 2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

2.1. Идеи, привлекаемые в качестве основы математических моделей

Сформулируем основные вопросы. Как строить модели окружающих предметов и явлений? Как найти идейную основу для модели?

В задачах прогнозирования физических явлений классический путь построения моделей состоит в привлечении в качестве основной идеи (постулата) модели фундаментального закона природы, однако это может быть и сделанное предположение, или найденная аналогия с прежде изученным проявлением другого объекта [1; 4].

При использовании законов природы в математическом моделировании важным становится вопрос: как выбрать наиболее подходящий закон для конкретной практической задачи и как правильно его применить?

В механике часто используются два класса принципов:

— **принцип наименьшего**, основанный на минимизации некоторой величины (действия, пути, времени и т.д.). Леонард Эйлер вслед за Ньютоном и другими учеными называл эти принципы «*причинами конечными*», подчеркивая их фундаментальную роль;

— **принцип сохранения**, основанный на сохранении определенных величин (энергии, материи, импульса и т.д.) и который Леонард Эйлер называл «*причинами производящими*».

«Действительно, так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума: поэтому нет никакого сомнения, что все явления мира с таким же успехом можно определить из причин конечных при помощи метода максимумов и минимумов, как и из самых причин производящих. Повсюду существуют столь яркие оказания этой истины, что для её подтверждения нам нет нужды в многочисленных примерах; скорее надо будет направить усилия на то, чтобы в каждой области физических вопросов отыскать ту величину, которая принимает наибольшее или наименьшее значение: исследование, принадлежащее, по-видимому, скорее, к философии, чем к математике». Это цитата **Леонарда Эйлера (1707–1783)** швейцарского, российского и немецкого математика и механика.



О задачах анализа и синтеза

Важно понимать существенную разницу между видами моделей: мы строим не исследовательскую модель всего объекта, а математическую модель конкретного проявления этого объекта. Именно эта модель служит основой для формулировки уже исследовательской задачи или набора задач, касающихся данного проявления.

Формирование математической модели заключается в математической фиксации закономерностей взаимодействия исследуемого проявления с его параметрами. При этом в модель включаются только те параметры, которые оказывают существенное влияние на изучаемое проявление.

Исследовательская задача, как правило, включает:

— задачи **анализа**, направленные на прогнозирование свойств объекта;

— задачи **синтеза**, направленные на управление параметрами объекта для достижения оптимальных характеристик.

При постановке задач анализа, целью которых является объяснение проявлений исследуемого объекта или их прогнозирование, необходимо четко разграничивать известную и требуемую информацию об объекте. Важно, чтобы исходных данных было доста-

точно для получения однозначного ответа, но при этом их избыток может привести к дублированию информации или противоречиям, исключающим однозначное решение.

В задачах синтеза, направленных на управление объектом, его проектирование, необходимо определить, какие его характеристики должны быть улучшены (оптимизированы), и то, как мы будем оценивать, что они стали «наилучшими».

В итоге, результатом правильной постановки задачи является создание математической модели изучаемого явления.

В задачах синтеза в центре внимания математической модели находится параметр, который необходимо оптимизировать для достижения конкретной практической цели. Именно оптимизация этого параметра и является целью решения задачи, которую мы определяем самостоятельно. При построении модели учитываются характеристики объекта, влияющие на достижение цели, а также реальные ограничения на изменение этих характеристик. Для решения поставленных задач при построении математической модели используются методы вариационного исчисления или математического программирования, о которых мы будем говорить в нашем курсе [6].

В задачах анализа переход к математическому описанию начинается с выявления, формализации и математической записи закономерностей, управляющих изучаемым проявлением объекта. В отличие от задач управления, где цель ставим мы, в задачах анализа мы должны понять цель, которую преследует сама природа. Объектом управляет не человек, а природа. Специфика этапа и состоит в том, что здесь по выражению Леонарда Эйлера «необходимо знать цель, которую уже не мы (как в задачах управления), а природа полагает в своих действиях».

Задачи синтеза, такие как задачи проектирования и управления, обычно являются оптимизационными. Их целью является определение наилучшего значения параметра или наилучшего сочетания значений нескольких параметров исследуемого объекта или явления (причем параметры могут быть взаимозависимы). Важно отметить, что в отличие от задач анализа, в задачах синтеза мы ищем параметры объекта, который еще не существует, а находится в процессе проектирования.

Обратимся к примеру уникального моста. Так, изменение высоты пилона вантового моста оказывает существенное влияние на различные прочностные характеристики конструкции, на величину затрат по их производству и, конечно на сам внешний вид моста. Вместо многократных итераций с анализом и корректировкой проекта можно достаточно быстро и эффективно решить задачу синтеза (задачу поиска оптимального решения) и найти оптимальную высоту пилона, которая наилучшим образом будет соответствовать заданным критериям.

Таким образом, в задачах анализа мы строим и исследуем математическую модель *проявления* объекта, в то время как в задачах синтеза мы строим и исследуем математическую модель достижения конкретной цели, поставленной перед создаваемым нами объектом.

Прояснив особенности задач анализа и синтеза, обратим внимание на такой важный этап как обобщения. И здесь уместно вспомнить **Альберта Эйнштейна (1879–1955)**.

В 26 лет Эйнштейн опубликовал статью «К электродинамике движущихся тел». В этой статье он изложил теорию, которая исключает существование абсолютной точки отсчета и привилегированной системы координат вообще для прямолинейного и равномерного движения, также однородность пространства, равноправность всех его точек при выборе начала координат.

Эйнштейн отказался от классического правила сложения скоростей, он отказался от абсолютного времени, которое не зависит от выбора пространственной системы отсчета. По Эйнштейну скорость света действительно одна и та же, но в различных, движущихся одна по отношению к другой системам (системах координат).



Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru