ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ

АКОР	Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов
АПМ-метод	Алгебраический полиномиально-матричный метод
ГЭС	Гидроэлектростанция
ДКЛМ	Дискретная квазилинейная модель
ИМ	Исполнительный механизм
КЛМ	Квазилинейная модель
НСИСУ	Нелинейная селективно-инвариантная система управления
НСУ	Нелинейная система управления
НУУ	Нелинейное устройство управления
ОУ	Объект управления
ПЛИС	Программируемая логическая интегральная схема
САУ	Система автоматического управления
СИСУ	Селективно-инвариантная система управления
СЛАУ	Система линейных алгебраических уравнений
СУ	Система управления
УУ	Устройство управления
УФЖ	Управляемая форма Жордана
ФОР	Функционал обобщённой работы
CGA	Cat-Glue аппроксимация
LQG	Linear-Quadratic-Gauss
SDC	State-dependent coefficients
SDRE	State-dependent Riccati equation
ЦВМ	Цифровая вычислительная машина
ЭВМ	Электронная вычислительная машина

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью данной книги является изложение основ теории аналитического синтеза нелинейных систем управления различными нелинейными объектами и процессами. Предполагается, что последние описываются нелинейными уравнениями в форме Коши, которые позволяют учесть все особенности и тонкости управляемых объектов. Строго говоря, объекты всегда описывались нелинейными уравнениями, но в прошлом эти уравнения обычно линеаризовались или упрощались тем или иным способом, что позволяло решить задачу синтеза. Однако в последние годы требования к качеству процессов управления возросли настолько, что уже не могут быть удовлетворены при использовании линейных моделей объектов управления. Возникла острая необходимость создания систем управления с учетом нелинейных особенностей управляемых объектов.

Для решения этой проблемы за последние 40–50 лет было разработано много различных подходов. Причём большинство из них ориентировано на применение определенных форм дифференциальных уравнений объектов с дифференцируемыми нелинейностями. При этом предполагается, что исходные уравнения объекта могут быть преобразованы к этим формам. Этот подход предполагает нахождение специальных преобразований нелинейных уравнений, поиск которых зачастую представляет собою задачу, сравнимую по сложности с задачей синтеза самой системы управления. Причем существование соответствующего преобразования часто предполагается, т. е. условия его существования неизвестны, как и алгоритм его построения.

В данной книге также используется преобразование исходных уравнений нелинейных объектов в переменных состояния либо к квазилинейной модели (КЛМ), либо к управляемой форме Жордана (УФЖ), что также предполагает дифференцируемость нелинейностей по всем их аргументам. Если нелинейности объекта являются дифференцируемыми, то преобразование уравнений к КЛМ существует всегда и выполняется простыми математическими методами. Преобразование же к УФЖ возможно лишь при выполнении некоторых условий. Эти условия найдены для уравнений общего вида второго порядка и в частном случае для объектов третьего порядка. Во многих случаях уравнения нелинейных объектов приводятся к УФЖ простым переобозначением переменных состояния, поэтому отсутствие указанных условий практически не ограничивает возможности применения представленных ниже методов синтеза нелинейных систем управления на основе УФЖ. При этом методы синтеза, как на основе КЛМ, так и с применением УФЖ, являются аналитическими, что является существенным фактором, ввиду широкого распространения средств вычислительной техники, которая может использоваться и при синтезе систем управления, и при реализации более сложных и более эффективных нелинейных законов управления.

Материал книги распределен по восьми главам. В первой главе излагаются математические модели нелинейных объектов и процессов управления в переменных состояния, вводятся их уравнения в отклонениях, а также даётся определение устойчивости. Рассматривается наиболее важный в нелинейном случае метод оценки устойчивости — метод функций Ляпунова. Вторая глава посвящена постановке задачи синтеза линейных и нелинейных систем управления, а также некоторым традиционным методам решения этих задач. Приводятся конкретные примеры синтеза нелинейных систем управления традиционными методами.

В последующих главах рассматриваются в основном два метода синтеза нелинейных систем управления. Главы с третьей по седьмую посвящены первому из них — методу синтеза на основе КЛМ. Метод синтеза на основе УФЖ рассматривается в восьмой главе. В третьей главе даётся определение квазилинейных моделей объектов с дифференцируемыми нелинейностями и рассматриваются два метода их построения. Далее на основе КЛМ нелинейных объектов и алгебраического полиномиально-матричного (АПМ) метода развивается метод синтеза нелинейных систем управления нелинейными объектами. Этот достаточно простой метод позволяет обеспечить приемлемый характер не только переходных процессов, но и установившегося режима нелинейных систем управления. Квазилинейные модели позволяют установить условия управляемости состоянием системы, при которых возможно обеспечение асимптотической устойчивости положения равновесия нелинейной замкнутой системы. Также они позволяют найти критерий управляемости выхода объекта (системы), при выполнении которого отклонению выходной управляемой величины системы от заданного значения можно придать необходимые ненулевые значения в установившемся режиме. Показано, что если какой-либо канал «управление-выход» объекта не удовлетворяет условию управляемости выхода, то выходная величина замкнутой системы в установившемся режиме будет иметь то значение, которое обусловлено устойчивостью системы.

В четвертой главе рассматривается задача устойчивости положения равновесия нелинейных систем. Очень многие нелинейные объекты удовлетворяют условиям управляемости по состоянию лишь в некоторой ограниченной окрестности положения равновесия. Естественно, в этом случае возможно обеспечение устойчивости положения равновесия нелинейной замкнутой системы лишь в большом. Однако существуют и нелинейные объекты, которые удовлетворяют условиям управляемости по состоянию во всем пространстве состояний. Для этого случая методом функций Ляпунова доказана теорема об устойчивости в целом (глобальной устойчивости) нелинейных гурвицевых систем. Нелинейные системы называются *гурвицевыми*, если характеристический полином системной матрицы их квазилинейной модели удовлетворяет условиям критерия Гурвица устойчивости динамических систем.

Пятая и шестая главы посвящены применению разработанного в третьей главе АПМ-метода синтеза нелинейных систем управления. В пятой главе рассматривается синтез нелинейных систем с астатизмом первого порядка, нелинейных систем с интервально-дифференцируемыми нелинейностями, а также систем управления нелинейными неаффинными объектами. В шестой главе рассматривается задача синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем.

Здесь предполагается, что внешние задающие и возмущающие воздействия являются не вполне определёнными — известны только их спектральные модели. Установлены условия разрешимости этой задачи и даётся численный пример.

В седьмой главе разрабатывается оригинальный метод квазилинейной дискретизации уравнений нелинейных объектов управления, который позволяет синтезировать нелинейные дискретные и гибридные системы управления со сравнительно большим периодом дискретизации. Это даёт возможность применять для управления нелинейными объектами более простые микропроцессоры не очень высокого быстродействия.

В восьмой главе даётся определение управляемой формы Жордана (УФЖ) и излагается метод синтеза систем управления с требуемыми характеристиками переходного процесса на её основе. Установлен критерий управляемости выхода в этом случае. Рассматривается проблема преобразования нелинейных уравнений в форме Коши к УФЖ, а также решение задачи синтеза систем, оптимальных в смысле неопределенного функционала. Показано, что путем варьирования коэффициентов этого функционала можно получать нелинейные оптимальные системы управления с различными характеристиками переходного процесса.

Книга ориентирована на инженеров, научных работников, аспирантов и магистрантов технических направлений, специализирующихся на решении задач синтеза нелинейных систем управления и автоматизации с применением современных вычислительных средств. Все рассмотренные в книге методы иллюстрируются численными примерами.

Книга снабжена списком принятых сокращений и Приложениями, содержащими стандартные нормированные передаточные функции, элементы теории функциональных матриц и векторов, соотношения между уравнениями «вход-выход», содержащими передаточные функции, и соответствующими уравнениями в переменных состояния; изображения по Лапласу непрерывных и дискретных функций, а также квазилинейные модели некоторых функций. Имеется предметный указатель.

В книге принято два способа ссылок на материалы Приложений (стр. 256–275): ссылка на тот или иной пункт некоторого приложения обозначена как (см. П.X.II), где X — номер приложения, а II — номер пункта в этом приложении. Ссылка на конкретную формулу, приведенную в этих приложениях, имеет вид (П.X), где X — порядковый номер формулы. Для большей ясности знаком ♦ обозначены окончания теорем, лемм, определений, примеров и т. п. Курсивом выделены понятия, вынесенные в предметный указатель.

Автор признателен рецензентам: проректору по научной работе Ивановского государственного энергетического университета д. т. н., профессору В. В. Тютикову и зав. кафедрой «Управление и системный анализ теплоэнергетических и социотехнических комплексов» Самарского государственного технического университета д. т. н., профессору М. Ю. Лившицу за обсуждения и ценные замечания, в значительной мере способствовавшие улучшению изложения материала.

В книге, несомненно, остался ряд незамеченных описок и погрешностей. Автор будет весьма благодарен тем, кто найдёт возможным указать свои замечания по содержанию книги, прислав их по адресу: кафедра САУ, Институт радиотехнических систем и управления Южного федерального университета, Некрасовский пер., 44, г. Таганрог, 347928.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Современный человек, как в быту, так на производстве, сам того не замечая, постоянно пользуется системами автоматического управления. Холодильник, утюг, телевизор, калькулятор, автомобиль, трамвай, станки, химические реакторы и многое другое оборудование снабжено такими системами. Они решают разнообразные задачи по управлению процессами, протекающими в различных агрегатах, реакторах и других устройствах, которые в теории управления называются объектами управления. В простейшем устройстве — электрическом утюге — протекает процесс его нагрева. Но любой хозяйке нужен не просто горячий утюг. Для глажения одной вещи нужен утюг, имеющий одну температуру, а для другой вещи — совсем другую температуру. Вот для нагрева до заданной температуры и поддержания её в процессе глажения и необходима система автоматического управления утюга. Аналогичные и гораздо более сложные задачи решаются и в холодильнике, и в атомном реакторе, и во многих других объектах управления. Для решения этих задач объект прежде всего снабжается органом управления, т. е. устройством, посредством которого можно оказывать регулирующее или управляющее воздействие на процесс, протекающий в объекте. Именно регулирующее или управляющее воздействие позволяет изменять значение регулируемой или управляемой (выходной) величины объекта. Чаще всего это осуществляется путем изменения количества подводимой или отводимой энергии, вещества (например, топлива) или информации.

Объект, имеющий орган управления, называется объектом управления. Если этот орган управления приводится вручную, то говорят, что объект имеет ручное управление (например, обычный автомобиль). Для обеспечения автоматического управления к объекту добавляется исполнительный механизм (ИМ), который выполняет те же действия по управлению объектом, что и человек, но уже без его участия. Объект снабжается также датчиками, которые измеряют управляемую величину (температуру — в утюге, концентрацию нейтронного потока и температуру — в атомном реакторе) и ряд других величин. В свою очередь, ИМ приводится в действие управляющим устройством (УУ), которое и обеспечивает автоматическое управление объектом. Совокупность ИМ, датчиков и УУ образуют автоматический регулятор, который обычно называется просто — регулятор.

Таким образом, системы автоматического управления (САУ) состоят из регулятора и некоторого объекта управления. Различные объекты обычно имеют различные свойства, поэтому для разных объектов необходимы регуляторы с разными свойствами. Чтобы для некоторого объекта создать подходящий в том или ином смысле регулятор, в теории управления применяется системный подход. Он заключается в том, что реальные объекты и устройства, из которых состоит регулятор, описываются математическими моделями, т. е. совокупностью различных уравнений: алгебраических, дифференциальных, интегральных и т. п. Путем объединения этих уравнений, математически описывающих и регулятор, и объект управления, и датчики, получают математическую модель системы управления, тоже как совокупность математических уравнений.

Оказывается, исследуя свойства решений этих уравнений, например, с помощью компьютера, можно установить различные свойства САУ даже до того, как она будет построена, т. е. до её физической реализации. Более того, изменяя математическую модель УУ, можно видеть, как меняются при этом свойства САУ, т. е. появляется возможность найти тот самый «подходящий» регулятор для заданного конкретного объекта. Эти задачи исследования свойств систем и поиска регуляторов в теории управления называются задачами анализа и синтеза САУ соответственно.

Решение этих задач осложняется тем, что реальные объекты являются динамическими и нелинейными, т. е. они описываются нелинейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями, решения которых, необходимые для изучения свойств как объектов, так и САУ в целом, очень трудно найти. Поэтому анализ нелинейных динамических систем, к которым можно отнести и объекты, и регуляторы, и сами САУ, проводится достаточно сложными и весьма разнообразными методами.

Если требования к характеру процесса, протекающему в объекте, как, например, в утюге, невысокие, то нелинейные уравнения, описывающие управляемый процесс, как известно, можно линеаризовать и достаточно просто решить — как задачу анализа свойств САУ, так и задачу её синтеза линейными методами. Если же требования очень высоки, как, например, к процессам в атомном реакторе или к полёту современного истребителя 5-го поколения, то без учета нелинейных свойств объекта этим требованиям удовлетворить практически невозможно. Поэтому последние 40–50 лет в теории управления основное внимание уделяется разработке методов анализа и синтеза именно нелинейных динамических систем.

За эти годы теория нелинейных систем получила значительное развитие. Разработано много методов различной сложности для решения задач как анализа, так и синтеза. Некоторые из этих методов рассматриваются ниже. Как правило, в большинстве методов синтеза предполагается предварительное преобразование нелинейных уравнений объекта к определённому виду, при котором удается достаточно просто построить систему разрешающих уравнений. Решение этой системы позволяет найти параметры принятого априори способа формирования управляющего воздействия (этот способ обычно называется *законом управления*). Более совершенные методы синтеза позволяют найти и структуру УУ, и параметры закона управления.

Данная монография в основном посвящена разработанным в последние годы достаточно простым аналитическим методам синтеза нелинейных систем управления (НСУ) на основе заданных моделей нелинейных объектов. Методы анализа в дальнейшем будут рассматриваться лишь как средства исследования свойств САУ, синтезированных теми методами, которым посвящена данная монография.

ГЛАВА 1
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

1.1. Уравнения в переменных состояния

Все математические модели объектов управления, различных элементов систем управления, да и самих систем описывают объекты, элементы и системы с разной степенью адекватности, т. е. с разной степенью соответствия свойств модели свойствам реальных объектов, элементов и систем. В данной книге будут рассматриваться динамические модели, которые с той или иной степенью точности описывают изменения во времени процессов, протекающих в реальных объектах или системах, или же движения, которые совершают эти объекты или системы в соответствии со своим назначением. Изменения процессов обычно характеризуются изменением значений некоторых величин с течением времени. Например, в упоминавшемся выше утюге такими величинами можно считать ток, протекающий по нагревательному элементу, и температуру утюга. Движения объектов, например, летательного аппарата, обычно характеризуются высотой, скоростью и направлением полета, а также значениями координат самолёта в некоторой системе координат, начало которой связано с какой-либо точкой на поверхности земли. При этом любые изменения указанных и других величин, характеризующих состояние объектов и систем, в теории систем называются движениями, которые и описываются математическими моделями. При этом принцип действия, конструкция, вид используемой энергии и другие особенности объектов не имеют существенного значения и учитываются математическими моделями довольно косвенно.

Одной из наиболее общих *математических моделей* нелинейных *объектов управления* является модель, представленная совокупностью системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка и одного или нескольких нелинейных алгебраических уравнений:

$$\dot{w} = f(w, u_{п}, \upsilon_{п}), \tag{1.1}$$

$$v = \varsigma(w, u_{п}), \tag{1.2}$$

где $w = w(t) = [w_1(t)\ w_2(t)\ \ldots w_n(t)]^T$ — вектор-столбец переменных состояния $w_i(t)$; $u_{п} = u_{п}(t) = [u_{п1}(t),\ u_{п2}(t)\ \ldots u_{п,к_у}(t)]^T$ — вектор-столбец произвольных управлений; $\upsilon_{п} = \upsilon_{п}(t)$ — произвольное внешнее возмущение; $v = v(t) = [v_1(t)\ v_2(t)\ \ldots v_{к_в}(t)]^T$ — соответствующий вектор-столбец управляемых выходных величин; $f(w, u_{п}, \upsilon_{п})$, $\varsigma(w, u_{п})$ — нелинейные вектор-функции размерностей n и $к_в$ соответственно; их компонентами являются скалярные нелинейные функции, т. е., например, $f(w, u_{п}, \upsilon_{п}) = [f_1(w, u_{п}, \upsilon_{п})\ f_2(w, u_{п}, \upsilon_{п})\ \ldots\ f_n(w, u_{п}, \upsilon_{п})]^T$. Число n, равное числу переменных состояния данной модели, называется порядком модели; оно же называется и *порядком объекта*, описываемого уравнениями (1.1), (1.2). Числа $к_у$ и $к_в$ берутся равными числу управлений $u_i(t)$ и числу управляемых величин $v_i(t)$ соответственно. Отметим также, что уравнения (1.1) называются *уравнениями в переменных состояния* или дифференциальными уравнениями *в форме Коши*, а выражения (1.2) — *уравнениями выхода*; $[]^T$— обозначение операции транспонирования (см. П.2.13).

Отметим, что нелинейные системы управления описываются уравнениями, аналогичными уравнениям (1.1) и (1.2), но в этом случае эти уравнения включают не вектор управлений $u_п = u_п(t)$, а вектор задающих воздействий $g = g(t)$, причем размерность этого вектора чаще всего равна размерности вектора выходных переменных.

В качестве примера *нелинейного объекта* управления приведем здесь уравнения [49, 125] мобильного робота, подобного автомобилю, все четыре колеса которого являются ведущими:

$$
\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= m^{-1}[u_{п1} - \upsilon],\\
\dot{w}_2 &= w_3,\\
\dot{w}_3 &= u_{21}\sin(u_{п2}) / J_{цт},\\
\dot{w}_4 &= w_1\cos(w_2) - 0{,}5l\,w_3\sin(w_2),\\
\dot{w}_5 &= w_1\sin(w_2) + 0{,}5l\,w_3\cos(w_2),
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

$$
v_1 = w_4,\ v_2 = w_5, \tag{1.4}
$$

где $w_1 = V_{цт}$ — скорость продольного движения центра тяжести робота; w_2 — угол поворота робота в наземной системе координат XY; $w_3 = \omega$ — скорость поворота; w_4 и w_5 — координаты центра тяжести по осям X и Y; m — масса робота; $J_{цт}$ — его момент инерции относительно вертикальной оси; $u_{п1}$ — управление скоростью $V_{цт}$ (за счет изменения мощности двигателя), а $u_{п2}$ — управление направлением движения (путем изменения угла поворота передних, рулевых колес); $\upsilon = C_v w_1^2$ — внешнее возмущение, т. е. сопротивление движению робота, обусловленное трением колес о дорогу и аэродинамическим сопротивлением, в данном случае это сопротивление принято пропорциональным квадрату скорости робота; v_1, v_2 — выходные величины — координаты робота в наземной системе координат XY.

Как видно, в данном случае $w = [w_1\ w_2\ \ldots w_5]^T$, $n = 5$, $\kappa_у = \kappa_в = 2$, т. е. число управлений равно числу выходных величин. Такие объекты называются *многомерными*. Однако в дальнейшем чаще всего будут рассматриваться *одномерные нелинейные объекты* с одним управлением и одной управляемой величиной, т. е. с $\kappa_у = \kappa_в = 1$.

Конкретные уравнения (1.1), (1.2) описывают все возможные движения $w(t, w_0, u_п, \upsilon_п)$ некоторого нелинейного объекта или системы, которые могут вызываться некоторыми *начальными условиями* ($w_0 = w(0)$); некоторыми изменениями *управлений* $u_п$, а также *внешними возмущениями* $\upsilon_п = \upsilon_п(t)$. По предложению русского ученого Александра Михайловича Ляпунова, сделанного ещё в конце

XIX в., из всех возможных движений $w(t,\ w_0,\ u_п, \upsilon_п)$ нелинейного объекта выделяется *номинальное* (невозмущенное, расчетное) *движение*, описываемое решением $w_н(t, w_{0н}, u_н, \upsilon_н)$, также системы уравнений (1.1), (1.2) [60]. Причём это движение объект совершает при номинальных (расчетных) значениях: номинальных начальных условиях — $w_{0н}$; номинальном управлении — $u_н$ и при номинальном возмущении — $\upsilon_н$.

Например, в случае полета самолёта под управлением автопилота номинальное движение — это полет самолета, определяемый следующими величинами: $w_{0н}$ — начальные значения, которыми являются значения переменных состояния самолёта w_{i0} в момент включения лётчиком автопилота после того, как он привел самолёт к полёту по заданной траектории, этот момент времени принимается за $t = 0$; $u_н$ — управления, установленные лётчиком: тяга двигателя, углы поворота рулей высоты и направления; $\upsilon_н$ — номинальные возмущения: расчетные значения веса пассажиров, их багажа, а также значение веса оставшегося топлива. Аналогичные величины, за исключением высоты, характеризуют и движение наземного робота (1.3), (1.4), если за $t = 0$ принять момент начала его движения.

Естественно, в процессе функционирования объекта или системы он (она) чаще всего совершает движения, отличающиеся от номинального. Эти движения также вызываются начальными условиями $w_0 \neq w_{0н}$, управлениями $u_п \neq u_н$ и возмущениями $\upsilon_п \neq \upsilon_н$, т. е. начальными условиями, управлениями и внешними воздействиями, которые отличаются от номинальных. Совокупность указанных величин в целом называется возмущениями, поэтому соответствующие движения объектов или систем, также по предложению А. М. Ляпунова, называются *возмущёнными движениями*. Для нормального функционирования объекта или системы, очевидно, необходимо, чтобы возмущённые движения с течением времени стремились к номинальному. Последнее имеет место только в тех случаях, когда невозмущённое движение является асимптотически устойчивым.

Чтобы установить, является ли невозмущённое движение объекта или системы (1.1), (1.2) устойчивым или неустойчивым, А. М. Ляпунов предложил рассматривать не само это невозмущённое движение, а отклонения возмущённых движений от невозмущённого. Смысл этого предложения в том, что если эти отклонения будут с течением времени затухать достаточно быстро, то и возмущённое движение так же достаточно быстро будет стремиться к невозмущённому, т. е. к номинальному (расчетному), движению. При этих условиях система управления будет функционировать удовлетворительно.

Дифференциальное уравнение в отклонениях объекта (1.1), (1.2) определяется следующим образом. Пусть $x = w - w_н$ — вектор отклонений, тогда $\dot{x} = \dot{w} - \dot{w}_н$, а с учетом уравнений состояния (1.1) имеем

$$\dot{x} = f(w(t, w_{0п}), u_п, \upsilon_п) - f(w(t, w_{0н},), u_н, \upsilon_н), \tag{1.5}$$

или

$$\dot{x} = \varphi(x, u, \upsilon), \tag{1.6}$$

где

$$\varphi(x, u, \upsilon) = f(w(t, w_{0п},), u_п, \upsilon_п) - f(w(t, w_{0н},), u_н, \upsilon_н), \qquad (1.7)$$

$$u = u_п - u_н,\ \upsilon = \upsilon_п - \upsilon_н. \qquad (1.8)$$

Здесь u и υ — отклонения управления и возмущения.

При исследовании устойчивости невозмущенных движений динамических объектов или систем отклонения управлений (задающих воздействий) и возмущений обычно полагаются равными нулю. При этом дифференциальное уравнение (1.6) принимает вид

$$\dot{x} = \varphi(x), \qquad (1.9)$$

причем, как видно из (1.7), при $u = \upsilon = 0$, если $x = \mathbf{0}$, то и вектор-функция $\varphi(x) = \mathbf{0}$. Отсюда следует, что состояние $x = \mathbf{0}$ фактически является *положением равновесия* объекта (1.9), так как в этом состоянии скорости изменения всех переменных состояния равны нулю. Следовательно, в этом состоянии объект может оставаться сколь угодно долго, естественно, при отсутствии возмущений. Здесь $\mathbf{0}$ — нулевой n-вектор.

Условие $x = \mathbf{0}$ при $u = \upsilon = 0$ соответствует равенству $w = w_н$, т. е. состояние $x = \mathbf{0}$ системы уравнений (1.9) соответствует невозмущенному движению объекта (1.1), (1.2). Поэтому, исследовав устойчивость положения равновесия $x = \mathbf{0}$ системы уравнений (1.9), можно сделать вывод об устойчивости невозмущенного движения объекта (1.1), (1.2). Непосредственное же исследование устойчивости невозмущенного движения нелинейных объектов или систем, описываемых уравнениями типа (1.1), (1.2), является очень сложным.

Таким образом, уравнения (1.6) и (1.9) являются *дифференциальными уравнениями в отклонениях* объектов или систем, описываемых уравнениями типа (1.1), (1.2). Покажем вывод этих уравнений на примере конкретного нелинейного объекта.

С этой целью рассмотрим нелинейный двухъёмкостной технический объект управления, который описывается уравнениями:

$$\dot{w} = f(w, u_п),\ v = \varsigma(w), \qquad (1.10)$$

где

$$f(w, u_п) = \begin{bmatrix} w_2 \\ u_п - w_2^3 - (1 + |w_2|)\sin w_1 \end{bmatrix},\ \varsigma(w) = 2w_1. \qquad (1.11)$$

Здесь $w = [w_1 \quad w_2]^T$ — вектор состояния, причем $w = w(t, w_0)$; $u_п$ и v — управление и выходная величина объекта [79]. Пусть $u_н = u_н(t)$ — номинальное управление, при котором выходная величина v объекта (1.10) при номинальных начальных условиях $w_{0н} = [w_{10н} \quad w_{20н}]^T$ изменяется по требуемому закону $v_н = v_н(t)$; при этом вектор $w_н(t, w_{0н}, u_н) = [w_{1н} \quad w_{2н}]^T$ удовлетворяет уравнениям (1.10): $\dot{w}_н = f(w_н(t, w_{0н}), u_н)$, $v_н = \varsigma(w_н)$. В этих уравнениях

$$f(w_{\text{н}}(t, w_{0\text{н}}, u_{\text{н}})) = \begin{bmatrix} w_{2\text{н}} \\ u_{\text{н}} - (w_{2\text{н}})^3 - (1+|w_{2\text{н}}|)\sin w_{1\text{н}} \end{bmatrix}, \ \varsigma(w_{\text{н}}) = 2w_{1\text{н}}. \qquad (1.12)$$

Если $x = w - w_{\text{н}}$, т. е. $x_1 = w_1 - w_{1\text{н}}$ и $x_2 = w_2 - w_{2\text{н}}$, то $\dot{x} = \dot{w} - \dot{w}_{\text{н}}$. Последнее равенство с учетом (1.11) и (1.12) позволяет записать уравнение

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} w_2 \\ u_{\text{п}} - w_2^3 - (1+|w_2|)\sin w_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{2\text{н}} \\ u_{\text{н}} - (w_{2\text{н}})^3 - (1+|w_{2\text{н}}|)\sin w_{1\text{н}} \end{bmatrix},$$

которое при $u = u_{\text{п}} - u_{\text{н}}$ имеет вид

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u - (w_2^3 - w_{2\text{н}}^3) - [(1+|w_2|)\sin w_1 + (1+|w_{2\text{н}}|)\sin w_{1\text{н}}] \end{bmatrix}. \qquad (1.13)$$

Из равенства $x = w - w_{\text{н}}$ следуют выражения $w_1 = x_1 + w_{1\text{н}}$ и $w_2 = x_2 + w_{2\text{н}}$. Подставляя эти выражения в (1.13), получим

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u - [(x_2 + w_{2\text{н}})^3 - w_{2\text{н}}^3] - [(1+|x_2 + w_{2\text{н}}|)\sin(x_1 + w_{1\text{н}}) + (1+|w_{2\text{н}}|)\sin w_{1\text{н}})] \end{bmatrix} = \varphi(x). \ (1.14)$$

Аналогично, если $y = v - v_{\text{н}} = 2w_1 - 2w_{1\text{н}} = 2x_1$, то уравнение выхода имеет вид

$$y = 2x_1. \qquad (1.15)$$

Здесь y — отклонение выходной управляемой величины от её номинального закона изменения.

Уравнения (1.14) и (1.15) являются искомыми дифференциальными *уравнениями в отклонениях* нелинейного объекта (1.10), (1.11). Легко видеть из (1.14), что при $x = \mathbf{0}$, т. е. при $u = x_1 = x_2 = 0$, функция $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, т. е. состояние $x = \mathbf{0}$ объекта управления (1.14), (1.15), действительно, является его положением равновесия.

В частности, если $w_{1\text{н}} = \pi/4$, а $w_{2\text{н}} = 0$, то уравнения объекта (1.10), (1.11) в отклонениях принимают вид

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u - x_2^3 - (1+|x_2|)(\sin x_1 + \cos x_1) + 1 \end{bmatrix} = \varphi(x), \ y = 2x_1.$$

Отсюда следует: для того, чтобы при $x_1 = x_2 = 0$ вектор $\dot{x} = \mathbf{0}$, необходимо, чтобы $u = 0$.

Для решения вопроса об устойчивости положения равновесия системы дифференциальных уравнений (1.9) или, что то же самое, вопроса об устойчивости невозмущенного движения нелинейной системы, описываемой уравнениями (1.1), А. М. Ляпунов предложил два метода, которые широко используются вплоть до настоящего времени [60, 70, 23].