Оглавление

Введение

Интерес к дискретной математике вполне понятен. Он объясняется постоянно растущей в последние десятилетия потребностью в ней в связи с развитием широких областей её применения, повсеместно курсы дискретной математики входят в программы обучения будущих специалистов по информационным технологиям.

Содержание изучаемого материала ориентировано на студентов, обучающихся по специальности 23010265, содержит большое количество примеров.

В программе курса предусмотрено изучение элементов теории множеств, основных понятий теории графов, переключательных (логических) функций, схем алгоритмов. Предполагается, что студент не испытывает затруднений в понимании текстов программ, составленных на языках высокого уровня, в частности *Object Pascal*.

Дискретная математика имеет широкий спектр приложений в областях, связанных с информационными технологиями и компьютерами. Самым первоначальным (ныне редко использующимся) названием компьютера было «электронная цифровая вычислительная машина». Слово «цифровая» указывает на принципиально дискретный характер работы данного устройства [5].

Дискретная математика — бурно развивающаяся в XX веке ветвь математики. Её роль и место определяются в основном тремя факторами:

- дискретную математику можно рассматривать как теоретические основы компьютерной математики;
- модели и методы дискретной математики являются хорошим средством и языком для построения и анализа моделей в различных науках, включая химию, биологию, генетику, физику, психологию, экологию и другие;
- язык дискретной математики чрезвычайно удобен и стал фактически метаязыком всей современной математики.

Математика как наука, естественно, от рождения делится на дискретную и континуальную математику. Что мы относим к континуальной математике? Все, что явно или неявно содержит идеи теории пределов и непрерывности. Все остальное — дискретная математика (т. е. арифметика, алгебра, теория множеств и общая теория отображений, математическая логика, комбинаторный анализ, теория алгоритмов и многое другое).

Предмет дискретная математика

Дискретная математика (дискретный анализ, конечная математика) — это раздел математики, занимающийся изучением свойств объектов конечного характера. К их числу могут быть отнесены *конечные группы*, *конечные графы*, некоторые *математические модели преобразователей информации,* такие как *конечные автоматы*.

Дискретный анализ — раздел математики, занимающийся изучением свойств структур конечного характера, которые возникают как внутри математики, так и в её приложениях. В качестве синонима понятий дискретный анализ и дискретной математики иногда употребляют термин «*конечная математика*».

В отличие от дискретного анализа классическая математика в основном занимается изучением свойств объектов непрерывного характера. Использование классической или дискретной математики как аппаратов исследования связано с задачами, которые ставит перед собой исследователь, и с тем, какую модель изучаемого явления он рассматривает — дискретную или непрерывную.

Дискретность (происходит от латинского слова *discretus*) — «разделённый, прерывистый». Дискретное изменение какой-либо величины во времени — это изменение, происходящее через некоторые промежутки времени (скачками).

Деление математики на классическую и дискретную в значительной мере условно, поскольку, например, с одной стороны, происходит активная циркуляция идей и методов между ними, а с другой стороны, часто возникает необходимость исследования моделей, обладающих как дискретными, так и непрерывными свойствами одновременно. Следует отметить, что в математике существуют направления, использующие средства дискретной математики для изучения непрерывных моделей, и наоборот, часто средства и постановки задач классического анализа используются при исследовании дискретных структур. Это указывает на известное слияние рассматриваемых областей.

(Возьмите множество всех подмножеств эталонного дискретного множества — множества натуральных чисел, и вы получите мощность базового для традиционного математического анализа множества — множества действительных чисел.)

Специфика методов и задач дискретного анализа обусловлена, в первую очередь, необходимостью отказа от основополагающих понятий классической математики — предела и непрерывности — и в связи с этим тем, для многих задач дискретного анализа сильные средства классической математики оказываются, как правило, мало приемлемыми.

Некоторые сведения из истории предмета

Элементы дискретного анализа возникли в глубокой древности и развивались параллельно с другими разделами математики, в значительной мере являлись их составной частью. Типичными для этого периода являлись задачи, связанные со свойствами целых чисел и приведшие затем к созданию теории чисел. К их числу могут быть отнесены задачи отыскания алгоритмов сложения и умножения натуральных чисел у древних египтян (2-е тысячелетие до н. э.), задачи суммирования и задачи о делимости натуральных чисел в пифагорейской школе (V–IV век до н. э.). Позже появились элементы комбинаторного анализа и дискретной теории вероятности, а в связи с общими проблемами теории чисел, алгебры и геометрии (XVIII–XIX век) возникли важнейшие понятия алгебры, определившие её развитие, и имевшие дискретную природу. Стремление к строгости математических рассуждений и анализ рабочего инструмента математики — *логики* — привели к выделению ещё одного важного раздела в математике — *математической логики* (XIX век). Однако наибольшего развития дискретная математика достигла в связи с запросами практики, приведшими к появлению новой науки — *кибернетики* и её теоретической части — *теоретической кибернетики.* (Норберт Винер — основоположник кибернетики.) Теоретическая кибернетика широко использует результаты дискретного анализа при решении задач.

Анализ понятий «*вычислимость*» и «*алгоритм*» привели к созданию раздела математической логики — *теории алгоритмов*.

Экономические задачи, задачи электротехники, равно как и внутренние задачи математики, потребовали разработки *теории графов.* Задачи конструирования и описания работы сложных управленческих систем привели к *теории функциональных систем.*

Наряду с уже отличительными свойствами дискретная математика имеет ещё ряд особенностей. Вместе с задачами, имеющими общий математический характер, важное место в дискретном анализе занимают задачи построения конкретных решающих алгоритмов.

В некоторых параграфах в качестве нотаций для описания алгоритмов будем использовать некоторый *не специфицированный язык программирования,* похожий по синтаксису на *Pascal* [5].

В программах широко используются математические обозначения, которые являются самоочевидными в некотором контексте.

Например:

For $x \in M$ do
 $P(x)$
End for

Читаем, как применение какой-то процедуры P ко всем элементам x, принадлежащим множеству M.

Оператор *Select* $m \in M$ читаем, как выбор произвольного элемента m из множества M. Этот оператор часто используется, например, в алгоритмах «перебора».

Оператор *Yield* x означает возврат значения x, но при этом выполнение функции не прекращается, а продолжается со следующего оператора.

Обозначение **: =** — «по определению» или «положим».

В *табл. 1* представлены некоторые общепринятые обозначения.

В настоящее время популярным становится термин *компьютерная математика*, введённый американскими исследователями Куком Д. и Бейзом Г. Многие разделы дискретной математики причислены к компьютерной математике.

Таблица 1

Указатель некоторых обозначений

$\{\ldots\}$	Множество
$\in$	Принадлежность множеству
$\notin$	Непринадлежность множеству
$\subset$	Символ строгого включения
$\subseteq$	Символ включения
$\forall$	Квантор общности
$\rightarrow$	Следование, отображение
$\equiv$	Символ отношения эквивалентности
$\cup$	Объединение
$\cap$	Пересечение

Специальная математика — это некоторые разделы современной математики. Речь идет о математическом аппарате, который помогает расширить возможности математического описания или, выражаясь изящнее, — *математического моделирования,* сложных систем. Далеко не все задачи, которые возникают в сложных системах, включающих человека, можно свести к задачам механики или математического анализа, традиционно называемого в технических вузах «высшей математикой».

Последние сто лет интенсивно развивались разделы математики, многие из которых часто объединяют общим названием *дискретная математика*. Так что чисто формально нет непреодолимой пропасти и антагонизма между дискретной и непрерывной математикой. Всякий инструмент хорош для решения задач, на которые он ориентирован. Вопрос удобства, эффективности использования и адекватности того или иного математического аппарата вообще до определенной степени вопрос *субъективный.*

Педагогический опыт многих преподавателей показал, что математические способности встречаются гораздо чаще, чем мы обычно думаем. Как правило, неудачи с усвоением курса математики происходят не из-за отсутствия математических способностей, а из-за отсутствия *привычки систематически работать* и доводить познаваемое до *понимания*, а не до запоминания. Часто случается, что студент переходит к последующим частям курса без хорошего усвоения предшествующих, он не проникает в суть фундаментальных понятий и идей, лежащих в основе всего изложения. А нередко студенты стремятся набить руку в пользовании определенными алгоритмами без проникновения в их смысл. Часто жалобы на отсутствие математических способностей приходится слушать от тех, кто учится с ленцой, которая мешает преодолевать трудности, встречающиеся на пути познания. А ведь только в самостоятельном преодолении препятствий вырабатывается характер и появляется уверенность в собственных силах.

Основные положения каждого раздела пособия иллюстрируются примерами прикладного характера и сопровождаются алгоритмами поиска оптимальных решений. В конце каждого раздела приведены контрольные вопросы и задачи. По основным разделам студенту предлагается выполнить индивидуальные задания.

Содержание учебных пособий и лекционного материала отвечает требованиям учебной программы дисциплины «Дискретная математика».

Для многих технических и экономических систем важным является дискретность их функционирования во времени и пространстве. Состав и структура таких систем представляют дискретную модель, для описания которой привлекается аппарат дискретной математики.

Основным носителем дискретной математики является множество элементов, а структуру дискретной модели формируют отношения между этими элементами.

В пособии дается представление о разделах дискретного анализа, использующихся в современных компьютерных технологиях. Достаточное внимание уделено понятиям нечеткой математики и сфере их применения.

Часть 1. Множества и отношения

1.1. Множества

«Ты когда-нибудь видела, как рисуют множество?» — «Множество чего?» — спросила Алиса. «Ничего, — отвечала Соня. — Просто множество!»

Л. Кэрролл

Человеческое мышление устроено так, что мир представляется состоящим из отдельных «объектов». Философам давно ясно, что мир — единое неразрывное целое, и выделение в нём объектов — это не более чем произвольный акт нашего мышления, позволяющий сформировать доступную для рационального анализа картину мира. Но как бы там ни было, выделение объектов и их совокупностей — естественный (или даже единственно возможный) способ организации нашего мышления, поэтому неудивительно, что он лежит в основе главного инструмента описания точного знания — математики.

Теория множеств как математическая дисциплина создана немецким математиком Г. Кантором (1845–1918 гг.). В настоящее время существуют различные теории множеств. Слова А. Н. Колмогорова [1]:

«Вряд ли можно назвать какую-либо возникшую в последней четверти прошлого столетия математическую дисциплину, которая оказала бы большее влияние на последующий прогресс всей математики и шире — на математическое мышление в целом, чем теория множеств. К идеям теории множеств в разное время подходили с разных сторон многие ученые, но оформление ее в самостоятельную науку, со своим особым предметом и методами исследования, осуществил на протяжении четверти века в работах 1872–1897 гг. Георг Кантор». Георг Кантор первым вступил в одну из самых абстрактных областей математики, именно он впервые исследовал с математической (а не метафизической) точки зрения взгляд на бесконечность — понятие, волновавшее человеческий ум на протяжении многих веков. Теория множеств Кантора до сих пор остается фундаментом для классических разделов математики, таких, как алгебра, геометрия и анализ.

Судьба научных идей Кантора оказалась очень непростой. У них были как преданные защитники, такие, как Гильберт, сказавший однажды: «Никто не сможет нас изгнать из рая, созданного для нас Кантором!» — так и непримиримые противники, среди которых был, например, авторитетный математик Леопольд Кронекер (1823–1891), отозвавшийся как-то о работах Кантора с долей презрения: «Это не математика, это теология!».

Одна из самых оригинальных идей Кантора — диагональный процесс. Диагональный процесс, изобретенный Кантором в связи с доказательством существования трансцендентных чисел и понятием несчетных множеств, лежит, как мы увидим в дальнейших главах, в основе знаменитого парадокса Рассела, повергшего, по словам Гильберта, математический мир в состояние шока, в основе доказательства легендарной теоремы Гёделя о неполноте формальных исчислений и в основе тьюринговского доказательства алгоритмической неразрешимости некоторых проблем (и на самом деле в основе очень многих других фундаментальных логико-математических конструкций).

1.1.1. Элементы и множества

Теорию множеств можно подразделить на аксиоматическую и интуитивную (наивную).

Аксиоматическая теория исходит из того, что множество определяется совокупностью аксиом, записанных обычно на языке логики (предикатов). *Интуитивная теория* множеств апеллирует к интуиции, к базовому понятию *принадлежности* элемента множеству, то есть к интуитивной понятности отношения принадлежности $\in$ (*$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ — элемент **a** принадлежит множеству **A***).

Для интуитивного понятия множества существенны два момента, следующие из «определения»:

1. Различимость элементов.
2. Возможность мыслить их как нечто единое.

Студенты образуют группу. Деревья составляют лес.

Целые числа составляют множество целых чисел.

Жители Марса — множество марсиан.

Множество понимается как объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или мыслью. Понятие **множества** является фундаментальным неопределяемым явно понятием математики, как, например, точка или прямая. *Под множеством будем понимать* совокупность определённых, вполне различимых объектов, рассматриваемых как единое целое [2].

Объекты, из которых составлено множество, называются *элементами*. Элементы множества строго различимы. Множества могут иметь различную природу.

В современных языках программирования требуется, чтобы переменные (как и другие данные) объявлялись как принадлежащие к определенному типу данных. Тип данных представляет собой множество объектов со списками стандартных операций над ними. Определение типа переменных равносильно указанию множества, из которого переменным присваиваются значения.

Для *обозначения конкретных множеств* используются прописные буквы: A, S, M, Y *или* A_1, A_2 *и т. д.*

Для *обозначения элементов множеств* используются строчные буквы: a, s, m, y *или строчные буквы с индексами:* a_1, a_2 *и т. д.*

Принадлежность элемента множеству обозначается: $a \in A$.

Непринадлежность элемента множеству обозначается: $a \notin A$.

Примеры множеств:

R — множество вещественных чисел;

C: = {…. –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …} — множество всех целых чисел;

N: = {1, 2, 3, 4, 5, ...} — множество всех натуральных чисел.

A — множество предметов, изучаемых студентами специальности 23010265.

Множества, как объекты, могут быть элементами других множеств. Множество, элементами которого являются множества, называется *классом* или *семейством*. Семейства множеств обычно обозначают прописными буквами («рукописными») латинского алфавита, чтобы отличить их от множеств, не содержащих множеств в качестве элементов.

Например, множество групп студентов состоит из элементов (групп), которые в свою очередь состоят из элементов (студентов).

1.1.2. Задание множества

Чтобы задать множество, нужно указать элементы, которые ему принадлежат. Это можно сделать тремя способами:

1) перечислением элементов:

$$M := \{a_1, a_2, ..., a_n\} \text{ или } M := \{Иванов, Петров, Зайцев\}.$$
$$X := \{x_1, x_2, ..., x_k\} \text{ или } X := \{x_i\}, i \in \{1,2,...,k\}.$$

2) заданием через характеристический предикат:

$$M := \{x | P(x)\},$$

где $P(x)$ — *характеристический предикат*, представляющий собой условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение. Если для данного элемента x условие выполнено, то он принадлежит данному множеству. Если для данного элемента x условие не выполнено, то он не принадлежит множеству.

Например: *A: = {x | x — отличник группы}*

A: = {x ∈ AC | x — отличник группы} мы уточнили, что *x* является студентом определённой группы AC .

K: = {x | x — четное число}

$M := \{n | n \in N \; \& \; n < 10\}$, т. е. в этом множестве могут быть натуральные числа от 1 до 10.

$L := \{x | x^2 - 1 = 0\}$, т. е. 1 или –1 могут принадлежать множеству L.

Если $P = \{n|P(n)$: — «быть целым положительным числом»}, то $P = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Если $A = \{a|P(a)$: — «быть клавишей клавиатуры компьютера»$\}$, то $A = \{esc, f1, f2, ..., inc, del, enter\}$.

Если $B = \{b|P(b)$: — «быть командой операционной системы персонального компьютера»$\}$, то $B = \{break, cd, copy, ..., tree, xcopy\}$.

3) порождающей процедурой:

$M := \{x|x := f\}$, где f — порождающая процедура.

Порождающая процедура — это процедура, которая, будучи запущенной, порождает некоторые объекты, являющиеся элементами некоторого множества.

Например: *M: = {n | for n from 1 to 9 yield n}*, т. е. множество содержит любой элемент от одного до девяти.

Примечание: способом 1 (перечислением) могут быть заданы только *конечные множества.*

1.1.3. Основные определения и понятия

1. *Элементы множества* — отдельные объекты, из которых состоит множество. Принадлежность или непринадлежность элемента множеству обозначаются $\in$ или $\notin$, например, $x \in X$ или $x \notin Y$.

2. *Конечное множество* — это множество, содержащее конечное число элементов (условная запись $|M| = n$, $n \in N$).

3. *Бесконечное множество* — это множество, которое содержит бесконечное число элементов.

4. *Пустое множество* — это множество, не содержащее ни одного элемента. По определению есть подмножество любого множества *S*. Обозначается Ø или {}.

5. Два множества являются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Из этого определения следует, что порядок элементов в множестве не существенен, т. е. $S_1 = S_2$; $S_1 \subseteq S_2$ и $S_2 \subseteq S_1$; {7, 4, 5, 6} и {4, 5, 6, 7}.

Во множестве не может быть неразличимых элементов:

{2, 2, 3, 5, 8} — множеством не является,

{0, 2, 5, 10} — является множеством.

6. Множество *X* является подмножеством *Y*, если любой элемент x принадлежит множеству *Y*, что на алгебраическом языке записывается: $X \subseteq Y \sim \forall\, x((x \in X) \rightarrow (x \in Y))$, но эту формулу принято записывать короче $X \subseteq Y$.

7. X — собственное подмножество Y, если X является подмножеством Y, и X не совпадает с Y, и X не является пустым $X \subset Y$.

Если $X \subseteq Y$, то говорят, что между множеством X и множеством Y *нет отношения строгого порядка.*

Если же $X \subset Y$, то между X и Y *существует отношение строгого порядка*.

«Нематематические» объекты также формируют множества: множество клавиш клавиатуры персонального компьютера (*KEYBOARD*) — A, множество команд операционной системы компьютера (*EXECUTIVE INSTRUCTION*) — B и др. [15]

Например, для множества клавиш клавиатуры персонального компьютера $A = \{esc, f1, f2, ..., \rightarrow, inc, del, enter\}$ мощность этого множества $|A| = 102$, для множества команд операционной системы *MS DOS* персонального компьютера $B = \{break, cd, cls, ..., sys, tree, xcopy\}$ мощность этого множества $|B| = 61$.

Например, множество A клавиш клавиатуры персонального компьютера содержит подмножество алфавитно-цифровых клавиш со знаками пунктуации — $A1$ и подмножество специальных клавиш, предназначенных для исполнения специальных функций (ввод строчных или прописных букв, смена алфавита, ввод или удаление символа и т. п.) — $A2$. При этом $A1 \subseteq A$ и $A2 \subseteq A$, а мощности множеств $A1$ и $A2$ равны $n(A1) = 46$ и $n(A2) = 56$.

Множество команд операционной системы *MS DOS* включает в себя два подмножества: внутренние и внешние. Подмножество внутренних команд $B1$ выполняется самим командным процессором *MS DOS*. Мощность этого множества равна $n(B1) = 27$. Подмножество внутренних команд $B2$ — это программы, поставляемые вместе с операционной системой в виде отдельных файлов. Мощность этого множества равна $n(B2) = 34$. Тогда, $A1 \subset A$ или $B1 \subset B$.

Свойства отношения нестрогого порядка:

1. Рефлективность $X \subseteq X$.
2. Транзитивность $[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z)] \rightarrow (X \subseteq Z)$.
3. Антисимметричность $[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)] \rightarrow X = Y$.

Свойство для пустого множества: $\varnothing \subseteq M$.

$\varnothing$ находится в отношении нестрогого порядка к любому множеству M.

Свойства отношения строгого порядка:

1. Антирефлексивность $X \subset X$ — false.
2. Транзитивность $[(X \subset Y) \wedge (Y \subset Z)] \rightarrow (X \subset Z)$.

Следует обратить внимание на следующие соотношения:

$\{ \} = \varnothing$; $1 \neq \{ 1 \}$; $\{\{ 1 \}\} \neq \{ 1 \}$; { а, в } = { в, а }

Свойства подмножеств:

1. Число k-элементных подмножеств, которые можно получить из n — элементного множества:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

2. Общее число всевозможных подмножеств n-элементного множества (образует булеан) равно:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n . \tag{2}$$

При этом числа $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$ определяют пустое множество и само множество.

8. Если бесконечное множество оказывается возможным привести во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел, то оно называется *счетным*, в противном случае оно *несчетно*.

Примеры счетных множеств:

1) множество квадратов натуральных чисел.
2) множество целых чисел.
3) множество рациональных чисел (дроби p/q), где p — целое, q — натуральное или наоборот.

Отметим, что одно из интересных свойств бесконечного множества — это возможное приведение во взаимно однозначное соответствие бесконечного множества с его бесконечным же подмножеством.

Пример несчетного множества — множество всех действительных чисел, множество чисел, заключённых на отрезке [0,1].

Множество A называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если есть такое действительное число K, что для всех $x \in A$ выполняется неравенство $x \leq K$ ($x \geq K$).

Рассмотрим числовое множество S. *Верхней границей* является такое число C, что для любого $x \in S$, $x \leq C$ (верхних границ может быть сколько угодно).

9. Верхняя граница Sup S (*супремум*) — это верхняя граница, которая не превосходит любую другую верхнюю границу.

10. *Нижняя граница* множества S — это такое число C, что для любых $x \in S$, $x \geq C$.

11. *Инфинум* — это нижняя граница, не меньшая любой другой нижней границы inf S.

Теорема: Если $B \subseteq A$, то $\inf B \geq \inf A$, $\sup B \leq \sup A$.

Для любого элемента $x \in A$ выполняется неравенство $x \leq \sup A$ ($x \geq \inf A$).

Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся элемент $x \in A$ такой, что $x > \sup A - \varepsilon$ $(x < \inf A + \varepsilon)$.

Доказательство:

Обозначим через b' элемент множества B, имеющий наименьшее значение, т. е. $b' \in B$ и $b' = \inf B$. Но $B \subseteq A$, т. е. $b' \in A$. Пусть a' — элемент множества A, имеющий наименьшее значение, т. е. $a' \in A$ и $a' = \inf A$. При этом, если $b' = a'$, то $b' = \inf A$, если $b' \neq a'$, то $b' > a' = \inf A$. Таким образом, $b' \geq \inf A$ или $\inf B \geq \inf A$.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество действительных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) границу.

Примеры:

1. $$A = (-\infty, a] = \{x \mid -\infty < x \leq a\};$$
$$B = [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < b\}, R = (-\infty, +\infty)$$

– полуоткрытые открытые интервалы. Здесь sup $A = a$, *inf* $B = a$ принадлежат указанным множествам.

2. $A = [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$; $B = (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$; $C = (-\infty; a] = \{x \mid -\infty < x \leq a\}$; $D = [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\}$